Matyáš Lerch

Z geometrie kuželoseček. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 5, 288--292

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123709

$$Q' \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

délku střední přímky QQ', rovnoběžné ku AX, obdržíme

$$QQ' = m = \frac{x_1 + x_2}{2} + \sqrt{x_1 x_2} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2p} + \frac{y_1 y_2}{p} = (y_1 + y_2)^2 \cdot \frac{1}{2p}.$$

Bod Z jako průsek přímek QQ' a B'C' má souřadnice

$$(23) \qquad Z \begin{cases} x = \dfrac{m}{2} = \left(\dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{p} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

a tu vidíme opět, že rovnici $y^2 = px$ souřadnicemi bodu Z úplně se vyhovuje, t. j. bod Z leží na parabole. Že zároveň bod Z v tangentě B'C' leží, přesvědčíme se, když souřadnice jeho dosadíme do rovnice (22).

Z geometrie kuželoseček.

Píše

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

(Dokončení.)

Naopak lze ukázati, že každá racionalná čára stupně třetího má bod dvojný.*)

Omezíme se na důkaz věty, že čáry stupně třetího s bodem dvojným jsou zvláštní, t. j. že obecně čara stupně třetího bodu dvojného nemá. Neb buď $F(x, y) = 0$ rovnice stupně třetího; aby (x_0, y_0) byl bod dvojný, je potřebí i dostačí, aby v rovnici

*) O racionálných čarách v rovině viz monografii p. Ed. Weyra v VIII. roč. Časopisu. Dále též úvahy p. Hermitea ve knize Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique a pak Emil Weyr, Beiträge zur Curvenlehre.

$$F(x_0 + \xi, \quad y_0 + \eta) = 0$$

rozvinuté dle ξ a η scházeli členové linearní. To vyjadřuje tři rovnice mezi dvěma neznámýma x_0 a y_0, jichž vyloučením plyne zcela určitý vztah mezi součiniteli rovnice.

Chceme ještě vyšetřiti, jak vypadá v souřadnicích cotangentových ξ, η (o nichž byla řeč v §. 7.) rovnice křivky stupně třetího mající v bodě C_1 bod dvojný a procházející jednoduše bodem C_2.

Rovnice bude rozměru třetího, a sice tvaru

$$(3) \qquad (A_0\xi^2 + A_1\xi + A_2)\eta + B_0\xi^2 + B_1\xi + B_2 = 0\,.$$

Neboť paprsek $\xi = \text{const.}$ svazku C_1 protne čáru jen v jednom bodě pohyblivém, a tedy musí η přicházeti v rovnici pouze ve stupni prvém.

Naproti tomu paprsek $\eta = \text{const.}$ svazku C_2 protne křivku ve dvou bodech pohyblivých a tedy musí býti rovnice vůči ξ stupně druhého.

Z rovnice (3) plyne, že přímky svazku C_2 protínají naši křivku stupně třetího v řadě dvojin bodových, které se z bodu C_1 promítají ve svazku involučním.

Každému páru paprskové involuce (C_1) přísluší jeden paprsek svazku (C_2) a naopak; lze říci, že svazek (C_2) a involuce (C_1) jsou spolu promětny.*)

Doporučujeme čtenáři důkaz věty:

Kuželosečka neprocházející žádným ze tří základních bodů Steinerovy transformace (s_1, s_2, t), *přejde touto v křivku stupně čtvrtého, mající v základních bodech druhé soustavy* $(\sigma_1, \sigma_2, \tau($ *body dvojné.*

Tímto způsobem lze obdržeti veškery křivky stupně čtvrtého mající tři realné body dvojné.

Křivky stupně čtvrtého se třemi body dvojnými jsou rovněž racionalné.

