Cyril Palaj

Sur la signification géométrique de certains invariants simultanés des coniques et des quadriques

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 3, 159--177

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123884

SUR LA SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DE CERTAINS INVARIANTS SIMULTANÉS DES CONIQUES ET DES QUADRIQUES.

CYRIL PALAJ, Trnava.

(Reçu le 29 Mars 1950.)

Si Π est un invariant d'une forme $f(x)$ du $n^{\text{ième}}$ degré aux coefficients a_i, il résulte de la théorie des invariants que la forme

$$\sum \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} b_i, \tag{1}$$

où b_i sont les coefficients correspondants d'une forme $g(x)$ du $n^{\text{ième}}$ degré, est encore un invariant. La différentiation (1) peut être répétée en ajoutant d'autres formes pour obtenir finalement une forme linéaire par rapport aux coefficients de chaque forme. Tous les invariants ainsi formés sont des invariants simultanés des formes correspondantes, ayant le même module que l'invariant Π. Le sujet de cet exposé est la discussion et la recherche de la signification géométrique — tant qu' elle n'est pas connue — des invariants déduits des discriminants des formes quadratiques ternaires et quaternaires par le procédé (1). Dans cette recherche j'emploie systématiquement des déterminants cubiques. On verra que tous ces invariants, ainsi que les covariants des formes quadratiques peuvent être écrits simplement sous la forme de déterminants cubiques, et ainsi ressortira mieux leur relation mutuelle, de même que leur signification géométrique. Le déterminant cubique du $n^{\text{ième}}$ degré est écrit dans le plan de la façon suivante:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} a_{111}a_{112}\ldots a_{11n} & a_{211}a_{212}\ldots a_{21n} & \ldots & a_{n11}a_{n12}\ldots a_{n1n} \\ a_{121}a_{122}\ldots a_{12n} & a_{221}a_{222}\ldots a_{22n} & \ldots & a_{n21}a_{n22}\ldots a_{n2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{1n1}a_{1n2}\ldots a_{1nn} & a_{2n1}a_{2n2}\ldots a_{2nn} & \ldots & a_{nn1}a_{nn2}\ldots a_{nnn} \end{array}\right|$$

le premier indice indique la couche horizontale dans laquelle se trouve l'élement considéré, le deuxième et le troisième indice indiquent la ligne et la colonne du déterminant plan respectif dans cette couche. Pour des raisons pratiques j'omets le premier indice et je distingue les différentes couches horizontales par des lettres. On prend pour valeur du déterminant cubique toujours celle des trois valeurs possibles qui est égale à la somme des termes obtenus en permutant les indices du terme principal $a_{11}b_{22} \ldots n_{nn}$ et en les munissant du signe $(-1)^{u+v}$ où u et v sont les nombres des inversions présentées par les indices.*)

En partant du discriminant A d'une forme quadratique binaire on obtient par la différentiation (1) un seul invariant simultané, à savoir celui lequel, égalé à zéro, exprime l'apolarité des couples de points donnés par les équations quadratiques $\Sigma a_{ij}x_ix_j = 0$, $\Sigma b_{ij}x_ix_j = 0$. On vérifie aisément que cet invariant peut être exprimé sous la forme d'un déterminant cubique

$$|a_{ij}|b_{ij}| \quad \text{ou} \quad |b_{ij}|a_{ij}| \tag{2}$$

où se trouvent entre les traits les tableaux des discriminants des formes f et g. En posant, dans (2), $b_{ij} = a_{ij}$, on a

$$|a_{ij}|a_{ij}| = 2A. \tag{3}$$

En partant du discriminant A d'une forme quadratique ternaire on peut obtenir, par la différentiation (1), trois invariants simultanés différents. La signification géométrique de deux d'entre eux est connue. Ce sont les invariants simultanés Θ_1 et Θ_2 qu'on peut écrire, sous la forme de déterminants cubiques, de la façon suivante:

$$2\Theta_1 = |a_{ij}|a_{ij}|b_{ij}| \tag{4}$$

$$2\Theta_2 = |a_{ij}|b_{ij}|b_{ij}|. \tag{5}$$

On vérifie facilement les relations:

$$\begin{aligned} 2\Theta_1 &= |a_{ij}|a_{ij}|b_{ij}| = |a_{ij}|b_{ij}|a_{ij}| = |b_{ij}|a_{ij}|a_{ij}| \\ 2\Theta_2 &= |a_{ij}|b_{ij}|b_{ij}| = |b_{ij}|a_{ij}|b_{ij}| = |b_{ij}|b_{ij}|a_{ij}|. \end{aligned} \tag{6}$$

