Jaroslav Jarušek

O algebraických rovnicích s vícenásobnými kořeny

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 4, 329--336

Les méthodes analytique et synthétique dans l'enseignement mathématique.

(Extrait de l'article précédent.)

La méthode de l'enseignement est déterminée par le but de l'enseignement; ce but a subi des changements au cours des temps; actuellement, il consiste dans la formation de l'esprit et de l'âme aussi bien que dans l'acquisition de certaines connaissances positives. Pour que l'enseignement ait plein succès, il faut savoir intéresser l'élève à la matière enseignée et se garder de toute monotonie. On emploie, en mathématiques, différentes méthodes; l'auteur traite seulement de la méthode analytique et de la méthode synthétique, ainsi que de leurs combinaisons avec d'autres méthodes. Il donne d'abord une esquisse historique sur le développement de ces méthodes depuis Platon; il étudie ensuite leurs avantages didactiques et méthodiques ainsi que la question en quelle mesure ces deux méthodes se prêtent aux exigences de l'enseignement. L'auteur discute laquestion dans quels cas il faut préférer l'une à l'autre; il fait voir laquelle des deux méthodes est employée davantage dans les livres d'enseignement des différentes nations, et traite de l'importance de ces méthodes pour la géométrie descriptive.

O algebraických rovnicích s vícenásobnými kořeny.

Napsal Dr. *Jaroslav Jarušek.*

I.

Jestliže z kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ rovnice

$$a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{1}$$

je pouze k různých, musí býti rovny nule všechny determinanty z $k+1$ kořenů

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \ldots & \alpha_{i_{k+1}} \\ \alpha^2_{i_1} & \alpha^2_{i_2} & \ldots & \alpha^2_{i_{k+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^k_{i_1} & \alpha^k_{i_2} & \ldots & \alpha^k_{i_{k+1}} \end{vmatrix} = \prod_{\mu,\nu} (\alpha_{i_\nu} - \alpha_{i_\mu}),\ \nu > \mu, \tag{2}$$

při čemž $i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}$ probíhají všechny kombinace $(k+1)$-ní třídy z čísel $1, 2, \ldots, n$ a dále jeden determinant toho tvaru řádu k musí býti různý od nuly, čili matice

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \ldots & \alpha_n^k \end{matrix} \right\| \tag{3}$$

musí býti hodnosti k. Naopak, jsou-li tyto podmínky splněny, nemůže býti více různých kořenů než k.

Je-li v matici (3) na př. subdeterminant řádu k

$$\left| \begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \ldots & \alpha_k^{k-1} \end{matrix} \right|$$

různý od nuly, stačí k tomu, aby byla hodnosti k, aby všechny jeho superdeterminanty

$$\left| \begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k & \alpha_{k+i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \ldots & \alpha_k^k & \alpha_{k+1} \end{matrix} \right|, \quad i = 1, 2, \ldots, n-k \tag{4}$$

rovnaly se nule. Máme tedy celkem $n-k$ neodvislých podmínek, mimo podmínku, aby jeden subdeterminant řádu k rovnal se nule.

Tyto podmínky vyjádříme pomocí koeficientů dané rovnice. Čtverec matice

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \ldots & \alpha_n^{k-1} \end{matrix} \right\|$$

dává vzorec

$$\left| \begin{matrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & \ldots & s_{2k-2} \end{matrix} \right| = \sum_{\alpha} \left| \begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \ldots & \alpha_k^{k-1} \end{matrix} \right|^2, \quad s_h = \sum_i \alpha_i^h, \quad s_0 = n,$$

při čemž součet na pravé straně vztahuje se na všechny kombinace z kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Na pravé straně bude jen jeden člen různý od nuly; tudíž musí býti

$$a_0^{2k-2} \left| \begin{matrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & \ldots & s_{2k-2} \end{matrix} \right| \gtrless 0. \tag{5}$$

(Faktor a_0^{2k-2} připojujeme proto, aby to byla celistvá funkce koeficientů $a_0, a_1, \ldots, a_n$.)

