Čeněk Jarolímek

Kterak sestrojuje deskriptivní geometrie průsečíky přímek s křivkami stupně druhého na základě daných os

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 4 (1875), No. 6, 256--262

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123672`

# Kterak sestrojuje deskriptivní geometrie průsečíky přímek s křivkami stupně druhého na základě daných os.

Napsal

prof. Čeněk Jarolímek.

## *a)* Průsečíky přímky s parabolou.

Budiž parabola $P_1$ dána vrcholem svým $v_1$ a ohniskem $o$ (obr. 18.). Zobrazme kružnici křivosti $(K_1)$ paraboly ve vrcholu $v_1$, jejíž poloměr rovná se parametru paraboly $p$

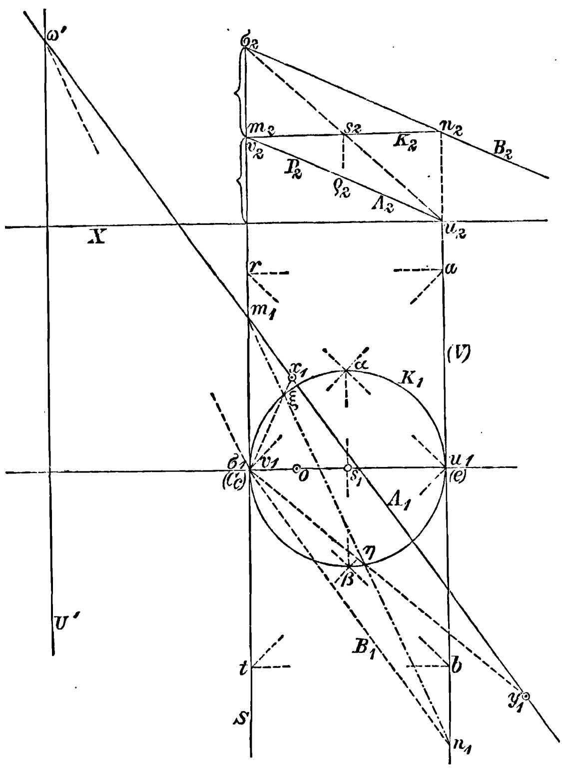
$$\left(o s_1 = v_1 o = \frac{p}{2}\right)$$

a tečny její $S$, $V$ v bodech osy paraboly $v_1$ a $u_1$.

*Máme-li sestrojiti průsečíky paraboly $P_1$ s danou přímkou $A_1$, učiňme $v_1 n_1 \parallel A_1$ a spojme $m_1 n_1$, $v_1 \xi$, $v_1 \eta$; paprsky $v_1 \xi$ a $v_1 \eta$ protínají přímku $A_1$ v žádaných bodech $x_1$ a $y_1$.* (Bod $m_1$ jest průsečíkem přímek $A_1$ a $S$, $n_1$ průsečíkem přímek $m_1 n_1 = B_1$ a $V$, $\xi$ a $\eta$ průsečíky čar $m_1 n_1$ a $K_1$.)

*Důkaz 1.* Považujme rovinu paraboly dané za průmětnu první $\pi$ a položme průmětnu druhou $\nu$ rovnoběžně k ose paraboly (průmětná osa $X \parallel v_1 o$), předpokládajíce promítání pravoúhlé; budiž $K_1$ prvním průmětem kružnice $K \parallel \pi$ $(K_2 \parallel X)$ v jakékoli od $\pi$ vzdálenosti, a tato kružnice řídící čarou plochy kuželové, jejíž střed $\sigma$ dvojnásob větší vzdálenost od $\pi$ a průmět svůj $\sigma_1$ ve vrcholu $v_1$ dané paraboly má, takže obrysová přímka $\sigma v$, jež kružnici $K$ v bodě $v$ seče, k průmětně $\pi$ kolmá jest. Položíme-li stopou $u$ přímky středné $\sigma s$ a bodem $v$ rovinu $\varrho \perp \nu$, bude tato patrně s druhou obrysovou přímkou rovnoběžná $(v_2 u_2 \parallel \sigma_2 n_2)$ a tudíž plochu kuželovou v parabole $P$ protínati, jejíž vrchol s bodem $v$ se sjednocuje. Průsečíky $a$ a $b$ této paraboly s průmětnou $\pi$ obdržíme v první stopě $V \perp X$ roviny $\varrho$, protneme li ji stopou plochy kuželové, kružnicí to opsanou ze středu $u_1$ poloměrem $u_1 v_1 = u_1 a = u_1 b = u_1 v_1$. Tytéž body $a$ a $b$ náleží ale také parabole dané; ana úsečka $u_1 v_1 = 2 . v_1 s_1 = 2p$, musí i pořadnice bodu v kolmici $V = u_1 v_1$

