Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Hruša
O jistém vytvoření elipsy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 1, R6--R10

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123307

ního místa. K tomu však ještě přistupuje nepřesnost až 0,5 jednotky ze zkrácení výsledku lineární interpolace s opravou, celkem tudíž nepřesnost až 1,1 jednotky posledního místa.

Tabulky logaritmů více než 10místných by vypadly příliš rozsáhlé i při užívání lineární interpolace s opravou. Jest je proto zaříditi na interpolaci řádu vyššího, na př. v THOMPSONOVÝCH 20místných logaritmech se užívá interpolace t. zv. formulí EVERETTOVOU až s diferencemi 4. řádu. Vyžaduje to však opět značně větší práce, zvláště při výpočtu argumentu. Řád této interpolace a práci s výpočtem spojenou možno ostatně značně zredukovati rozkladem logaritmovaného čísla na součin.

Podrobný výklad toho a další interpolace najde čtenář v knize LÁSKA-HRUŠKA: Počet numerický, vydala JČMF 1934. 8° IV, 496 stran, 42 obr., 7 tab., váz. Kč 112,—.

O jistém vytvoření elipsy.

Dr. *Karel Hruša.*

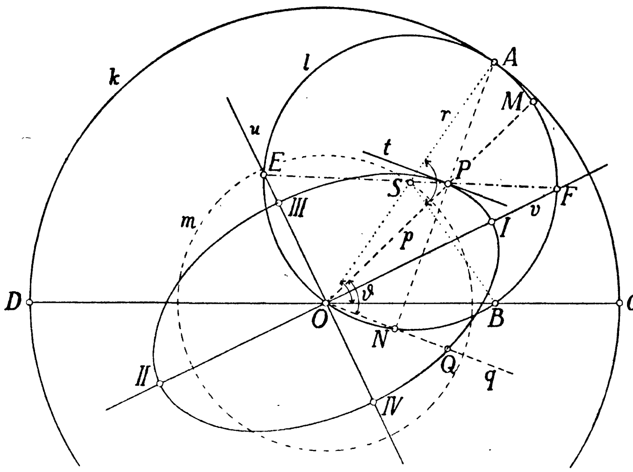
P. řed. Kaufmann odvodil ve svém článku „Konstrukce elipsy ze sdružených průměrů“ v 2. čísle „Rozhledů“ roč. 10., zajímavou mechanickou konstrukci elipsy, jež je dána dvěma sdruženými průměry. Chci v dalším upozorniti na jiné již známé, mechanické vytvoření poněkud obecnější, z něhož vyplyne tato konstrukce jako speciální případ.

Je dána kružnice k o poloměru $OA = 2r$, jíž se uvnitř dotýká kružnice l o poloměru polovičním $SA = r$ (obr. 1); prochází tedy kružnice l středem O kružnice k. Valí-li se kružnice l po kružnici k, opisuje její střed S kružnici m soustřednou s kružnicí k o poloměru $OS = r$. Libovolný bod B na obvodě kružnice l se pohybuje po průměru CD kružnice k.

Důkaz: Označíme-li $\sphericalangle AOB = \varphi$, pak je $\sphericalangle ASB = 2\varphi$ a $\widehat{AC} = 2r \operatorname{arc} \varphi$, $\widehat{AB} = r \operatorname{arc} 2\varphi = 2r \operatorname{arc} \varphi = \widehat{AC}$. Oba oblouky se sobě rovnají. Dostane-li se kružnice l do takové polohy, že se dotýká kružnice k v bodě C, padne bod B právě do C. To platí pro každé φ. Při jiné poloze kružnice l padne bod B do jiného bodu průměru CD, ale vždy $\widehat{AB} = \widehat{AC}$, takže je vždy možno převést valením kružnice l po kružnici k bod B do C. Dráha bodu B je tedy skutečně průměr CD. Také kterýkoli jiný bod na obvodu kružnice l opíše při uvažovaném pohybu průměr kružnice k.

Jakou dráhu opíše libovolně zvolený bod P pevně spojený s kružnicí l? Spojíme-li bod P s bodem S, protne jejich spojnice kružnici l v bodech E, F. Tyto dva body jsou na obvodu kružnice l a podle dříve dokázaného se pohybují po průměrech $OE \equiv u$,

$OF \equiv v$. Oba tyto průměry jsou k sobě kolmé. Je tedy bod P na úsečce konstantní délky $EF = 2r$, jejíž koncové body opisují dvě přímky u, v k sobě kolmé. To však je známá konstrukce elipsy, jejíž osy spadají do přímek u, v. Její velká poloosa je $OI = OII = EP$, malá $OIII = OIV = PF$. Součet obou poloos je $EF = OC = 2r$. Kdybychom zvolili bod P vně kružnice l, výsledek bude týž, neboť je známo, že také vnější bod úsečky, jejíž koncové



