Josef Langr

O jisté úloze v trojúhelníku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 1, 65--72

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123335`

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O jisté úloze v trojúhelníku.

Napsal inž. Jos. Langr.

V tomto článku hodláme řešiti následující úlohu:

Sestrojiti nad stranami daného trojúhelníka, jakožto základnami vzájemně podobné trojúhelníky, aby jich nově vzniklé vrcholy stanovily rovnostranný trojúhelník.

Buď dán obecný trojúhelník ABC. Rozdělme jeho strany body A_0, B_0, C_0 v jistém poměru λ, takže

$$\frac{\overline{AC_0}}{\overline{BC_0}} = \frac{\overline{BA_0}}{\overline{CA_0}} = \frac{\overline{CB_0}}{\overline{AB_0}} = \lambda.$$

V dělících bodech vztyčme kolmice a na tyto nanesme pořadem úsečky $\overline{A_0A_1}$, $\overline{B_0B_1}$ a $\overline{C_0C_1}$ hovící podmínce

$$\frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{B_0B_1}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{C_0C_1}}{\overline{AB}} = \varkappa.$$

Nanesení může se díti na vnější nebo vnitřní stranu trojúhelníka, při čemž přijímáme, že v prvém případě je $\varkappa$ positivní, v druhém negativní.

Tímto způsobem sestrojené trojúhelníky ABC_1, BCA_1, CAB_1 jsou si navzájem podobny a dle žádané podmínky má býti

$$\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} = \overline{A_1C_1}.$$

Strany odvozeného trojúhelníka lze vyjádřiti následovně:

Z trojúhelníka A_1B_1C plyne

$$\overline{A_1B_1}^2 = \overline{A_1C}^2 + \overline{B_1C}^2 - 2\,.\,\overline{A_1C}\,.\,\overline{B_1C}\,.\cos[\gamma + (\varphi + \psi)],$$

kde

$$\varphi = \sphericalangle A_1CB \quad \text{a} \quad \psi = \sphericalangle ACB_1 .$$

Úhly φ a ψ, bereme-li je menší co do absolutní hodnoty než 180^0, jsou kladné anebo záporné dle toho, je-li $\varkappa$ kladné či záporné.

Pro jednotlivé členy uvedené formule máme

$$\overline{A_1C}^2 = a^2\left(\varkappa^2 + \frac{1}{(1-\lambda)^2}\right), \quad \overline{B_1C}^2 = b^2\left(\varkappa^2 + \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}\right),$$

a

$$\cos\varphi = \frac{\overline{A_0C}}{\overline{A_1C}} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa^2(1-\lambda)^2+1}},$$

$$\cos\psi = \frac{\overline{B_0C}}{\overline{B_1C}} = -\frac{\lambda}{\sqrt{\varkappa^2(1-\lambda)^2+\lambda^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_1C}} = \frac{\varkappa(1-\lambda)}{\sqrt{\varkappa^2(1-\lambda)^2+1}},$$

$$\sin\psi = \frac{\overline{B_0B_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{\varkappa(1-\lambda)}{\sqrt{\varkappa^2(1-\lambda)^2+\lambda^2}}.$$

Znaménka všech odmocnin v těchto vzorcích jest zvoliti stejná jako jest znaménko čísla $1-\lambda$.

Dosazením a po náležité úpravě obdržíme

$$\overline{A_1B_1}^2 = c_1^2 = a^2\left(2\varkappa^2 + \frac{\lambda+1}{(1-\lambda)^2}\right) + b^2\left(2\varkappa^2 + \frac{\lambda(\lambda+1)}{(1-\lambda)^2}\right)$$
$$- c^2\left(\varkappa^2 + \frac{1}{(1-\lambda)^2}\right) + 4P\varkappa,$$

kde a, b, c jsou strany a P obsah daného trojúhelníka.