Podobně součin matic

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \ldots & \alpha_n^{k-1} \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \ldots & \alpha_n^k \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \ldots & \alpha_n^{k-1} \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \ldots & \alpha_n^r \end{matrix}\right\|, \quad r = k, k+1, \ldots, n-1$$

dává vzorce

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} & s_r \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k & s_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k-1} & s_{r+k} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \ldots & \alpha_{k+1}^k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \ldots & \alpha_{k+1}^{k-1} \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \ldots & \alpha_{k+1}^r \end{vmatrix}.$$

Dostáváme tak $n-k$ nutných podmínek

$$a_0^{r+k} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} & s_r \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k & s_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k-1} & s_{r+k} \end{vmatrix} = 0, \quad r = k, k+1, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Tyto podmínečné rovnice vznikly prostě transformací rovnic (4) a jsou mezi sebou nezávislé, poněvadž každá následující obsahuje nový koeficient a_i. Jsou tedy také postačující. Tím jsme zjednodušili podmínky, jež odvodil L. Baur.*)

Podmínky ty bychom ovšem mohli vyjádřit také v jiném tvaru. Na př. užitím čtverce matice

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \ldots & \alpha_n^{k-1} \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \ldots & \alpha_n^r \end{matrix}\right\|$$

*) Mathem. Annalen 50; H. Weber: Lehrb. d. Algebra I. p. 171. (2. vyd.).

dostaneme podmínky

$$a_0^{2r}\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & s_r \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & s_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-2} & s_{r+k-1} \\ s_r & s_{r+1} & \dots & s_{k+r-1} & s_{2r} \end{vmatrix} = 0, \quad r = k,\ k+1, \dots, n-1.$$

Můžeme také určiti rovnici, která má za kořeny právě oněch k různých kořenů dané rovnice. Rovnici o kořenech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ můžeme totiž psáti ve tvaru

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & x \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \dots & \alpha_k^k & x^k \end{vmatrix} = 0,$$

takže naše hledaná rovnice bude

$$\sum_{\alpha}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \dots & \alpha_k^k & x^k \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \dots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Na levé straně jest totiž různý od nuly pouze jeden člen s oněmi k různými kořeny a zároveň jest levá strana symmetrickou funkcí kořenů a_i. Koeficient při $(-1)^i x^i$ jest

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{i-1} & \alpha_2^{i-1} & \dots & \alpha_k^{i-1} \\ \alpha_1^{i+1} & \alpha_2^{i+1} & \dots & \alpha_k^{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \dots & \alpha_k^k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \dots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{k+i-2} \\ s_{i+1} & s_{i+2} & \dots & s_{k+i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} \end{vmatrix}$$

takže hledaná rovnice jest

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & x^k \end{vmatrix} = 0.$$

II.

Předešlé výsledky souvisí s theorií invariantních útvarů. Jest totiž

$$D_k^{(n)} = a_0^{2k} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k} \end{vmatrix} \tag{7}$$

semiinvariant příslušný kovariantu $M_k^{(n)}$ stupně $p = 2\,(n-k-1)$ (poněvadž s_k je váhy k dle druhého indexu). Předpokládejme nyní danou rovnici (1) ve tvaru s binomickými koeficienty

$$f(x) \equiv a_0\, x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2\, x_1^{n-2}\, x_2^2 + \dots + a_n\, x_2^n = 0 \tag{8}$$

a hledejme kovariant formy $f(x)$ s koeficientem prvního členu $D_k^{(n)} = A_0$. Další koeficienty dostaneme prováděním operace Δ_{12}, při čemž $\Delta_{12}\; s_i = i s_{i+1}$. V prvních $n-k$ koeficientech, o které se nám jedná, budou lineárně vystupovat determinanty matice

$$\begin{Vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{k+n-1} \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Dostaneme, vypíšeme-li z determinantů pouze první řádky,

