Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Gabriel Blažek

O differenciálu povrchu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 1, 30–31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123426

Drobné zprávy.

O differenciálu povrchu.

(Podává *G. Blažek.*)

Výrazy pro differenciál povrchu, vyjádřené souřadnicemi pravoúhlými a polárními, dají se snadně s jediného hlediště vyvinouti, upotřebí-li se známé poučky, že čtverec obsahu rovinné plochy rovná se součtu čtverců obsahu pravoúhlých průmětů té plochy na tři kolmo na sobě stojící roviny.

Buďtež v pravoúhlé soustavě souřadnic M' a M'' (ob. 15.) pravoúhlé průměty bodu M v rovině xz na osy ox a oz, taktéž N' a N'' průměty bodu N v rovině yz na osy oy a oz; pak máme podle poučky právě uvedené

$$\overline{MON}^2 = \overline{M'ON'}^2 + \overline{MON''}^2 + \overline{M''ON}^2,$$

z čehož jde, položíme-li $MM' = p$, $OM' = p'$, $NN' = q$, $ON' = q'$,

$$4\overline{MON}^2 = p'^2q'^2 + p'^2q^2 + p^2q'^2.$$

Sestrojíme-li rovnoběžník $MONP$, jehož průmětem do roviny xy jest obdélník $M'ON'P'$, pak jest patrně $MONP = 2MON$ a

$$MONP = \sqrt{p'^2q'^2 + p'^2q^2 + p^2q'^2}. \qquad (1)$$

Abychom obdrželi k bodu $O(x, y, z)$ náležící differenciál povrchu v souřadnicích pravoúhlých, položme skrze bod O rovinu s osami x a y rovnoběžnou, udělme veličině x přírůstek $p' = dx$, veličině y přírůstek $q' = dy$ a sestrojme obdélník $M'ON'P'$ a na povrchu část $MONP$, jejíž průmětem právě jest $M'ON'P'$, (pro nekonečně malé rozměry můžeme ji považovati za rovinnou); nazveme-li ji dP, pak jest, poněvadž

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}dx, q = \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

podle (1)

$$dP = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \qquad (2)$$

Abychom však obdrželi differenciál povrchu v souřadnicích polárních, položme skrze bod O (r, ρ, ω) kouli, jejíž střed se v pólu nachází, a sestrojme na jejím povrchu obdélník $M'ON'P'$; přibývá-li veličiny ϱ o $d\varrho$, opisuje poloměr r na povrchu naší koule oblouk $p' = rd\varrho$, mění-li se však ω o $d\omega$, opisuje r oblouk $q' = r \sin \varrho\, d\omega$; položíme-li nyní skrze pól a skrze strany obdélníku $M'ON'P'$ čtyry roviny vytínající na povrchu plochy opět část $MONP = dP$, najdeme, poněvadž

$$p = \frac{\partial r}{\partial \varrho} d\varrho\,, q = \frac{\partial r}{\partial \varrho}\, d\omega\,,$$

podlé (1)

$$dP = r \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varrho}\right)^2\right] \sin^2 \varrho + \left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2} d\varrho d\omega \text{ *)}.$$

O kuželi druhého stupně.

(Poučka od *Ed. Weyra.*)

Každá z tří hlavních rovin kužele druhého stupně protíná jej ve dvou hranách, jež uzavírají úhel φ; jsou-li φ_1, φ_2 a φ_3 hodnoty tohoto úhlu vzhledem k řečeným třem rovinám, platí o nich

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_3 \cos \varphi_1 + 1 = 0.$$

Důkaz. Zvolíme-li osy kužele za osy souřadnic x, y, z, jest rovnice jeho, jak známo,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0\,;$$

položíme-li tu

$$\begin{aligned} x &= 0, \text{ bude } by^2 + cz^2 = 0, \\ y &= 0, \text{ „ } ax^2 + cz^2 = 0, \\ z &= 0, \text{ „ } ax^2 + by^2 = 0, \end{aligned}$$

kteréžto rovnice představují řečené hrany průsečné.

---

*) Vzorec poslední byl poprvé podán *Eulerem*, jenž jej však zavedením nových proměnných ze vzorce (2) obdržel. Bezprostředně vyvinut uveřejnil *Grunert* v díle svém „Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare Coordinatensysteme" p. 267 a v elegantnější formě *Unferdinger* v pojednání „Ableitung der Complanationsformel in Polarcoordinaten aus der Figur" Grunerts Arch. T. 48 p. 106.

Odvozování zde podané vysvětluje geometrický význam každého členu pod znamením odmocniny a nedá se snadně stručnějším nahraditi.