Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Bílek

Jedna Cremonowa involuce 14-ho stupně a její degenerace

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 3, D282--D287

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123875

k' (kterou je vymezena další luneta), jeden vrchol je na vrcholové přímce w' a osa je opět rovnoběžná s osou z. Podél elips obou soustav dotýkají se plochy konoidy o přímkách řídicích položených v rovině $(w\,w')$.

*

Sur un groupe des surfaces, ayant les propriétés caractéristiques communes. On traite les surfaces formées par les courbes affines, situées dans les plans parallèles et secants une courbe du deuxième ordre et deux droites parallèles entre eux et normales à une axe de la courbe donnée. Les surfaces portent sur sa superficie deux systèmes des courbes affines entre eux, lelong desquelles on peut construire les conoïdes, qui sont tangeantes à la surface traitée. Une partie de cette surfaces est formée comme un coin, c'est pour cella, qu'on a donné à cettes surfaces le nom: les cuneoïdes ou les surfaces sphénoïdales (ὁ σφήν = le coin). Certaines de cettes surfaces ont trouvées l'application dans les travaux du beton armé.

JEDNA CREMONOWA INVOLUCE 14-ho STUPNĚ A JEJÍ DEGENERACE.

J. BÍLEK, Praha.

I.

Nechť body $A_1, A_2, \ldots, A_9$ tvoří basi svazku kubik S_3^1. Body A_1, A_2 jako dvojnásobnými a body $A_3, A_4, \ldots, A_8$ jako jednoduchými je určena síť eliptických kvartik S_4^2. S_4^2 vytíná na obecné kubice lin. soustavu g_2^1, neboť na obecné kubice nemůže existovat lin. soustava g_2^2. Vidíme tedy, že síť S_4^2 tvoří složenou lin. soustavu v tom smyslu, že všechny kvartiky jdoucí bodem P, jdou nutně ještě dalším bodem P'. Touto složeností je v rovině vytvořena jednoznačná algebraická involutorní příbuznost s konečným počtem výjimek. Je to tedy Cremonova transformace.

Tuto involuci můžeme dostat také transformací známé Geiserovy involuce J_8 užitím kvadratické transformace T_2. Nechť v rovině S' je dána Geiserova involuce J_8 o hlavních bodech $A_1', \ldots, A_7'$ a nechť dále body A_8', A_9' tvoří homologickou dvojici v J_8. Mezi rovinami S a S' volme kvadratickou transformaci T_2 o hlavních bodech O_1, O_2, O_3 a $O_1' \equiv A_1'$, $O_2' \equiv A_2'$, $O_3' \equiv A_8'$. Transformace $T_2^{-1} J_8 T_2$ je involucí v rovině S. Stupeň této involuce je 14, neboť přímce p v S, která neprochází žádným bodem O_i, odpovídá

$$p \underset{T_2}{\sim} k_2(A_1'\, A_2', A_8') \underset{J_8}{\sim} k_{10}(A_1^{3'}, A_2^{3'}, A_3^{4'}, \ldots, A_7^{4'}\, A_9') \underset{T_2^{-1}}{\sim}$$
$$k_{14}(A_1^7, A_2^7, A_3^4, \ldots, A_7^4, A_8^4, A_9).$$

Bodu A_1 odpovídá

$$O_1 \equiv A_1 \underset{T_2}{\sim} A_2'\, A_8' \underset{J_8}{\sim} k_5(A_1^{2'}, A_2'\, A_3^{2'}, \ldots, A_7^{2'}\, A_9') \underset{T_2^{-1}}{\sim}$$
$$k_7(A_1^4, A_2^3\, A_3^2, \ldots, A_7^2, A_8^2\, A_9).$$

Analogicky bodu $O_2 \equiv A_2$ odpovídá křivka sedmého stupně

$$k_7(A_1^3, A_2^4, A_3^2, \ldots, A_8^2 A_9).$$

Bodu $A_3 = T_2^{-1}(A_3')$ odpovídá

$$A_3 \underset{T_2}{\sim} A_3' \underset{J_8}{\sim} k_3(A_1', A_2' A_3^{2\prime}, A_4', \ldots, A_7') \underset{T_2^{-1}}{\sim}$$
$$k_4(A_1^2, A_2^2, A_3^2, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8,).$$

Analogicky pro body $A_i = T_2^{-1}(A_i')$, $i = 4, 5, 6, 7$.