$$A_0 = a_0^{2k}\, |\, s_0\; s_1 \dots s_k\, | \tag{10}$$

$$p\,A_1 = 2kn\, a_0^{2k-1}\, a_1\, |\, s_0\, s_1 \dots s_k\, | + $$
$$+ 2k\, a_0^{2k}\, |\, s_0\, s_1 \dots s_{k-1}\; s_{k+1}\, |$$

$$p\,(p-1)\,A_2 = [2kn\,(n-1)\,a_0^{2k-1}\, a_2 + 2k\,(2k-1)\,n^2\, a_0^{2k-2}\, a_1^2]$$
$$|\, s_0\, s_1 \dots s_k\, | + 8k^2\, n\, a_0^{2k-1}\, a_1\, |\, s_0 \dots s_{k-1}\; s_{k+1}\, | +$$
$$+ 2k\,(2k-1)\,a_0^{2k}\, |\, s_0 \dots s_{k-2}\, s_k\; s_{k+1}\, | +$$
$$+ 2k\,(2k+1)\,a_0^{2k}\, |\, s_0 \dots s_{k-1}\; s_{k+2}\, |.$$

. . . .

Jsou-li splněny rovnice (6), anulují se také všechny ostatní determinanty matice (9) a tudíž dle rovnic (10) jest také

$$A_0 = 0,\quad A_1 = 0, \dots,\quad A_{n-k-1} = 0.$$

Dokážeme ale také opáčnou větu. Jsou-li splněny předcházející rovnice, pak z rovnic (10) pro A_0 a A_1 plyne přímo $|\, s_0 \dots s_{k-1}\; s_k\, | = 0$, $|\, s_0 \dots s_{k-1}\; s_{k+1}\, | = 0$. Pak ale jest také $|\, s_0 \dots s_{k-2}\; s_k\; s_{k+1}\, | = 0$ (v matici (9) položíme $n-1 = k+1$) a tudíž z rovnice pro A_2 plyne $|\, s_0 \dots s_{k-1}\; s_{k+2}\, | = 0$ a podobně dále.

Tudíž **nutná a postačující podmínka, aby daná rovnice** (8) **měla nejvýše** k **různých kořenů** (aby měla jich právě k musí přistoupit nerovnina $s_0^{2k-2} | s_0 \ldots s_{k-1} | \gtrless 0$) **jest, aby vymizelo** $n-k$ **prvních koeficientů kovariantu**

$$M_2^{(n)} = a_0^{2k} \begin{vmatrix} s_0 & \cdot & \cdot & s_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_k & \cdot & \cdot & s_{2k} \end{vmatrix} x_1^{2k(n-k-1)} + \ldots . \tag{11}$$

Pak ovšem vymizí také všechny ostatní koeficienty tohoto kovariantu. To plyne z té okolnosti, že vedoucím koeficientem je invariantní útvar úplně určen. Dostaneme jej totiž v proměnných ξ_1, ξ_2 až na jistou mocninu ξ_1, dosadíme-li do vedoucího koeficientu místo a_i koeficienty a'_i formy vzniklé z dané formy substitucí

$$x_1 = \xi_1 x'_1, \qquad x_2 = \xi_2 x'_1 + x'_2.$$

Poněvadž počet různých kořenů dané rovnice se nemění lineární transformací, musí transformovaný vedoucí koeficient také vymizet a to pro libovolná ξ_1, ξ_2, t. j. musí vymizet všechny koeficienty uvažovaného invariantního útvaru.

