Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Stanovení mnohonásobného integrálu, jenž vyjadřuje polydimensionální obsah oboru o n rozměrech omezeného danými $n+1$ útvary prvního stupně, a některých integrálů obecnějších

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 1, 1--5

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123488`

Stanovení mnohonásobného integrálu, jenž vyjadřuje polydimensionální obsah oboru o n rozměrech omezeného danými $n+1$ útvary prvního stupně, a některých integrálů obecnějších.

Podává **M. Lerch** v Brně.

V prostoru o n rozměrech $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ dáno buď $n+1$ útvarů prvního stupně $P_0 = 0$, $P_1 = 0, \ldots P_n = 0$, kde značí

$$P_\nu \equiv a_{\nu 0} + a_{\nu 1} x_1 + a_{\nu 2} x_2 + \ldots + a_{\nu n} x_n;$$

při tom změnou znamení u P_ν lze docíliti toho, že obor Ω definovaný podmínkami

$$(\Omega) \qquad P_0 \geqq 0,\ P_1 \geqq 0, \ldots P_n \geqq 0$$

jest celý v konečnu, a mimo to lze případným přemístěním indexů docíliti toho, že determinant

$$A = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \ldots a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

je kladný. Obě tyto podmínky předpokládáme splněny, i chceme stanoviti n-násobný integrál

$$J = \int\int \ldots \int P_0^{s_0 - 1} P_1^{s_1 - 1} \ldots P_n^{s_n - 1} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

vzatý dle oboru integračního Ω, při čemž $s_0, s_1, \ldots s_n$ jsou konstanty s kladnými částmi reálnými.

Integrál náš přetvoříme substitucí

$$\frac{P_1}{P_0} = z_1,\ \frac{P_2}{P_0} = z_2, \ldots \frac{P_n}{P_0} = z_n.$$

Znamenáme-li

$$\Delta = \frac{\partial (x_1\ x_2 \ldots x_n)}{\partial (z_1\ z_2 \ldots z_n)}$$

funkcionální determinant, bude reciproký determinant

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\partial (z_1\ z_2 \ldots z_n)}{\partial (x_1\ x_2 \ldots x_n)}$$

$$= \frac{1}{P_0^{2n}} \begin{vmatrix} P_0 a_{11} - P_1 a_{01}, & P_0 a_{12} - P_1 a_{02}, & \ldots & P_0 a_{1n} - P_1 a_{0n} \\ P_0 a_{21} - P_2 a_{01}, & P_0 a_{22} - P_2 a_{02}, & \ldots & P_0 a_{2n} - P_2 a_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_0 a_{n1} - P_n a_{01}, & P_0 a_{n2} - P_n a_{02}, & \ldots & P_0 a_{nn} - P_n a_{0n} \end{vmatrix}$$

možno rozšířiti na determinant stupně $n + 1$, a sice bude

$$\frac{P_0^{2n+1}}{\Delta} = \begin{vmatrix} P_0, & 0, & 0 & 0 & 0 \\ P_1, & P_0 a_{11} - P_1 a_{01}, & \ldots P_0 a_{1k} - P_1 a_{0k}, & \ldots & P_0 a_{1n} - P_1 a_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_\nu, & P_0 a_{\nu 1} - P_\nu a_{01}, & \ldots P_0 a_{\nu k} - P_\nu a_{0k}, & \ldots & P_0 a_{\nu n} - P_\nu a_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

V tomto determinantu přičteme násobky prvního sloupce k ostatním, a sice ke sloupci $k + 1$ první sloupec násobený a_{0k}:

$$\frac{P_0^{2n+1}}{\Delta} = \begin{vmatrix} P_0, & a_{01} P_0, & \ldots & a_{0k} P_0, & \ldots & a_{0n} P_0 \\ P_1, & a_{11} P_0, & \ldots & a_{1k} P_0, & \ldots & a_{1n} P_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_\nu, & a_{\nu 1} P_0, & \ldots & a_{\nu k} P_0, & \ldots & a_{\nu n} P_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} P_0, & a_{01}, & a_{02}, & \ldots & a_{0n} \\ P_1, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ P_2, & a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_n, & a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} P_0^n.$$

Očividně jest

$$\begin{vmatrix} P_0 & a_{01} & a_{02} & \ldots & a_{0n} \\ P_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ P_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_n & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{21} & a_{02} & \ldots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = A \quad (1)$$

a tedy zní předchozí výsledek

$$\frac{P_0^{2n+1}}{\Delta} = AP_0^n$$

čili

$$\Delta = \frac{P_0^{n+1}}{A} = \frac{\partial(x_1\ x_2\ \dots\ x_n)}{\partial(z_1\ z_2\ \dots\ z_n)}. \tag{2}$$

Transformovaný integrál bude tedy zníti

$$J = \int\int \dots \int P_0^s z_1^{s_1-1} z_2^{s_2-1} \dots z_n^{s_n-1} \frac{dz_1\ dz_2\ \dots\ dz_n}{A},$$

kde $s = s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_n$, a veškery integrace jdou od nully do nekonečna.