Obdobně lze psáti i hodnoty stran $\overline{B_1C_1} = a_1$ a $\overline{C_1A_1} = b_1$. Vratme se k žádané podmínce nyní, dle níž jest

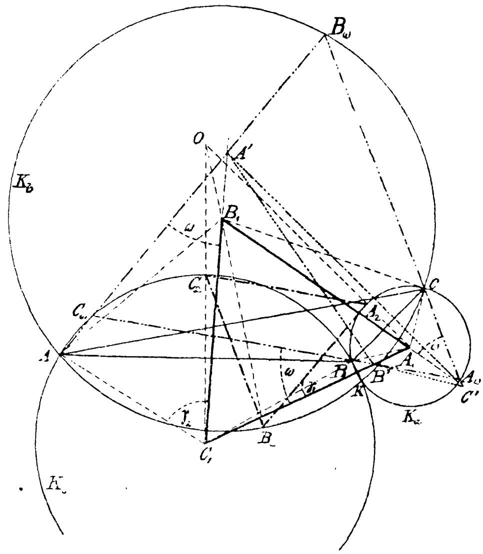
$$a_1^2 = c_1^2 \quad \text{a} \quad a_1^2 = b_1^2 .$$

Dosadíme-li patřičné hodnoty, nabudeme dvou rovnic, jež byvše upraveny, objeví se ve tvaru

$$\frac{\lambda+1}{1-\lambda} b^2 + a^2 \left(3x^2 + \frac{\lambda(\lambda+2)}{(1-\lambda)^2}\right) - c^2 \left(3x^2 + \frac{1+2\lambda}{(1-\lambda)^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\lambda+1}{1-\lambda} c^2 + b^2 \left(3x^2 + \frac{\lambda(\lambda+2)}{(1-\lambda)^2}\right) - a^2 \left(3x^2 + \frac{1+2\lambda}{(1-\lambda)^2}\right) = 0.$$

Totoť jsou tedy rovnice, jež slouží k řešení naší úlohy. Obsahujíce 2 neznámé, podávají zcela určitý počet řešení odpovídající rázu rovnic a nelze tedy sestrojováním podobných trojúhelníků nad stranami daného trojúhelníka snad získati nekonečný počet trojúhelníků rovnostranných.*)



Vlastní řešení obou rovnic provede se tím způsobem, že se vyloučí nejprve x^2, načež výslední rovnice po náležité úpravě přechází ve tvar

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

*) Vyjma ovšem případ zvláštní trojúhelníka rovnostranného; neboť je-li $a = b = c$, jsou obě rovnice identicky splněny.

a tedy

$$\lambda = \pm 1.$$

První kořen ovšem nevyhovuje, neboť dělící bod uniká do nekonečna. Naproti tomu druhý kořen je přijatelný a praví, že vrcholy hledaného rovnostranného trojúhelníka leží na přímkách kolmo půlících strany daného trojúhelníka, čili ony podobné trojúhelníky jsou rovnoramenné.

Dalším řešením vychází

$$\varkappa_{1,2} = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

to jest, ony rovnoramenné trujúhelníky mají vrcholový úhel 120^0 a lze je sestrojovati buď na vnější nebo na vnitřní stranu trojúhelníka původního.

Z provedeného řešení vyplývá tedy následující věta: *Sestrojíme-li nad strananami trojúhelníka co základnami na vnější nebo vnitřní stranu rovnoramenné trojúhelníky o úhlu 30^0 při základně, stanoví jich nově vzniklé vrcholy trojúhelník rovnostranný.*

Strana výsledního rovnostranného trojúhelníka $A_1B_1C_1$ resp. $A_2B_2C_2$ dá se určit na základě dříve použitého již Carnotova vzorce, jestliže za λ a $\varkappa$ dosadíme vypočtené kořeny a jest

$$s_{1,2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{6} \pm \frac{2}{\sqrt{3}} P}.$$

Plošný obsah

$$P_{1,2} = \frac{A\sqrt{3} \pm 12P}{24},$$

je-li $$a^2+b^2+c^2 = A.$$

Buďtež uvedeny ještě vzorce

$$P_1 + P_2 = \frac{A}{4\sqrt{3}},$$

a

$$P_1 - P_2 = P,$$

z nichž druhý praví, že rozdíl plošných obsahů obou rovnostranných trojúhelníků rovná se ploše trojúhelníka původního.

Dále jest

$$P_1 P_2 = \frac{A^2 - 48\,P^2}{192},$$

a

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{A + 4P\sqrt{3}}{A - 4P\sqrt{3}} = \frac{1 + \mu\sqrt{3}}{1 - \mu\sqrt{3}},$$

je-li $\frac{4P}{A} = \mu$. Toto μ je tangentou Brocardova úhlu v trojúhelníku*) a pohybuje se v mezích $0 \ldots \frac{1}{\sqrt{3}}$ a tedy poměr $\frac{P_1}{P_2}$ nabývá hodnot od 1 do ∞.