Podmínky ty budeme moci vždy vyjádřit pomocí pouze semiinvariantů. To plyne z podmínek Baurových, které jsou přímo semiinvarianty, ale nejsou vhodné, poněvadž jsou vysokého stupně v koeficientech a_i. Poněvadž $a_0 \gtrless 0$, můžeme vzít tyto semiinvarianty

$$A_0 = 0, \quad a_0 A_1 - a_1 A_0 = 0, \quad a_0 A_2 - 2a_1 A_1 + a_2 A_0 = 0, \ldots$$

Abychom blíže vyšetřili násobnost kořenů dané rovnice, jest třeba podobným způsobem vyšetřovati derivace $f'(x)$, $f''(x)$, ... Jaké podmínky při tom přistoupí, ukážeme na příkladě. Abychom se stručně vyjadřovali, řekněme, že rovnice

$$f(x) \equiv a_0 (x - \alpha_1)^{\nu_1} (x - \alpha_2)^{\nu_2} \ldots . (x - \alpha_h)^{\nu_h} = 0$$

je typu $(\nu_1 \ldots, \nu_2; \nu_h)$. Podmínky, aby $f^{(i)}(x) = 0$ měla k různých kořenů, označme $M_k^{(n-i)} = 0$, $D_{k-1}^{(n-i)} = 0$.

Pak na př.: má-li rovnice 7. stupně $f(x) \leq 0$ tři různé kořeny — podmínky proto jsou $M_3^{(7)} = 0$, $D_2^{(7)} z 0$ — jest $f(x)$ jednoho z typů

$$(5, 1, 1), \quad (4, 2, 1), \quad (3, 3, 1), \quad (3, 2, 2).$$

Podle věty Rolleovy jsou příslušné typy

pro $f'(x)$ (4, 1, 1), (3, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1)
pro $f''(x)$ (3, 1, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1) (1, 1, 1, 1, 1).

Z tvaru $f'(x)$ vidíme, má-li býti $f(x)$ typu (3, 2, 2), musí býti $D_4^{(6)} \leq 0$; podmínku $M_5^{(6)} = 0$ není třeba připojovat, poněvadž $f'(x)$ už nemůže mít víc různých kořenů. Je-li $f(x)$ druhého nebo třetího typu, má $f'(x)$ 4 různé kořeny; tedy v obou případech musí býti $M_4^{(6)} = 0$, $D_3^{(6)} \leq 0$. Který z obou případů nastane, rozhodneme z $f''(x)$. Má-li nastat třetí případ, musí být $D_4^{(5)} \leq 0$. Má-li nastat druhý případ, musí být $M_4^{(5)} = 0$; podmínka $D_4^{(5)} \leq 0$ je již sama sebou splněna, poněvadž v obou uvažovaných případech $f'(x)$ musí mít 4 kořeny. Ve všech těchto třech případech můžeme podmínku $D_2^7 \leq 0$ vynechat, poněvadž, má-li $f'(x)$ 4 různé kořeny, nemůže mít $f(x)$ jen dva kořeny. Konečně má-li být $f(x)$ typu (5, 1, 1), musí být $M_3^{(6)} = 0$.

Podmínky $M_k^{(n-1)} = 0$, $D_k^{(n-1)} \leq 0$ pro derivaci $f'(x)$ snadno dostaneme z podmínek pro $f(x)$. Jest totiž

$$f'(x) = n\,[a_0 x^{n-1} + \binom{n-1}{1} a_1 x^{n-2} + \binom{n-1}{2} a_2 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}].$$

Dostanu tedy podmínky pro $f'(x)$, když do podmínek pro $f(x)$ dosadím $n-1$ místo n. Pak ovšem příslušné kovarianty změní se na kovarianty formy stupně $n-1$, jež jsou zároveň semikovarianty formy stupně n. Podobně podmínky pro $f''(x)$ dostanu, dosadím-li $n-2$ místo n. Avšak podmínky mezi koeficienty semikovariantu můžeme nahradit podmínkami mezi koeficienty jistých kovariantů. Budiž

$$I' = A'_0\, x_1^p + \binom{p}{1} A'_1\, x_1^{p-1} x_2 + \binom{p}{2} A'_2\, x_1^{p-2} x_2^2 + \ldots$$

semikovariant formy $f(x)$. Pak jest

$$\varDelta_{21}\, A'_k = k\, A'_{k-1}, \quad \varDelta_{21}\, A'_0 = 0.$$

Nechť kovariant určený semiinvariantem $A_0 = A'_0$ má koeficienty $A_0, A_1, A_2, \ldots$. Pak o rozdílech