Si l'on repète la différentiation (1), appliquée au discriminant A, en ajoutant une autre conique $\Sigma c_{ij}x_ix_j = 0$, on obtient un invariant simultané de trois coniques, lequel s'écrit sous la forme d'un déterminant cubique la façon suivante:

$$\Theta_3 = |a_{ij}|b_{ij}|c_{ij}|. \tag{7}$$

Je n'ai trouvé nulle part la signification géométrique de cet invariant; prêtons-lui notre attention.

Pour étudier la signification géométrique de l'invariant Θ_3, mettons sous la forme d'un déterminant cubique le premier membre de l'équation de l'enveloppe des droites $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, coupant les coniques $f \equiv \Sigma a_{ij}x_ix_j = 0$, $g \equiv \Sigma b_{ij}x_ix_j = 0$ en des couples de points conjugués harmoniques. L'équation de cette enveloppe est**)

*) E. PASCAL: I determinanti, Milano 1900, p. 242 et suiv.

**) Par ex.: SALMON-FIEDLER: Analytische Geom. der Kegelschnitte, 3e édition § 356, équation $\Phi = 0$.

$$S^{(1,2)} \equiv (a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22} - 2a_{23}b_{23})u_1^2 + (a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33} - 2a_{13}b_{13})u_2^2 + (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})u_3^2 + 2(a_{23}b_{13} + a_{13}b_{23} - a_{33}b_{12} - a_{12}b_{33})u_1u_2 + 2(a_{12}b_{23} + a_{23}b_{12} - a_{22}b_{13} - a_{13}b_{22})u_1u_3 + 2(a_{13}b_{12} + a_{12}b_{13} - a_{11}b_{23} - a_{23}b_{11})u_2u_3 = 0.$$

On constate aisément que les expressions entre parenthèses dans cette équation sont les développements de déterminants cubiques du 2e degré, par conséquent l'équation peut s'écrire:

$$S^{(1,2)} \equiv \left|\begin{array}{c|c} a_{22}a_{23} & b_{22}b_{23} \\ a_{23}a_{33} & b_{23}b_{33} \end{array}\right| u_1^2 - \left|\begin{array}{c|c} a_{12}a_{23} & b_{12}b_{23} \\ a_{13}a_{33} & b_{13}b_{33} \end{array}\right| u_1u_2 +$$
$$+ \left|\begin{array}{c|c} a_{12}a_{22} & b_{12}b_{22} \\ a_{13}a_{23} & b_{13}b_{23} \end{array}\right| u_1u_3 - \left|\begin{array}{c|c} a_{12}a_{13} & b_{12}b_{13} \\ a_{23}a_{33} & b_{23}b_{33} \end{array}\right| u_1u_2 + \left|\begin{array}{c|c} a_{11}a_{13} & b_{11}b_{13} \\ a_{13}a_{33} & b_{13}b_{33} \end{array}\right| u_2^2 -$$
$$- \left|\begin{array}{c|c} a_{11}a_{12} & b_{11}b_{12} \\ a_{13}a_{23} & b_{13}b_{23} \end{array}\right| u_2u_3 + \left|\begin{array}{c|c} a_{12}a_{13} & b_{12}b_{13} \\ a_{22}a_{23} & b_{22}b_{23} \end{array}\right| u_1u_3 - \left|\begin{array}{c|c} a_{11}a_{13} & b_{11}b_{13} \\ a_{12}a_{23} & b_{12}b_{23} \end{array}\right| u_2u_3 +$$
$$+ \left|\begin{array}{c|c} a_{11}a_{12} & b_{11}b_{12} \\ a_{12}a_{22} & b_{12}b_{22} \end{array}\right| u_3^2 = 0.$$