Bodu $O_3 \underset{T_2}{\sim} A_1' A_2' \underset{J_8}{\sim} k_2(A_3', A_4', A_5', A_6', A_7',) \underset{T_2^{-1}}{\sim}$
$$k_4(A_1^2, A_2^2, A_3, \ldots A_7, A_8^2).$$

Bodu $A_9 = T_2^{-1}(A_9')$ odpovídá

$$A_9 \underset{T_2}{\sim} A_9' \underset{J_8}{\sim} A_8' \underset{T_2^{-1}}{\sim} A_1 A_2.$$

Jiných hlavních bodů involuce $J_{14} = T_2^{-1} J_8 T_2$ nemá.

Označíme-li křivku samodružných bodů involuce J_8 Δ^6, pak křivka samodružných bodů involuce J_{14} je

$$\Delta^8(A_1^4, A_2^4, A_3^2, \ldots, A_8^2) = T_2^{-1}(\Delta^6).$$

Křivka Δ^8 je rodu 3.

Velmi snadno nahlédneme, že svazek kubik $S_3^1(A_1, \ldots, A_8)$ a síť eliptických kvartik $S_4^2(A_1^2, A_2^2, A_3, \ldots, A_8)$ se reprodukují v involuci J_{14} tak, že každá křivka svazku i sítě se sama reprodukuje. Lze tedy tuto involuci J_{14} vytvořiti pomocí svazku S_3^1 a sítě S_4^2 tak, jak na počátku uvedeno.

Svazek kubik S_3^1 vytne na Δ^8 lin. soustavu g_4^1, která má 12 dvojnásobných bodů Y_i. V těchto bodech Y_i jsou dvojnásobné body racionálních kubik svazku S_3^1. Aby v bodě Y_i se kubika dotýkala křivky Δ^8, je nemožné, neboť pak by na eliptické kubice vznikla bodová involuce, kde by dva ze čtyř samodružných bodů splynuly, což je vyloučeno.

Svazek kvartik*) S_4^1 vytne na Δ^8 lin. soustavu g_4^1, která má 12 dvojnásobných bodů Z_i. V těchto bodech Z_i leží další dvojnásobné body racionálních kvartik svazku S_4^1. Dostáváme takto známý výsledek:

Svazek eliptických kvartik S_4^1 obsahuje 12 racionálních, obecně se nerozpadajících kvartik.

Bodem B na Δ^8 je určen svazek kvartik, které se v tomto bodě dotýkají a tento svazek vytne na Δ^8 lin. soustavu g_3^1, která má 10 dvojnásobných bodů. Obsahuje tedy svazek kvartik určený obecným bodem B na Δ^8 celkem jedenáct obecně se nerozpadajících racionálních kvartik. Na počet 12 doplňuje těchto jedenáct kvartik kvartika, složená z kubiky

*) $S_4^1(A_1^2, A^2, A_3, \ldots, A_8, X, X')$, kde X X' je homologická dvojice v involuci J_{14}.

svazku S_3^1 jdoucí bodem B a z přímky A_1A_2. Tato složená kvartika je rovněž kvartikou svazku určeného bodem B. Splyne-li bod B s některým bodem Y_i, pak příslušný svazek kvartik obsahuje jen 10 racionálních ireducibilních kvartik a jednu kvartiku složenou z kubiky s dvojnásobným bodem Y_i a přímky A_1A_2.