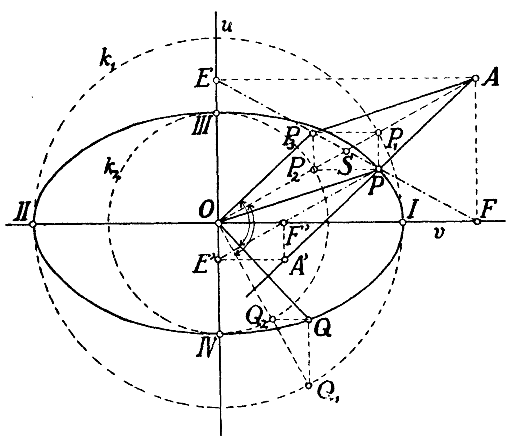
Obr. 1.

body se pohybují po dvou přímkách k sobě kolmých, opisuje elipsu. Úsečka $EF = OC = 2r$ by byla rovna v tomto případě rozdílu poloos. Dospíváme tak k větě:

Valí-li se pohyblivá kružnice uvnitř kružnice pevné, jejíž poloměr se rovná průměru kružnice pohyblivé, opisuje každý bod v rovině pohyblivé kružnice libovolně zvolený a s ní pevně spojený elipsu; toliko střed kružnice pohyblivé opisuje kružnici a každý bod na obvodu kružnice pohyblivé opisuje průměr kružnice pevné. Poloměr kružnice pevné se rovná součtu, po případě rozdílu poloos uvedené elipsy podle toho, je-li zvolený bod vnitřním či vnějším bodem kružnice pohyblivé.

Sestrojme tečnu elipsy v bodě P! Je-li dána elipsa jako čára, kterou opíše bod P úsečky EF, jež se pohybuje svými koncovými body po dvou k sobě kolmých přímkách u, v, jest delší poloosa elipsy $OI = OII = EP$ a kratší $OIII = OIV = PF$ (obr. 2). Opišme kolem středu O kružnice k_1, k_2 o poloměrech rovných poloosám elipsy OI, $OIII$! Známým způsobem lze přiřaditi elipsu ke kružnicím k_1, k_2 pomocí afinity. Bodu P odpovídají body P_1, resp. P_2 na těchto kružnicích. Sestrojme poloměr OQ_1 v kružnici k_1

kolmý k poloměru OP_1. Bodu Q_1 odpovídá na elipse bod Q; OP, OQ jsou sdružené poloměry této elipsy. Otočíme-li trojúhelník OQQ_1 o 90^0, přejde bod Q_1 v P_1, Q v P_3 a vznikne obdélník $PP_1P_3P_2$. Bod P_3 leží na úsečce EF. Veďme $PA \# OP_3$, $P_3A \# OP$; dostaneme rovnoběžník $OPAP_3$. Je-li S průsečík úhlopříček obdélníka $PP_1P_3P_2$, je $OS = \frac{1}{2}(a + b) = SA$ a tedy $OA = EF$, $EA \# OF$, $FA \# OE$. Tečna elipsy v bodě P je rovnoběžná s OQ a $PA \parallel OP_3$ je kolmá na tuto tečnu. Spojnice PA je tedy normála elipsy v bodě P.



Obr. 2.

Sestrojíme-li elipsu jakožto geometrické místo bodu úsečky, která se pohybuje svými koncovými body po dvou přímkách k sobě kolmých a doplníme-li pravoúhlý trojúhelník, jehož obě odvěsny leží v těchto přímkách a přeponou je pohybující se úsečka, na obdélník, pak spojnice čtvrtého vrcholu tohoto obdélníka s bodem, jenž elipsu opisuje, je normálou elipsy v uvedeném bodě.

Tato věta platí i v případě, kdy bod elipsu opisující je vnějším bodem pohybující se úsečky. Sestrojme $PE' = PE$ a pak také $PF' = PF$; naše elipsa se vytvoří také bodem P přímky $E'F'$, pohybují-li se body E', F' po přímkách u, v. Avšak $PE' = OP_1$ (delší poloosa elipsy) a proto $PE' \parallel OP_1$, odtud plyne $PP_2 = OF'$, $PP_1 = OE'$, takže obdélník $A'F'OE' \cong PP_1P_3P_2$. Proto také $PP_3 \# A'O$. To znamená $A'P \parallel OP_3$ a leží tedy bod A' v prodloužení úsečky PA. Tím je dokázána uvedená věta i pro případ, že P leží vně úsečky $E'F'$.

Nalezené věty použijeme k sestrojení tečny v bodě P (obr. 1). Bod A doplňuje $\triangle\ EOF$ na obdélník; je tedy spojnice AP normálou elipsy a kolmice t v bodě P k ní vztyčená je její tečnou. Přímka AP protne kružnici l v dalším bodě N; spojnice $ON \equiv q$ je poloměrem sdruženým k poloměru $OP \equiv p$, neboť je rovnoběžná s tečnou t v bodě P. Valí-li se kružnice l po kružnici k, opisuje průsečík M kružnice l s přímkou p právě tuto přímku p a bod N opisuje přímku q. Jest jasné, že toto valení je totožné s pohybem, který nastane, jestliže se trojúhelník MNP pohybuje body M, N po přímkách p, q. Bod P opíše pak naši elipsu. Přejde-li při tomto pohybu bod A (který se pohybuje po $OA \equiv r$) do bodu O, přejde bod P do Q, takže $AP = OQ$.