Nahradíme-li v rovnici (1) výrazy P_ν hodnotami $P_0 z_\nu$, obdržíme

$$P_0 \begin{vmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} \dots a_{0n} \\ z_1 & a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ z_2 & a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_n & a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = A,$$

a znamenáme-li $A_{\nu 0}$ subdeterminanty prvního slupce, t. j.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} \dots a_{0n} \\ z_1 & a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ z_2 & a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_n & a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\nu=0}^{n} A_{\nu 0}\, z_\nu,\ z_0 = 1, \tag{3}$$

bude

$$P_0 = \frac{A}{\sum_0^n A_{\nu 0}\, z_\nu}. \tag{4}$$

Z této rovnice plyne, že pro veškera $z_\nu \geqq 0$ jest $\sum_0^n A_{\nu 0}\, z_\nu \geqq 0$ a to vyžaduje, aby veškera $A_{\nu 0}$ byla kladná; neboť kdyby některá $A_{\nu 0}$ byla záporná, mohli bychom zvoliti za příslušná z_ν hodnoty kladné, za ostatní klásti nullu, a pak by výraz P_0 byl záporný pro body uvnitř oboru Ω, což vyloučeno; bude tedy

$$A_{\nu 0} > 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots n). \tag{4'}$$

Pomocí výrazu (4) přejde poslední tvar integrálu J na

$$J = A^{s-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{z_1^{s_1-1} z_2^{s_2-1} \dots z_n^{s_n-1}\, dz_1\, dz_2 \dots dz_n}{(A_{00} + A_{10} z_1 + A_{20} z_2 + \dots + A_{n0} z_n)^s}. \tag{5}$$

Tu užijeme známého vzorce

$$\int_0^\infty e^{-ux} x^{s-1}\, dx = \frac{\Gamma(s)}{u^s}$$

pro $u = \sum\limits_0^n A_{\nu 0} z_\nu$, a obdržíme na místo (5) po obrácení integračního pořadu:

$$\frac{\Gamma(s)}{A^{s-1}} J = \int_0^\infty x^{s-1}\, dx \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-x \Sigma A_{\nu 0} z_\nu} z_1^{s_1-1} \dots z_n^{s_n-1}\, dz_1 \dots dz_n$$

$$= \int_0^\infty e^{-A_{00} x} x^{s-1}\, dx \int_0^\infty e^{-A_{10} x z_1} z_1^{s_1-1}\, dz_1$$

$$\cdot \int_0^\infty e^{-A_{20} x z_2} z_2^{s_2-1}\, dz_2 \dots \int_0^\infty e^{-A_{n0} x z_n} z_n^{s_n-1}\, dz_n$$

$$= \int_0^\infty e^{-A_{00} x} x^{s-s_1-s_2-\dots-s_n-1}\, dx \,.\, \frac{\Gamma(s_1)\, \Gamma(s_2) \dots \Gamma(s_n)}{A_{10}^{s_1} A_{20}^{s_2} \dots A_{n0}^{s_n}}.$$

Ježto $s - s_1 - s_2 - \dots - s_n = s_0$, má pravá strana hodnotu

$$\frac{\Gamma(s_0)\, \Gamma(s_1)\, \Gamma(s_2) \dots \Gamma(s_n)}{A_{00}^{s_0} A_{10}^{s_1} A_{20}^{s_2} \dots A_{n0}^{s_n}}$$

a tedy máme vzorec výslední

$$\int \int \dots \int P_0^{s_0-1} P_1^{s_1-1} \dots P_n^{s_n-1}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

$$= \frac{\Gamma(s_0)\, \Gamma(s_1) \dots \Gamma(s_n)}{\Gamma(s_0 + s_1 + \dots + s_n)} \, \frac{A^{s_0+s_1+\dots+s_n-1}}{A_{00}^{s_0} A_{10}^{s_1} \dots A_{n0}^{s_n}}. \tag{I}$$

Integrační podmínky znějí:

$$P_\nu \equiv a_{\nu 0} + a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \ldots + a_{\nu n}x_n \geqq 0 \ (\nu = 0, 1, 2, \ldots n),$$

i má jimi stanovený obor býti konečný; A značí determinant koefficientů a $A_{\nu 0}$ jsou subdeterminanty jeho prvního sloupce.

Jako vedlejší výsledek poznamenejme, že, je-li obor definovaný nerovnostmi

$$P_0 \geqq 0, \ P_1 \geqq 0, \ldots P_n \geqq 0$$

konečný, a je-li při tom determinant $|a_{\mu\nu}|$ $(\mu, \nu = 0, 1, \ldots n)$ kladný, budou též subdeterminanty $A_{\nu 0}$ jeho prvního sloupce veličiny kladné.

Zvolíme-li $s_0 = s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 1$, přejde integrál (I) na

$$\int\int \ldots \int dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n,$$

což jest polydimensionální obsah oboru Ω, a výsledek zní

$$\Omega = \frac{1}{n!} \frac{A^n}{A_{00} A_{10} A_{20} \ldots A_{n0}}. \tag{II}$$

Pro $n = 2$ máme odtud známý vzorec pro plochu trojúhelníka, jehož strany mají v pravoúhlé soustavě souřadnic rovnice

$$P_0 \equiv a_{00} + a_{01}x + a_{02}y = 0,$$
$$P_1 \equiv a_{10} + a_{11}x + a_{12}y = 0,$$
$$P_2 \equiv a_{20} + a_{21}x + a_{22}y = 0,$$

při čemž

$$A = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Pro $n = 3$ podává (II) krychlový obsah čtyřstěnu, jehož stěny mají v pravoúhlé soustavě souřadnic rovnice

$$P_\nu \equiv a_{\nu 0} + a_{\nu 1}x + a_{\nu 2}y + a_{\nu 3}z = 0 \ (\nu = 0, 1, 2, 3).$$