Zvolíme-li konečně bod B, jenž určuje svazek eliptických kvartik, na některé racionální kubice svazku S_3^1, pak v příslušném svazku kvartik existuje 11 racionálních ireducibilních kvartik a jedna kvartika rozpadlá.

Zkoumejme nyní případy, jak může involuce J_{14} degenerovat. Provedeme to pomocí vytvoření této involuce svazkem kubik S_3^1 a sítí kvartik S_4^2, abychom se vyhnuli soumezným hlavním bodům.

II.

Jeden hlavní bod sedmého stupně a dva čtvrtého stupně leží v jedné přímce.

Nejprve poznamenejme, že v případě když leží v přímce jeden bod 7., jeden bod 4. a bod prvního stupně, involuce J_{14} nedegeneruje.

Nechť tedy jeden bod 7. a dva body 4. stupně leží v jedné přímce a nechť to jsou body A_1, A_3, A_4, které leží v přímce p. Pak zbývajících šest bodů leží na kuželosečce k_2. Na obecné kubice svazku S_3^1 se nic nezmění. Na přímce p nevytíná síť S_4^2 žádnou lin. soustavu a na kuželosečce k_2 vytíná lin. soustavu g_2^1, neboť existuje jediná kvartika sítě, jež obsahuje kuželosečku k_2, totiž $k_2 \, . \, p \, . \, \overline{A_1A_2}$. Zvolíme-li na přímce p bod P, pak jím určený svazek S_4^1 se rozpadne na přímku p a svazek kubik S_3^1 $(A_1, A_2^2, A_5, A_6, A_7, A_8)$, a ten vytne na p lin. soustavu g_2^1, jejíž dvojice vezmeme za dvojice degenerované involuce.

Přímka p je součástí všech homaloidů, neboť má s každým 15 průsečíků. Je součástí hlavní křivky C_1, majíc s ní 8 společných průsečíků. Je součástí křivky Δ^8, neboť s ní má společných 11 průsečíků. Přímka p je také součástí hlavních křivek C_3, C_4, majíc s nimi společných 5 průsečíků. Vynechme od všech homaloidů přímku p a stupeň degenerované involuce se sníží o 1. Je tedy tato involuce stupně 13. Charakteristika její je $1^7\, 1^6\, 4^4\, 2^3\, 1^1$. Křivka samodružných bodů je Δ^7 $(A_1^3, A_2^4, A_3, A_4, A_5^2, \ldots, A_8^2)$. Křivka Δ^7 protne přímku p ještě ve dvou bodech, což jsou samodružné body v přímce p. Dostáváme výsledek:

Leží-li tři hlavní body v přímce, z nichž jeden je stupně sedmého a další dva jsou stupně čtvrtého, pak involuce J_{14} degeneruje v involuci stupně o jednotku nižšího.

Svazek kubik S_3^1 vytne na Δ^7 lin. soustavu g_4^1 s 10 dvojnásobnými body, neboť křivka Δ^7 je rodu 2. Tedy 10 dvojnásobných bodů racionálních ireducibilních kubik svazku S_3^1 leží na křivce Δ^7. Další dva leží v průsečících přímky p s kuželosečkou k_2 a obecně neleží na křivce Δ^7, neboť tvoří v J_{13} homologickou dvojici.

Obecný svazek S_4^1 eliptických kvartik, obsažený v S_4^2, vytne na Δ^7 lin. soustavu g_4^1 s 10 dvojnásobnými body. Obsahuje tedy takový svazek 10 racionálních obecně ireducibilních kvartik. Kdybychom bod X, který určuje v S_4^2 svazek S_4^1, volili na některé racionální kubice, pak tento svazek obsahuje pouze 9 racionálních ireducibilních kvartik a jednu rozpadlou. Padne-li bod X do obecného bodu křivky Δ^7, vytne příslušný svazek S_4^1 na Δ^7 lin. soustavu g_3^1 s osmi dvojnásobnými body. Obsahuje tedy tento svazek celkem 9 racionálních ireducibilních kvartik. Splyne-li bod X s některým dvojnásobným bodem racionální ireducibilní kubiky, pak příslušný svazek kvartik obsahuje jen 8 racionálních ireducibilních kvartik.