Obr. 18.




(ježto dle vrcholové rovnice paraboly $y^2 = 2px$ pro $x = 2p$ také $y = 2p$). Z toho jde, že první průmět parabolického průseku $P$ s parabolou danou $P_1$ se sjednocuje, poněvadž obě paraboly vrcholy a body $a$, $b$ k ose souměrné společné mají.

Považujeme-li nyní danou přímku $A_1$ za první průmět přímky $A$ v rovině $\varrho$ ležící ($\varrho_2 = A_2$), budou průsečíky $x_1$ a $y_1$ čar $A_1$ a $P_1$ prvními průměty průsečíků přímky $A$ s parabolou $P$ čili s plochou kuželovou. Body tyto sestrojíme spůsobem známým: veďme středem plochy $\sigma$ přímku $B // A$ ($\sigma_1 n_1 = B_1 // A_1$), zobrazme stopy $m$, $n$ přímek $A$, $B$ a stopu $mn$ roviny ($AB$) na rovině kružnice $K$; stopa $mn$ seče kružnici $K$ v bodech $\xi$ a $\eta$, rovina ($AB$) plochu kuželovou v povrchových přímkách $\sigma\xi$ a $\sigma\eta$, a tyto opět protínají přímku $A$ v žádaných bodech $x$ a $y$.

*Důkaz 2.* Danou parabolu $P_1$ možno také považovati za centrálný průmět kružnice $K$, která leží v rovině $SU$ ($S$ stopa roviny na průmětně, $U$ úběžná přímka roviny a $U'$ centralný průmět její č. úběžnice), dotýkajíc se v bodě $v_1$ stopy $S$ a v bodě $e$ průsečnice $V$ roviny $SU$ s rovinou střednou (položenou středem promítání $C$ rovnoběžně s průmětnou). Střed kollinearný $(C_c)$ (střed $C$ sklopený kol úběžnice $U'$ do průmětny) nachází se v dotyčném bodu $v_1$; kružnice $K$ sklopená do průmětny kol stopy $S$ sjednotí se s $K_1$, průsečnice $V$ sklopena do polohy $(V)$ (vzdál. $SU'$ = vzdál. $SV$), bod $e$ do polohy $(e)$. Poněvadž průmět bodu $e$, v němž kružnice $K$ roviny středné se dotýká, úběžný jest, bude centrálným průmětem kružnice $K$ parabola; průměty tětiv rovnoběžných se stopou $S$ budou tolikéž s ní rovnoběžné a přímkou $v_1 u_1$ rozpůlené, pročež bude $v_1 u_1$ osou, bod $v_1$ vrcholem parabolického průmětu. Centrálným průmětem průměru $\alpha\beta$ jest tětiva paraboly $ab$, obrazy $a$, $b$ bodů $\alpha$, $\beta$ jsou průsečíky paprsků $(C_c)\alpha$, $(C_c)\beta$ s obrazy $ra \parallel tb \perp S$ přímek $re$ a $te$, a leží v přímce $(V)$; poněvadž pak

$$au_1 = bu_1 = v_1 u_1 = 2p,$$

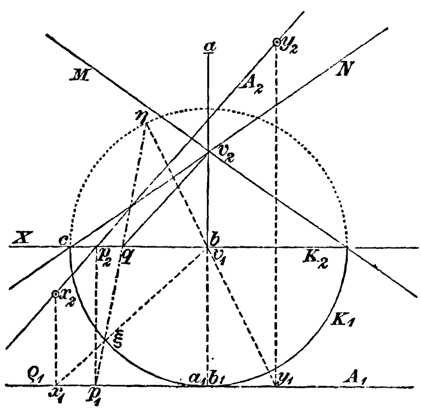
sjednocují se centrálný průmět kružnice $K$ a parabola daná, majíce vrchol, osu a body $a$, $b$ společné.