Označíme-li poloosy elipsy písmeny a, b, délky sdružených poloměrů $OP = p$, $OQ = q$, můžeme z této konfigurace odvoditi známé *Apolloniovy věty o sdružených poloměrech elipsy*. Mocnost bodu P ke kružnici l jest

$$PE \,.\, PF = PA \,.\, PN;$$

avšak $PE = a$, $PF = b$, $PA = q$, $PN = p \sin \vartheta$, kde $\vartheta = \sphericalangle POQ$ je úhel sevřený oběma sdruženými poloměry. Platí tedy

$$ab = pq \sin \vartheta.$$

Jest zřejmé, že $\sphericalangle NPM = \sphericalangle APO = 90 + \vartheta$. Podle kosinové věty platí v $\triangle APO$

$$AO^2 = OP^2 + AP^2 - 2OP \,.\, AP \cos (90 + \vartheta),$$

avšak $AO = a + b$, takže máme

$$(a + b)^2 = p^2 + q^2 + 2pq \sin \vartheta$$

a vzhledem k předcházejícímu

$$a^2 + b^2 = p^2 + q^2.$$

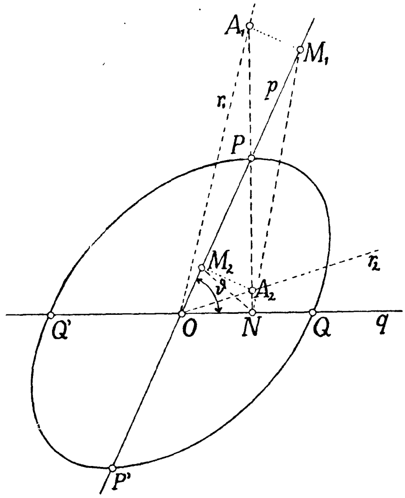
Z naší úvahy plyne, jak lze mechanicky vytvořiti elipsu z dvojice sdružených poloměrů $OP \equiv p$, $OQ \equiv q$, které svírají úhel ϑ. Z koncového bodu poloměru OP (obr. 3) spusťme kolmici PN na druhý poloměr OQ. Na opačnou stranu, než je N, naneseme od bodu P úsečku $PA_1 = OQ = q$. Spustíme-li z bodu A_1 kolmici na prodloužený poloměr OP, dostaneme bod M_1. Pohybuje-li se nyní trojúhelník M_1NP tak, že bod M_1 opisuje přímku p, N opisuje přímku q, pak bod P opíše elipsu, která má OP, OQ za sdružené poloměry.

Kdybychom volili na obr. 1 bod P vně kružnice l, dostali bychom také elipsu, jak již výše bylo řečeno. Spojnice AP by byla rovněž její normálou, avšak její druhý průsečík N s kružnicí l by ležel od bodu P na téže straně jako bod A. Přímka ON by byla průměrem sdruženým k OP. Průměr OP by protal l v bodě M, který by ležel na téže straně od bodu P jako O. Trojúhelník MNP by opisoval elipsu týmž způsobem jako dříve. Podrobné provedení tohoto druhého případu ponechávám čtenáři.

Na základě této druhé konstrukce je možno v obr. 3 nanésti $PA_2 = OQ = q$ opačným směrem než dříve; sestrojíme $A_2M_2 \perp OP$

a pohybují-li se vrcholy M_2, N trojúhelníka M_2NP po přímkách p, q, opíše vrchol P tutéž elipsu jako dříve.

Spojíme-li bod A_1 (po případě bod A_2) s O, dostaneme přímku r_1 (r_2). Pohybuje-li se úsečka A_1N (A_2N) svými koncovými body po



Obr. 3.

přímkách r_1, q (r_2, q), opisuje bod P naši elipsu, jak je ihned patrno z obr. 1. Tím jsme dokázali jiným způsobem konstrukci elipsy, kterou odvodil p. řed. Kaufmann ve svém citovaném článku.

O elektronových lampách, používaných v přijimačích, se zřetelem k jejich vývoji a zdokonalování.

Bohuslav Pavlík.

Část II.

Vícemřížkové lampy. — Tetrody. Oběma zmíněným a vzájemně si odporujícím požadavkům co do velikosti průniku nelze u triody (lampy s jednou mřížkou) současně vyhověti. Nesnáz lze obejíti tím, že lampu opatříme dvěma mřížkami. Tímto způsobem dospějeme ke konstrukci lampy o čtyřech elektrodách (tetrody). Pro tetrody platí v zásadě tytéž úvahy jako pro triody. Předpokládáme-li uspořádání elektrod jako v obr. 10*a*, je patrno, že lze tetrodu v teoretických úvahách nahraditi triodou, jež má anodu v místech druhé mřížky a na této anodě působí výsledné