

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Charles Hermite

Sur une intégrale définie. Extrait d'une lettre à M. Éd. Weyr

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 5, 273--274

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123707>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1894

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Sur une intégrale définie,

par M. Ch. Hermite.

(Extrait d'une lettre à M. Ed. Weyr à Prague.)

Soit $f(x)$ une fonction rationnelle sans partie entière égale à l'unité pour $x = 0$ et qui reste constamment positive lorsque la variable croît à partir de zéro jusqu' à l'infini. Je vais montrer qu'on peut obtenir l'intégrale suivante,

$$J = \int_0^{\infty} (f(x) - e^{-ax}) dx$$

où a désigne une quantité positive, au moyen de la constante d'Euler. Cette constante étant définie par l'égalité,

$$C = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x} \right) \frac{dx}{x}$$

je remplace x par ax , ce qui donne,

$$C = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+ax} - e^{-ax} \right) \frac{dx}{x}.$$

Nous avons par conséquent,

$$J - C = \int_0^{\infty} \left(f(x) - \frac{1}{1+ax} \right) \frac{dx}{x}$$

où le second membre est l'intégrale d'une fonction rationnelle.

Soit en particulier,

$$f(x) = \frac{A}{x+\alpha} + \frac{B}{x+\beta} + \dots + \frac{L}{x+\lambda},$$

$\alpha, \beta, \dots, \lambda$ étant réels et positifs, on aura la condition,

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \dots + \frac{L}{\lambda} = 1$$

et un calcul facile conduit à la valeur suivante,

$$J = C + \log a + \frac{A \log \alpha}{\alpha} + \frac{B \log \beta}{\beta} + \dots + \frac{L \log \lambda}{\lambda}.$$

Poznámka o integrálu Binetově.

Sdílí

M. Lerch,

docent české vysoké školy technické v Praze.

Z theorie funkce gamma jest po Cauchyovi a Binetovi známo, že integrál*)

$$(1) \quad \varpi(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{2 \operatorname{arctg} \frac{x}{\omega} dx}{e^{2x\pi} - 1}$$

souvisí s funkcí gamma rovnicí

$$(2) \quad \log \Gamma(\omega) = \left(\omega - \frac{1}{2} \right) \log \omega - \omega + \log \sqrt{2\pi} + \varpi(\omega).$$

Jsou-li ω_1, ω_2 dvě kladné reálné veličiny, obdržíme pomocí vzorce (1) užítím elementarného vztahu

$$(a) \quad \operatorname{arctg} \frac{x}{\omega_1} + \operatorname{arctg} \frac{x}{\omega_2} = \operatorname{Arctg} \frac{x(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1 \omega_2 - x^2},$$

kde $\operatorname{Arctg} z$ znamená $\operatorname{arctg} z$ při $z > 0$, ale $\operatorname{arctg} z + \pi$ při $z < 0$, rovnici

*) Viz rozmanité učebnice počtu integrálního, neb Meyer, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale, po případě autorovy články uveřejněné ve Věstníku České Akademie r. 1893.