Abychom to ukázali, buď C čarou stupně čtvrtého mající tři body dvojné a, b, c. Volme na čáře další bod d, a uvažujme

---

*) S tohoto hlediska vyložena theorie čar stupně třetího ve spise Emila Weyra „Theorie der mehrdeutigen Elementargebilde“ v Lipsku u Teubnera vydaném.

svazek kuželoseček o vrcholech a, b, c, d; rovnice jeho bude tvaru

$$(\lambda) \qquad K_0(x, y) + \lambda K_1(x,y) = 0,$$

kde K_0 a K_1 jsou dva určité výrazy stupně druhého.

Libovolná kuželosečka (λ) našeho svazku protne čáru C v osmi bodech, z nichž třikráte dvé splývá s body dvojnými a, b, c a jeden s bodem d; zbývá tedy jen jeden pohyblivý průsek čáry C s kuželosečkou našeho svazku. Řešením rovnice (λ), spojené s rovnicí čáry C, musí se objeviti x a y jako jednoznačné t. j. racionalné funkce algebraické proměnné λ, a tedy je čára racionalnou.

10. Ke konci budiž ukázáno, jak lze transformace Steinerovy užiti k řešení konstruktivních úloh druhého stupně.

Prochází-li kuželosečka C body s_1 a s_2, transformuje se v kuželosečku Γ, procházející body σ_1 a σ_2, a dále oběma body, v nichž příčka (osa) transformace T protíná čáru C.

Mějme naopak dány dvě libovolné kuželosečky C a Γ a přímku T, spojující dva jejich průseky. Jsou-li pak s_1, s_2, a libovolné body kuželosečky C, a α libovolný bod kuželosečky Γ, existuje Steinerova transformace ($s_1 s_2$; $\sigma_1 \sigma_2$, T), kterou se kuželosečka C převádí v kuželosečku Γ a ve které bodu a odpovídá bod α.

Důkaz. Přímky $s_1 a$, $s_2 a$ protnou osu T v bodech a_1, a_2; nazveme σ_1 a σ_2 druhé průseky přímek $a_1 \alpha$, $a_2 \alpha$ s kuželosečkou Γ.

Volíme-li pak body $s_1 s_2$, $\sigma_1 \sigma_2$ a osu T za základ Steinerovy transformace, přejde touto kuželosečka C v kuželosečku Γ', která obsahuje body σ_1, σ_2, dále oba průseky čáry C s osou T, a bod α; všech těchto pět bodů leží na čáře Γ a tedy splývá Γ' s Γ. Tím naše tvrzení dokázáno.

Této okolnosti užijeme k řešení úkolu:

Sestrojiti průsečíky určité přímky P s kuželosečkou danou pěti body.

Dvěma z daných bodů čáry C veďme libovolnou kružnici Γ, a přímku T, jejíž průsek s danou přímkou P znamenejme t.

Tímto bodem veďme libovolnou přímku protínající kružnici Γ ve dvou realných bodech σ_1, σ_2.

Zvolíme-li na Γ libovolně bod α a přidružíme mu kterýkoli ze zbylých daných bodů a čáry C, sestrojíme snadno na C středy transformační s_1 a s_2; jsou to průseky čáry C s přímkami spojujícími bod a s body a_1, a_2, ve kterých přímky $\sigma_1\alpha$, $\sigma_2\alpha$ protínají osu T.

Touto transformací ($s_1 s_2$; $\sigma_1\sigma_2$; T) převádí se kuželosečka C v kružnici Γ a přímka P — ana prochází bodem t — v přímku Π. Průseky přímky této s kružnicí Γ odpovídají právě naší transformaci hledaným průsekům čáry C a přímky P, i obdrží se transformací zpátečnou.