III.

Dva hlavní body sedmého a jeden čtvrtého stupně leží v přímce.

Nechť $\overline{A_1A_2A_3} \equiv p$, pak zbývajících šest bodů leží v kuželosečce $k_2(A_4, A_5, A_6, \ldots, A_9)$. Síť kvartik S_4^2 se rozpadne na přímku p a síť kubik $S_3^2(A_1, A_2, A_4, \ldots, A_8)$. Síť kubik vytne na obecné kubice z S_3^1 lin. soustavu g_2^1, na přímce p lin. soustavu g_1^1 a na k_2 také g_1^1. Z toho plyne, že přímka p odpovídá kuželosečce k_2. Síť kubik S_3^2 je složený lin. systém křivek a jeho složeností je vytvořena, jak známo, Geiserova involuce 8. stupně. Poznamenejme ještě, že body A_3, A_9 tvoří v této involuci homologickou dvojici. Degenerací této involuce se zabývati nebudeme. (V. Hudson: *Cremona transformations*, p. 123.)

IV.

Dva hlavní body sedmého a bod prvního stupně leží v přímce.

Nechť $\overline{A_1A_2A_9} \equiv p$, pak zbývajících šest bodů leží na kuželosečce k_2 $(A_3\, A_4, \ldots, A_8)$. Na obecné kubice svazku S_3^1 se nic nezmění. Na kuželosečce k_2 vytíná síť S_4^2 lin. soustavu g_2^1, neboť v síti existuje jediná kvartika, která obsahuje kuželosečku k_2. Na přímce p síť S_4^2 nevytíná žádnou lin. soustavu. Zvolíme-li na p obecný bod P, pak svazek jím určený se rozpadne na přímku p a svazek kubik S_3^1 $(A_1, A_2, A_3, \ldots, \ldots, A_8)$, který je totožný se svazkem kubik S_3^1. Přímka p je součástí všech homaloidů a nechme ji proto stranou. Přímka p je také součástí hlavní křivky C_1, C_2 a C_9. Je také součástí křivky Δ^8. Dostaneme degenerovanou involuci 13.t supně s charakteristikou $2^6\, 6^4$. Křivka samodružných bodů je Δ^7 $(A_1^3, A_2^3, A_3^2, \ldots, A_8^2)$, rodu 3. Snadno nahlédneme, že A_9 je isolovaný bod samodružný. Křivka Δ^7 protne přímku p ještě v jednom bodě S, který s bodem A_9 vezmeme za samodružné body involuce bodové v přímce p. Dostáváme výsledek: *leží-li 3 hlavní body v přímce, z nichž dva jsou stupně sedmého a jeden stupně prvého, pak involuce J_{14} degeneruje v involuci stupně o jednotku nižšího.*

Svazek S_3^1 vytne na Δ^7 lin. soustavu g_3^1 s 10 dvojnásobnými body. Tedy S_3^1 obsahuje 10 racionálních kubik, jichž dvojnásobné body leží na křivce Δ^7.

Svazek S_4^1, který je určen obecným bodem X, vytne na Δ^7 lin. soustavu g_4^1 s 12 dvojnásobnými body. Tedy S_4^1 obsahuje 12 racionálních ireducibilních kvartik. Volíme-li bod X na některé racionální kubice svazku S_3^1, pak svazek S_4^1 obsahuje 11 ireducibilních racionálních kvartik a jednu rozpadlou. Volíme-li bod X obecně na křivce Δ^7, pak S_4^1 vytne na Δ^7 lin. soustavu g_3^1 s 10 dvojnásobnými body. Tedy svazek S_4^1 obsahuje v tomto případě 11 ireducibilních kvartik racionálních. Když X volíme v některém dvojnásobném bodě racionální kubiky svazku S_3^1 na Δ^7, pak S_4^1 obsahuje 10 racionálních ireducibilních kvartik.