Považujeme-li danou přímku $A_1$ za centrálný průmět přímky $A$ ležící v rovině $SU$, budou průsečíky přímky $A_1$ s parabolou $P_1$ průměty průsečíků přímky $A$ s kružnicí $K$. Abychom tyto průsečíky zobrazili, sklopme kružnici $K$ i přímku $A$ kol stopy $S$ do průmětny; $K$ přijde do polohy $K_1$, $A$ do polohy $m_1 n_1$, učiníme-li $(C_c) n_1 \parallel A_1$ a spojíme-li $m_1 n_1$ ($m_1$ stopa, $\omega'$ úběžník přímky $A$, $(\omega' C_c)$ běh sklopené přímky a $m_1 n_1 \parallel (C_c)\omega'$). — $\xi$ a $\eta$ jsou sklopené průsečíky čar $A$ a $K$; centrálné průměty jejich $x_1$ a $y_1$ obdržíme v průsečících přímky $A_1$ s paprsky $(C_c)\xi$ a $(C_c)\eta$.

### b) Průsečíky přímky s hyperbolou.

*Spůsob 1.* Buď dána hyperbola realnou osou svou $ab$ (obr. 19.) a asymptotami $M$, $N$. Učiňme $bc \perp ab$, opišme poloměrem $bc$ z vrcholu $b$ kružnici $K_1$ a zobrazme tečnu její $\varrho_1 \parallel bc$.

Obr. 19.



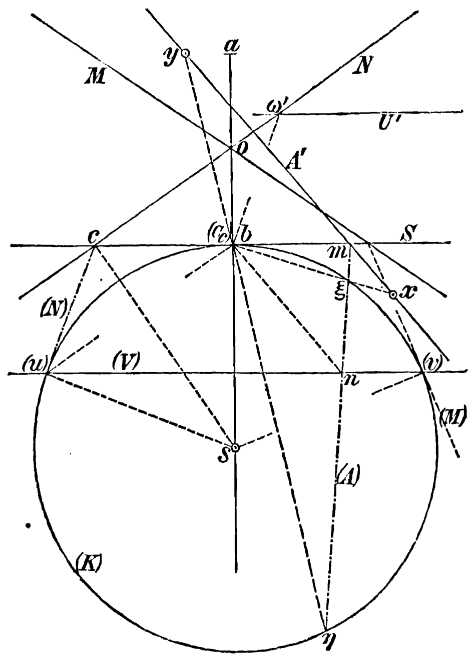

*Abychom sestrojili průsečíky $x_2$ a $y_2$ hyperboly dané s kteroukoli přímkou $A_2$, učiňme $v_2q \parallel A_2$, $p_2p_1 \parallel ab$, načež spojme $p_1q$, $v_1\xi$, $\eta v_1$; přímky $x_1x_2 \parallel y_1y_2 \perp \varrho_1$ protínají přímku danou v bodech žádaných.* (Body $\xi$ a $\eta$ jsou průsečíky přímky $p_1q$ s kružnicí $K_1$, $x_1$ a $y_1$ průsečíky paprsků $v_1\xi$ a $\eta v_1$ s tečnou $\varrho_1$).

*Důkaz.* Rovina dané hyperboly budiž průmětnou druhou $v$, rovina k ose $ab$ vrcholem $b$ kolmo položená průmětnou první $\pi(bc = X)$ a promítání tudíž orthogonálné. Asymptoty $M$ a $N$ buďtež obrysové přímky kuželové plochy točné, $ab$ osou, bod $v$ středem jejím a kružnice $K$ stopou její v průmětně první. Hyperbola daná jest pak druhým průmětem průseku této plochy kuželové s rovinou $\varrho \parallel v$, jejíž stopa $\varrho_1 \parallel X$ jest tečnou kružnice $K_1$.