Rovnostranné trojúhelníky naznačeným způsobem sestrojené mají ku původnímu mnohé zajímavé vztahy, jež tuto uvedeme.

1. Trojúhelník $A_1B_1C_1$ resp. $A_2B_2C_2$ má s $\triangle\, ABC$ těžiště společné.

Vlastnost tato platí pro všechny trojúhelníky, jež byly odvozeny sestrojením podobných trojúhelníků nad stranami trojúhelníka daného. Její důkaz je podán v našem článku „Příspěvek k mnohoúhelníkům" roč. XXVII. tohoto časopisu.

2. Spojnice vrcholů rovnostranného trojúhelníka $A_1B_1C_1$ s protilehlými vrcholy $\triangle\, ABC$ protínají se v jediném bodě.

I tato věta platí obecněji a sice: Sestrojím-li nad stranami daného trojúhelníka libovolné, na vzájem podobné trojúhelníky rovnoramenné, stanoví jich vrcholy trojúhelník, jehož vrcholy byvše spojeny s protilehlými vrcholy trojúhelníka daného, dávají spojnice protínající se v jediném bodě.

Důkaz provede se snadno různým způsobem.

3. Vedeme-li vrcholy původního $\triangle\, ABC$ pořadem ku příslušným stranám rovnostranného $\triangle\, A_1B_1C_1$ (resp. $\triangle\, A_2B_2C_2$) přímky týž úhel ω se stranami svírající, při čemž směr rotace jest zachován, omezují tyto přímky rovnostranný trojúhelník $A_\omega B_\omega C_\omega$.

---

*) Viz článek „Brocardova kružnice trojúhelníka jako místo geometrické" v roč. XXIX. tohoto časopisu, str. 213.

Věta tato jest takřka samozřejma, neboť bodem A je vedena přímka AC_ω v úhlu ω ku straně B_1C_1, bodem B přímka BC_ω v témž úhlu ω ku straně A_1C_1 a musí tedy

$$\sphericalangle AC_\omega B = \sphericalangle B_1C_1A_1 = 60^0.$$

Totéž platí o ostatních úhlech a jest tedy $\triangle A_\omega C_\omega B_\omega$ rovnostranný.

4. Vrcholy tohoto rovnostranného trojúhelníka pohybují se při měnlivém ω po kružnicích K_a, K_b a K_c, opsaných ze středů A_1, B_1 a C_1 poloměry $\frac{a}{\sqrt{3}}$, $\frac{b}{\sqrt{3}}$ a $\frac{c}{\sqrt{3}}$. Tyto tři kružnice procházejí společným bodem K.

Konstantní úhel $AC_\omega B$ pohybuje se totiž tak, že jeho ramena procházejí stálými body B, A a musí tedy jeho vrchol C_ω opisovati kružnici. Poněvadž pak kružnice K_c oběma body A a B prochází a středový úhel $AC_1B = 2 \sphericalangle AC_\omega B$, musí se bod C_ω pohybovati po této kružnici K_c. Obdobně i druhé dva vrcholy A_ω, B_ω.

Že všechny tři kružnice procházejí jediným bodem, lze dokázati následovně. Buď K průsečík kružnic K_a a K_b. Pak jest $\sphericalangle BKC = 60^0$ a $\sphericalangle AKC = 60^0$ a tedy $AKB = 120_0$, musí tedy ležeti vrchol tohoto úhlu na kružnici K_c, která je geom. místem vrcholů úhlů 60^0 resp. 120^0vých a jest tedy průsečík K všem třem kružnicím společný.

Strana $\triangle A_\omega B_\omega C$ jest

$$s_\omega = \overline{AC_\omega} - \overline{AB_\omega}.$$

Jelikož však

$$\overline{AC_\omega} = \frac{c^2 + 3s^2 - b^2}{3s} \cos\omega + \frac{2bc \sin(\alpha + 60)}{3s} \sin\omega,$$

$$\overline{AB_\omega} = -\frac{3s^2 + b^2 - c^2}{3s} \cos\omega + \frac{2bc \sin(\alpha + 60)}{3s} \sin\omega,$$

obnáší

$$s_\omega = 2s \cos\omega.$$

Jest patrno, že při $\omega = 90^0$ přechází s_ω v nullu, to jest trojúhelník smrskuje se na bod K.