V.

Dva hlavní body čtvrtého stupně a bod prvního stupně leží v přímce.

Nechť $\overline{A_7A_8A_9} \equiv p$, pak šest bodů zbývajících leží na kuželosečce k_2 $(A_1, A_2, A_3, \ldots A_6)$. Síť kvartik S_4^2 vytne na přímce p lin. soustavu g_2^1, neboť existuje jediná kvartika sítě $p \,.\, \overline{A_1A_2} \,.\, k_2$, která obsahuje přímku p. Na kuželosečce k_2 síť S_4^2 nevytíná lin. soustavu. Proto volme bod P na k_2 a jím určený svazek S_4^1 se rozpadne na k_2 a svazek kuželoseček S_2^1 (A_1, A_2, A_7, A_8), který vytne na k_2 lin. soustavu g_2^1. Na obecné kubice svazku S_3^1 se nic nezmění. Kuželosečka k_2 je součástí křivky $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_6$ a křivky Δ^8. Charakteristika této involuce je $2^5, 4^2, 2^4, 1^1$. Stupeň snadno spočítáme podle rovnice

$$\Sigma i_\alpha = 3(n-1)$$

a v našem případě $n = 10$. Křivka samodružných bodů je 6. stupně Δ^6 $(A_1^3, A_2^3, A_3^1, \ldots, A_6^1, A_7^2, A_8^2)$, která je rodu 2. Δ^6 seče kuželosečku k_2 ještě ve dvou bodech, což jsou samodružné body lin. soustavy g_2^1 na k_2. Dostáváme výsledek:

Leží-li tři hlavní body v přímce, z nichž dva jsou stupně čtvrtého a jeden prvního, pak involuce J_{14} degeneruje v involuci stupně o čtyři jednotky nižšího. Podobně jako v předchozích odstavcích lze zjistiti, že S_3^1 obsahuje 10 racionálních ireducibilních kubik, jichž dvojnásobné body leží na Δ^6.

Svazek kvartik S_4^1, určený obecným bodem X, obsahuje 10 rac. ired. kvartik, z nichž se jedna rozpadne, když X leží na některé rac. kubice svazku S_3^1. Když X leží v obecném bodě křivky Δ^6, svazek S_4^1 obsahuje 9 rac. ired. kvartik a když X splyne s některým dvojnásobným bodem ired. rac. kubiky, pak S_4^1 obsahuje pouze 8 rac. ired. kvartik.

Vhodnou kombinací těchto základních případů můžeme dostat degenerovanou involuci stupně 1—14.

*

Sur une involution du degré 14 et sa dégénération. Nous pouvons obtenir cette involution en transformant l'involution de Geiser J_8 par une transformation quadratique T_2. On peut construire cette involution à l'aide d'un réseau des quartiques elliptiques $S_4^2(A_1^2, A_2^2, A_3, \ldots, A_8)$. Le réseau S_4^2 forme un complexe linéaire, qui est „composé". Toutes les quartiques passant par un point P, passent aussi par un point P'. Le couple P, P' est un couple homologique dans notre involution.

Si un point principal du septième ordre et deux points du quatrième ordre sont situés sur une droite, l'ordre de l'involution est réduit d'une unité. Si deux points principaux du septième ordre et un point du quatrième ordre sont situés sur une droite, l'involution est réduite à l'involution de Geiser. Si deux points principaux du septième ordre et un point du premier ordre sont situés sur une droite, l'ordre de l'involution est réduit d'une unité. Si deux points principaux du quatrième ordre et un point du premier ordre sont situés sur une droite, l'ordre de l'involution est réduit de quatre unités.