

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Gabriel Blažek

O diferenciálu povrchu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 1, 30--31

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123426>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1872

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Drobné zprávy.

O diferenciálu povrchu.

(Podává G. Blažek.)

Výrazy pro diferenciál povrchu, vyjádřené souřadnicemi pravouhlými a polárními, dají se snadně s jediného hlediště vyvinouti, upotřebí-li se známé poučky, že čtverec obsahu rovinné plochy rovná se součtu čtverců obsahu pravouhlých průmětů té plochy na tři kolmo na sobě stojící roviny.

Buďtež v pravouhlé soustavě souřadnic M' a M'' (ob. 15.) pravouhlé průměty bodu M v rovině xz na osy ox a oz , taktéž N' a N'' průměty bodu N v rovině yz na osy oy a oz ; pak máme podle poučky právě uvedené

$$\overline{MON^2} = \overline{M'ON'^2} + \overline{MON''^2} + \overline{M''ON''^2},$$

z čehož jde, položíme-li $MM' = p$, $OM' = p'$, $NN' = q$, $ON' = q'$,

$$4\overline{MON^2} = p'^2q'^2 + p'^2q^2 + p^2q'^2.$$

Sestrojíme-li rovnoběžník $MONP$, jehož průmětem do roviny xy jest obdélník $M'ON'P'$, pak jest patrně $MONP = 2MON$ a

$$MONP = \sqrt{p'^2q'^2 + p'^2q^2 + p^2q'^2}. \quad (1)$$

Abychom obdrželi k bodu $O(x, y, z)$ náležící diferenciál povrchu v souřadnicích pravouhlých, položme skrze bod O rovinu s osami x a y rovnoběžnou, udělme veličině x přírůstek $p' = dx$, veličině y přírůstek $q' = dy$ a sestrojme obdélník $M'ON'P'$ a na povrchu část $MONP$, jejíž průmětem právě jest $M'ON'P'$, (pro nekonečně malé rozměry můžeme ji považovati za rovinnou); nazveme-li ji dP , pak jest, poněvadž

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} dx, q = \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

podle (1)

$$dP = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (2)$$

Abychom však obdrželi diferenciál povrchu v souřadnicích polárních, položme skrze bod $O(r, \varphi, \omega)$ kouli, jejíž střed se

v pólu nachází, a sestrojme na jejím povrchu obdélník $M'ON'P'$; přibývá-li veličiny φ o $d\varphi$, opisuje poloměr r na povrchu naší koule oblouk $p' = rd\varphi$, mění-li se však ω o $d\omega$, opisuje r oblouk $q' = r \sin \varphi d\omega$; položíme-li nyní skrze pól a skrze strany obdélníku $M'ON'P'$ čtyry roviny vytínající na povrchu plochy opět část $MONP = dP$, najdeme, poněvadž

$$p = \frac{\partial r}{\partial \varphi} d\varphi, q = \frac{\partial r}{\partial \omega} d\omega,$$

podlé (1)

$$dP = r \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \sin^2 \varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \omega} \right)^2} d\varphi d\omega *).$$

O kuželi druhého stupně.

(Poučka od *Ed. Weyra.*)

Každá z tří hlavních rovin kužele druhého stupně protíná jej ve dvou hranách, jež uzavírají úhel φ ; jsou-li φ_1 , φ_2 a φ_3 hodnoty tohoto úhlu vzhledem k řečeným třem rovinám, platí o nich

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_3 \cos \varphi_1 + 1 = 0.$$

Důkaz. Zvolíme-li osy kužele za osy souřadnic x , y , z , jest rovnice jeho, jak známo,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0;$$

položíme-li tu

$$x = 0, \text{ bude } by^2 + cz^2 = 0,$$

$$y = 0, \text{ „ } ax^2 + cz^2 = 0,$$

$$z = 0, \text{ „ } ax^2 + by^2 = 0,$$

kteréžto rovnice představují řečené hrany průsečné.

*) Vzorec poslední byl poprvé podán *Eulerem*; jenž jej však zavedením nových proměnných ze vzorce (2) obdržel. Bezprostřední vyvinut uveřejnil *Grunert* v díle svém „Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare Coordinatensysteme“ p. 267 a v elegantnější formě *Unferdinger* v pojednání „Ableitung der Complinationsformel in Polarcoordinaten aus der Figur“ *Grunerts Arch.* T. 48 p. 106.

Odvozování zde podané vysvětluje geometrický význam každého členu pod znamením odmocniny a nedá se snadně stručnějším nahraditi.