$$A'_1 - A_1 = B'_0, \quad A'_2 - A_2 = 2B'_1, \quad A'_3 - A_3 = 3B'_2, \ldots$$

platí

$$\varDelta_{21}\, B'_k = \frac{1}{k+1}\, \varDelta_{21}\, (A'_{k+1} - A_{k+1}) = A'_k - A_k = k B'_{k-1}$$

$$\varDelta B'_0 = A'_0 - A_0 = 0.$$

Jsou tedy $B'_0, B'_1, B'_2, \ldots$ zase koeficienty nějakého semikovariantu a s nimi můžeme provádět zase takový rozklad a tak vyjádřit koeficienty I' koeficienty kovariantů.

Mohli bychom také psát $f'(x)$ ve tvaru

$$f'(x) = 0\,.\,x^n + \binom{n}{1}\,.\,1\,a_0\,x^{n-1} + \binom{n}{2}\,.\,2\,a_1\,x^{n-2} + \cdots$$

To znamená, že z podmínek pro $f(x)$ dostanu obdobné podmínky pro $f'(x)$, dosadím-li místo řady

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_k, \ldots,\ a_n$$

řadu

$$0,\ a_0,\ 2a_1, \ldots,\ ka_{k-1}, \ldots,\ na_{n-1}.$$

Podobně abychom dostali podmínky pro $f''(x)$, dosadíme místo

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_k, \ldots$$

koeficienty

$$0,\ 0,\ 2.1.\,a_0, \ldots,\ k\,(k-1)\,a_{k-2}, \ldots$$

atd. a vždy z kovariantů dané formy dostaneme semikovarianty.

Aplikace na speciální případy budou uveřejněny v článku jiném.

*

Sur les équations algébriques aux racines multiples.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur prouve que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation algébrique du degré n n'ait que k racines différentes, sont exprimées par les relations

$$a_0^{n+k}\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & s_r \\ \dots & & & & \dots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & s_{r+k}\end{vmatrix} = 0,\ r = k,\ k+1, \dots, n-1$$

et

$$a_0^{2k-2}\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ \dots & & & \dots \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-1}\end{vmatrix} \neq 0;$$

s_k est la somme des k-ièmes puissances des racines de l'équation donnée. Les premières relations peuvent être transformées de sorte qu'elles prennent la forme des n-k premiers coefficients annulés du covariant, dont le premier membre a pour son coefficient le déterminant écrit ci-dessus pour $r = k$. Elles peuvent aussi être remplacées par des semiinvariants. L'auteur fait encore voir, comment on peut examiner la multiplicité de chaque racine et comment ces conditions peuvent être exprimées par les coefficients des covariants de l'équation donnée.

Poznámka ke konstrukcím tečen k průsečné křivce dvou ploch v bodě dotyku.

Napsal *Jiří Klapka*, asistent české techniky v Brně.

a) Pan prof. Sobotka podává*) tuto konstrukci středu křivosti D čtvrtého normálního řezu v obyčejném bodě O plochy P_1, jsou-li dány tři tečny a, b, c a tři středy křivosti A, B, C jiných řezů normálních v bodě O:

Bodem O veďme libovolnou kružnici k v tečné rovině τ bodu O. Bodům na normále n jako středům křivosti norm. řezů přísluší dvojice tečen v τ a to tak, že spojnice průsečíků dvojic těchto tečen s k tvoří svazek (p) s řadou na n promětný. Tento svazek jest však nevlastní — t. j. jeho střed neleží v konečnu, — neboť přímka úběžná, odpovídajíc bodu O, má býti paprskem svazku.

Normálu n sklopme či promítněme do τ (obr. 1.), při čemž středy A, B, C na n se promítnou v A', B', C' na n'. Kružnice k

*) Rozpravy Čes. Akad., roč. XIX., tř. II., č. 58. článek „Konstrukce týkající se křivosti plochy v daném bodě".