5. Střed rovnostranného $\triangle A_\omega B_\omega C_\omega$ pohybuje se po kružnici opsané druhému rovnostrannému $\triangle A_2 B_2 C_2$.

Přímka totiž, půlící úhel $A_\omega B_\omega C_\omega$, jehož vrchol pohybuje se po kružnici K_b, prochází stálým bodem, půlícím oblouk AC a to jest, jak zřejmo, vrchol B_2. Podobně přímka půlící úhel $B_\omega C_\omega A_\omega$ prochází stálým bodem C_2. Poněvadž obě půlící přímky procházejí stálými body, svírajíce konstantní úhel 120^0, musí vrchol tohoto pohybovati se po kružnici jdoucí body B_2, A_2. Přibéřeme-li v úvahu též třetí přímku půlící úhel $C_\omega A_\omega B_\omega$, snadno poznáme, že onou kružnicí je kružnice opsaná $\triangle A_2 B_2 C_2$, po níž se společný průsečík všech 3 úhly půlících přímek, střed trojúhelníka $A_\omega B_\omega C_\omega$, pohybuje.

6. Protínají-li příčky, vedené vrcholy A, B, C ku stranám $\triangle A_1 B_1 C_1$ v témž úhlu ω, strany tyto v bodech A', B', C', jest $\triangle A'B'C'$ podoben původnímu $\triangle ABC$.

Důkaz provede se následovně:

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{A'C_1}^2 + \overline{B'C_1}^2 - \overline{A'C_1} \,.\, \overline{B'C_1} = c'^2.$$

Dosadíme-li

$$\overline{A'C_1} = \frac{c}{\sqrt{3}} (\cos \gamma_2 + \sin \gamma_2 \,.\, \cot \omega),$$

$$\overline{B'C_1} = \frac{c}{\sqrt{3}} (\cos \gamma_1 + \sin \gamma_1 \,.\, \cot \omega),$$

hodnoty to získané z trojúhelníků $AA'C_1$ a $BB'C_1$, a uvážíme-li, že $\gamma_2 - \gamma_1 = 60^0$, obdržíme

$$c'^2 = \frac{c^2}{4 \sin^2 \omega},$$

čili

$$c' = \frac{c}{2 \sin \omega}.$$

Analogicky i pro ostatní strany:

$$a' = \frac{b}{2 \sin \omega} \quad \text{a} \quad b' = \frac{c}{2 \sin \omega}.$$

Jsou tedy strany $\triangle A'B'C'$ úměrny stranám $\triangle ABC$, a musí tedy oba trojúhelníky býti podobny. Poměr podobnosti jest $\frac{1}{2 \sin \omega}$. Pro $\omega = 90^0$ jest poměr podobnosti $\frac{1}{2}$.

Označíme-li φ úhel sevřený s odpovídajícími stranami obou trojúhelníků (ku př. c a c'), jest $\varphi + \omega = 90^0$, jak by bylo možno snadno dokázati.

Ve zvláštním případě, kdy $\omega = 90^0$, jest $\varphi = 0$, a strany $\triangle A'B'C'$ jsou rovnoběžny se stranami $\triangle ABC$, t. j. oba trojúhelníky jsou podobné a podobně položené. Středem podobnosti je bod K dříve uvedený.

Samo sebou se rozumí, že vlastnosti dokazované pro trojúhelník $A_1B_1C_1$ platí analogicky i pro $\triangle A_2B_2C_2$.

O systemech telegrafie bez drátu před Marconim.

Napsal

Dr. **Ferdinand Pietsch,**
professor v Kutné Hoře.

Není dne, abychom nečetli v denních listech o telegrafii bez drátu. Dovídáme se každodenně, že opět došla nějakého zdokonalení, nebo že s prospěchem zavedena byla na některých místech.

Jest to telegrafie Marconiho, jež svými úspěchy pozornost celého světa na sebe obrátila, tak že princip její jest nyní téměř každému laikovi znám.

Méně známy jsou však telegrafie bez drátu, jež předcházely telegrafii Marconiovu; příčina spočívá v tom, že se nedopracovaly na poli praktickém takových úspěchů, jako právě telegrafie Marconiho. Tyto telegrafie, o nichž v tomto pojednání chceme pohovořiti, založeny byly ovšem na principech jiných, nežli telegrafie Marconiho.

Celkem známy jsou ze starších dob tři druhy telegrafií