Další úkol, *z daného bodu vésti tečny ke kuželosečce*, řeší se takto:

Daný bod znamenejme t, veďme jím a libovolným bodem e kuželosečky C přímku T, která protne čáru C v dalším bodě f. Body ef veďme libovolně kružnici Γ, a ustanovme její průseky σ_1, σ_2 s některou přímkou vedenou bodem t; volíme-li na Γ libovolně bod α, a rovněž na C libovolně bod a, sestrojí se body s_1, s_2 na C jako v úloze předešlé. Transformací ($s_1 s_2$; $\sigma_1\sigma_2$; T) převádí se kuželosečka C v kružnici Γ a přímky vedené bodem t opět v přímky; zvláště přejdou hledané tečny čáry C ve dvě přímky vedené bodem τ, které patrně budou tečnami kruhu Γ; tečny ty však umíme sestrojiti a zpátečnou transformací obdržíme hledané tečny čáry C.

Další úkol, *sestrojiti čtvrtý průsek dvou kuželoseček C_1 a C_2, jejichž tři průseky jsou známy*, řeší se tím, že známé tři průseky volíme za základní body $s_1 s_2 t$ Steinerovy transformace, kterou se pak C_1 a C_2 převedou v přímky Γ_1 a Γ_2, jichž průsečík odpovídá v transformaci hledanému průseku čar C_1 a C_2.

Mějme konečně dány dvě kuželosečky, jež se protínají ve dvou daných bodech, a hledejme zbývající dva jich průseky.

Volíme-li známé dva průsečíky za středy s_1, s_2 Steinerovy transformace a třetí základní bod její t na jedné z obou čar, převedeme tím úkol na stanovení průseku přímky s kuželosečkou.

11. Mějme nyní kuželosečku C a vytkněme na ní libo-

volně šest bodů $s_1 s_2 a$, $\sigma_1 \sigma_2 \alpha$. Existuje osa T, tak aby Steinerovou transformací ($s_1 s_2$, $\sigma_1 \sigma_2$, T) přešla kuželosečka C v samu sebe, a body a, α si v ní odpovídaly. Touto osou T bude přímka spojující průseky ($s_1 a$, $\sigma_1 \alpha$) a ($s_2 a$, $\sigma_2 \alpha$). Z konstrukce plyne, že blíží-li se bod m bodu σ_1 (σ_2), blíží se bod přidružený μ poloze s_1 (s_2).

Touto cestou dospěli bychom na novo k větě Pascalově a k souvislé s ní theorii projektivných řad na kuželosečce.

V některém z příštích ročníků vrátíme se k tomuto předmětu, abychom vyložili hlavní věty a konstrukce, týkající se bodů pomyslných.

Věstník literární.

Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. Von Dr. *Rudolf Sturm*, Professor an der Universität zu Breslau. Leipzig. Teubner.

Ještě ku konci tohoto ročníku neváháme upozorniti čtenáře těchto listů na výborný spis, který dosavadní výzkumy o geometrii útvarů paprskových soustavně podává a k nim četné výsledky vlastních prací autorových připojuje. *Díl první* (386 stran) pojednává o komplexu lineárném a tetraedrálném. Vysvětluje nejprve základní útvary a geom. místa geometrie paprskové, hledě zvláště ku mnohoznačné jich sdruženosti. Z toho vyplývají pak hlavní vlastnosti přímkových ploch 3. a 4. stupně. Větší část spisu věnována jest theorii komplexu lineárného pro který spisovatel zavádí název „das Strahlengewinde“; k tomu druží se pojednání o lineárných soustavách takových komplexů načež v oddílu posledním vyšetřuje se podrobně komplex tetraedrálný. Methoda knihy jest ryze synthetická, vedená v duchu Schröterově; památce jeho jest tento I. díl věnován.

Celé dílo, jehož vyšel již také díl druhý, obsahující theorii kongruencí paprskových, ukončeno bude dílem třetím. Hodláme pak o něm obšírněji referovati. Prof. *A. Strnad.*

E. Picard, Traité d'Analyse, t. II., Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann. Paris Gauthier-Villars et Fils, 1893.

Ch. Méray, Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et des applications géométriques. Première partie. Principes géneraun. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1894.

Pro nedostatek místa přineseme v 1. čísle příštího ročníku rozbor těchto dvou svazků.