Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

V. Lenz
O některých hodnotách důchodů pro více životů

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 213--214

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123593

Versicherungen, bei welchen die Versicherungssummen Funktionen der Prämienreserve sind.

Der Verf. möchte über diese noch wenig verbreitete Methode berichten und ihre Anwendungsmöglichkeiten an Hand folgender, für die Praxis wichtigen Probleme aufzeigen:

1. Die Zuschlagsprämien für anormale Risiken.
2. Die Näherungsmethoden bei der Prämienberechnung in der Invalidenversicherung.
3. Die Bemessung der Rückkaufswerte.
4. Die Berechnung der Prämien bei Versicherungen auf zwei Leben.
5. Die Steffensen'schen Ungleichungen.
6. Die Kontributionsformeln in der Theorie der Gewinnbeteiligung.
7. Die Näherungsmethoden bei Änderungen des Zinsfußes.

O některých hodnotách důchodů pro více životů.

Dr. *V. Lenz*, Praha.

Hodnota jednotkového důchodu pro skupinu osob $x, y, z, \ldots$ za předpokladu, že dekrementní tabulka žijících osob jest spojitou funkcí věku a tudíž má v celém oboru derivace a jest schopna integrace a rovněž intensita úmrtnosti a intensita úrokovací δ jsou spojitými funkcemi času, jest vyjádřena výrazem

$$\bar{a}\,(x, y, z, \ldots) = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (\Sigma\mu_{x+u} + \delta)\,\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}t.$$

Hodnoty důchodů, jichž výše jest závislá na čase t a na věku po případě na životě osob dané skupiny, možno vyjádřiti výrazem

$$\bar{a}\,(x, y, z, \ldots, \varphi) = \int_0^\infty \varphi\,(x, y, z, \ldots, t)\, e^{-\int_0^t (\Sigma\mu_{x+u} + \delta)\,\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}t, \qquad (1)$$

při čemž výplatní funkce $\varphi(x, y, z, \ldots, t)$ jest spojitou funkcí času t a stanoví zákon výplaty důchodu.

Pomocí tohoto vyjádření možno snadno ukázati, že vztahy mezi hodnotami důchodů pro více životů odvozené na cestě elementární platí také pro hodnoty důchodů spojitých.

Pro skupinu tří osob (x, y, z) hodnota důchodu, který jest vyplácen dvojici (y, z) pokud jsou obě tyto osoby na živu po smrti osoby (x), jest

$$\bar{a}_{x|yz} = \int_0^\infty \mu_{x+t}\bar{a}_{y+t:z+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+u}+\mu_{y+u}+\mu_{z+u}+\delta)\,du}\, dt.$$

Tuto hodnotu možno psáti

$$\bar{a}_{x|yz} = \int_0^\infty (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \mu_{z+t} + \delta)\, \bar{a}_{y+t:z+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+u}+\mu_{y+u}+\mu_{z+u}+\delta)\,du}\, dt +$$

$$- \int_0^\infty (\mu_{y+t} + \mu_{z+t} + \delta)\, a_{y+t:z+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+u}+\mu_{y+u}+\mu_{z+u}+\delta)\,du}\, dt.$$

Hodnotu menšence stanovíme integrací per partes

$$- \left[\bar{a}_{y+t:z+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+u}+\mu_{y+u}+\mu_{z+u}+\delta)\,du} \right]_0^\infty +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-\int_0^t (\mu_{x+u}+\mu_{y+u}+\mu_{z+u}+\delta)\,du}\, d\bar{a}_{y+t:z+t}$$

a po dosazení dostáváme

$$\bar{a}_{x|yz} = \bar{a}_{yz} - \int_0^\infty \left[(\mu_{y+t} + \mu_{z+t} + \delta)\, \bar{a}_{y+t:z+t} - \frac{d\bar{a}_{y+t:z+t}}{dt} \right] \times$$

$$\times\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+u}+\mu_{y+u}+\mu_{z+u}+\delta)\,du}\, dt.$$

Z diferenciální rovnice pro dva životy jest patrno, že hodnota výrazu v hranaté závorce jest rovna 1 a tudíž

$$\bar{a}_{x|yz} = \bar{a}_{yz} - \bar{a}_{xyz}.$$

Podobné úvahy lze provésti velice snadno pro více životů.

Na vyjádření (1) možno také s výhodou použíti první věty o střední hodnotě integrálu

$$\int_a^b \varphi(t)\, \psi(t)\, dt = \varphi(n) \int_a^b \psi(t)\, dt,$$

neboť pro vhodně volené n jest

$$\bar{a}\,(x, y, z, \ldots, \varphi) = \varphi(x, y, z, \ldots, n)\, \bar{a}\,(x, y, z, \ldots).$$