Danou přímku $A_2$ beřme za druhý průmět přímky $A$ v rovině $\varrho\,(\varrho_1 = A_1)$; průsečíky přímky $A_2$ s danou hyperbolou budou druhými průměty průsečíků $x$ a $y$ přímky $A$ s hyperbolickým průsekem, tudíž i s plochou kuželovou. Průsečíky tyto zobrazují se spůsobem známým; přímkou $A$ a přímkou $vq \parallel A$ jest stanovena rovina protínající plochu kuželovou v přímkách $\xi v$ a $\eta v$, jichž stopy $\xi$ a $\eta$ obdržíme v průsečících stopy $pq$ roviny $(Av)$ se stopou $K$ plochy kuželové; průměty $v_1\xi$ a $v_1\eta$ protínají $A_1$ v $x_1$ a $y_1$, načež zbývá jen zobraziti průměty druhé pomocí $x_1x_2 \perp X$, $y_1y_2 \perp X$.

*Spůsob 2.* Hyperbola jest dána asymptotami $M$, $N$ (obr. 20.) a realnou osou $ab$; učiňme $bc \perp ab$, $cs \perp N$, opišme ze středu

Obr. 20.




*s* poloměrem *sb* kružnici (*K*) (kružnice křivosti ve vrcholu hyperboly *b*), veďme tečnu *c*(*u*) a dotyčným bodem přímku (*V*) // *bc*.

***Máme-li sestrojiti průsečíky x a y přímky A' s danou hyperbolou, učiňme bn // A' a spojme mn, bξ, bη; paprsky bξ a ηb protínají přímku A' v bodech x a y.*** [Bod *m* jest průsečíkem přímek *A'* a *cb*, *n* průsečíkem přímek *bn* a (*V*), *ξ* a *η* průsečíky čar *mn* a (*K*).]

***Důkaz.*** Především lze dokázati, že hyperbola daná jest centrálným průmětem kružnice *K*, která leží v rovině *SU* [*bc* = *S*, vzdál. *SU'* = vzdál. *S*(*V*)], stopy *S* v bodě *b* se dotýká, a sklopena jest kol stopy *S* v průmětnu do polohy (*K*), při čemž předpokládáme střed kollinearný $(C_c)$ v bodě *b*. *V* jest průsečnice roviny *SU* s rovinou střednou; průsečíky její *u* a *v* s kružnicí *K* mají průměty úběžné, pročež průmět kružnice této hyperbolický býti musí. Průměty tečen kružnice v bodech *u* a *v* jsou asymptotami hyperboly; úběžník *ω'* asymptoty *N* nachází se v průsečíku úběžnice *U'* s paprskem $(C_c)\,\omega'$ // (*N*);

poněvadž $b\omega' = (u)c$, bude $c\omega' \parallel (u)b \perp cs$, tudíž i $c\omega' \perp cs$, a ješto dle konstrukce i $N \perp cs$, má centrálný průmět kružnice $K$ s hyperbolou danou nejen vrchol $b$ společný, alebrž i asymtoty, t. j. obě křivky sjednocují se.

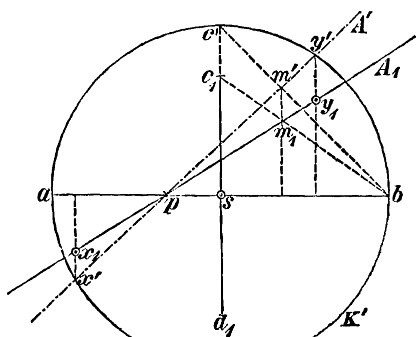
Danou přímku $A'$ považujme za centrálný průmět přímky $A$ v rovině $SU$; průsečíky přímky $A'$ s hyperbolou danou budou průměty průsečíků přímky $A$ s kružnicí $K$. Sklopme přímku $A$ kol stopy $S$ v průmětnu do polohy $mn = (A)$ [$(C_c)n \parallel A'$, srovnej s úlohou *a)* důkaz 2.]; body $\xi$ a $\eta$ jsou sklopené průsečíky přímky $A$ s kružnicí $K$ a centrálné průměty jejich $x$ a $y$ v průsečících paprsků $(C_c)\xi$ a $(C_c)\eta$ s $A'$.

### c) Průsečíky přímky s ellipsou.

Ellipsa $E$ budiž dána osami $ab$ a $c_1 d_1$ (obr. 21.); opišme nad velkou osou $ab$ kružnici $K'$ a spojme $c_1 b$, $c'b$.

*Abychom sestrojili průsečíky* $x_1$ *a* $y_1$ *přímky* $A_1$ *s danou ellipsou, učiňme* $m_1 m' \perp ab$, *spojme* $pm' = A'$ *a veďme* $x'x_1 \parallel y'y_1 \perp ab$.

Obr. 21.




(Body $p$ a $m_1$ jsou průsečíky přímky $A_1$ s $ab$ a $c_1 b$, $x'$ a $y'$ průsečíky přímky $pm' = A'$ s kružnicí $K'$).

*Důkaz.* Ellipsa daná jest orthogonálným průmětem kružnice $K$, jejíž průměr $ab$ s velkou osou ellipsy se sjednocuje, a jejíž rovina o takový úhel $\alpha$ od roviny ellipsy co průmětny odchýlena jest, že průmět průměru $cd \perp ab$ s malou osou ellipsy $c_1 d_1$ splývá; patrně jest $\cos\alpha = \frac{c_1 s}{cs} = \frac{c_1 s}{as}$.

Daná přímka $A_1$ budiž orthogonálným průmětem přímky $A$ v rovině kružnice $K$ ležící; průsečíky přímky $A_1$ s ellipsou budou pak průměty průsečíků $x$, $y$ čar $A$ a $K$. Sklopíme-li útvary $A$ i $K$ do roviny ellipsy kol průměru $ab$, sjednotí se $K$ s $K'$; bod $p$ na přímce $A$ jest stálý, tětiva $bc$ přijde do polohy $bc'$, průsečík $m$ přímek $A$ a $bc$ do polohy $m'$ a přímka $A$ tedy do polohy $pm' = A'$. Abychom posléze otočili průsečíky $x'$ a $y'$ čar $A'$ a $K'$ do přímky $A$ kol osy $ab$ zpět, učiňme $x'x_1 \perp ab$, $y'y_1 \perp ab$; body $x_1$ a $y_1$ jsou průměty průsečíků čar $A$ a $K$, tudíž body žádanými. Přímky $m_1 m'$, $y' y_1$, $x' x_1$ jsou průměty kruhových oblouků, jež body $m$, $y$, $x$ při otáčení svém kol osy $ab$ vytvořují.

*Úloha 1.* Řešiti úlohu *c)* dle 2. spůsobu úloh *a)* a *b)*, t. danou ellipsu považovati za centrálný průmět kružnice $K$ v rovině $SU$, která sklopena byvši kol stopy $S$ (tečny ellipsy ve vrcholu) do průmětny, s kružnicí křivosti ve vrcholu ellipsy se sjednocuje; kterak ustanoví se tu šířka pásu $SU'$?

*Úloha 2.* Řešiti veškeré úlohy o tečnách křivek stupně druhého na základě daných os pomocí týchž centrálných průmětů kružnic.

---

# O pohybování těles vržených.

Sestavil

Dr. Jos. R. Vaňaus.

Jest obyčejem zákony o pohybování těles vržených rozvrhovati dle rozličných směrů vrhu a jednati o vrhu vodorovném, svisném a šikmém zvláště, čímž tato nauka pozbývá poněkud své vnitřní souvislosti, kterouž by jinak k dokonalejšímu porozumění těch zákonů valně přispěti mohla.

Také spůsob pojednání nedovede mnohdy mysl upoutati v míře, zajímavosti toho úkazu přiměřené. Účelem následujících řádek jest tedy zákony o pohybování těles vržených v prostoru bez překážek podati vzorcem přesnějším i obecnějším, z něhož by všechny zvláštní případy snadno odvoditi se daly.