Mais le premier membre de cetee équation est le développement, par rapport à la couche des éléments u_iu_j, du déterminant cubique du troisième degré et l'équation $S^{(1,2)} = 0$ peut s'écrire ainsi:

$$\left|\begin{array}{c|c|c} a_{11}a_{12}a_{13} & b_{11}b_{12}b_{13} & u_1^2,\ u_1u_2,\ u_1u_3 \\ a_{12}a_{22}a_{23} & b_{12}b_{22}b_{23} & u_1u_2,\ u_2^2,\ u_2u_3 \\ a_{13}a_{23}a_{33} & b_{13}b_{23}b_{33} & u_1u_3,\ u_2u_3,\ u_3^2 \end{array}\right| = 0 .$$

ou plus simplement

$$S^{(1,2)} \equiv |a_{ij}|b_{ij}|u_iu_j| = 0. \tag{8}$$

L'enveloppe des droites, coupant les coniques f et $h \equiv \Sigma c_{ij}x_ix_j = 0$ en des couples de points conjugués harmoniques a d'après (8) l'équation

$$S^{(1,3)} \equiv |a_{ij}|c_{ij}|u_iu_j| = 0 \tag{9}$$

et l'enveloppe des droites, coupant les coniques g et h en des couples de points conjugués harmoniques a l'équation

$$S^{(2,3)} \equiv |b_{ij}|c_{ij}|u_iu_j| = 0. \tag{10}$$

Pour que la conique h soit polarement circonscrite à la conique $S^{(1,2)}$, il faut que la somme des produits des coefficients correspondants de l'équation ponctuelle $h(x) = 0$ et de l'équation tangentielle $S^{(1,2)}(u) = 0$ soit nulle. En posant, dans (8), $u_iu_j = c_{ij}$, on a

$$|a_{ij}|b_{ij}|c_{ij}| = \Theta_3 = 0.$$

Pour que la conique g soit polairement circonscrite à la conique $S^{(1,3)}$, il faut de même que

$$|a_{ij}|c_{ij}|b_{ij}| = |a_{ij}|b_{ij}|c_{ij}| = \Theta_3 = 0.$$

Pareillement, la condition pour que a conique f soit polairement circonscrite à la conique $S^{(2,3)}$, s'écrit

$$|b_{ij}|c_{ij}|a_{ij}| = |a_{ij}|b_{ij}|c_{ij}| = \Theta_3 = 0.$$

Dans chaque cas nous aboutissons à la condition $\Theta_3 = 0$.

Réciproquement, si pour trois coniques f, g, et h on a $\Theta_3 = 0$, la conique f est circonscrite polairement, d'après (10), à la conique $S^{(2,3)}$, g est, d'après (9), circonscrite polairement à $S^{(1,3)}$ et la conique h est, d'après (8), circonscrite polairement à la conique $S^{(1,2)}$. On peut donc énoncer le théorème:

I. *Si chacune de trois coniques est circonscrite polairement à l'enveloppe des droites coupant les deux autres coniques suivant des couples de points conjugués harmoniques, ces trois coniques sont liées par la condition $\Theta_3 = 0$, et réciproquement, si pour trois coniques l'invariant Θ_3 est nul, chacune d'elles est circonscrite polairement à l'enveloppe des droites coupant les deux autres suivant des couples de points conjugués harmoniques.*

Il résulte du théorème n^0 I:

II. *Si trois coniques sont liées par la relation $\Theta_3 = 0$, chacune d'elles a une infinité de triangles polaires dont tous les côtés coupent les deux autres coniques suivant des couples de points conjugués harmoniques. Les côtés de ces triangles polaires touchent la courbe S de ces deux coniques.*

La signification géométrique des invariants Θ_1 et Θ_2, qui est connue, découle directement du premier théorème. En effet, si les coniques f et h se confondent, on a $c_{ij} = a_{ij}$. Donc l'équation (9) prend la forme

$$|a_{ij}|a_{ij}|u_i u_j| = 2\Sigma A_{ij} u_i u_j = 0,$$

ce qui est l'équation tangentielle de la conique f. Ainsi, si les coniques f et g se confondent, l'enveloppe des droites, coupant ces coniques suivant des couples de points conjugués harmoniques, est confondue avec elles. Les droites enveloppant la conique $S^{(1,3)}$ sont les tangentes de la conique $f \equiv g$ et les couples des points conjugués harmoniques respectifs se confondent avec les points de contact de ces tangentes. Donc, la condition

$$|a_{ij}|a_{ij}|b_{ij}| = 2\Theta_1 = 0$$

signifie que la conique g est polairement circonscrite a la conique f.

L'analogue a lieu pour l'invariant Θ_2.

Afin que la conique f soit circonscrite polairement a la courbe $S^{(1,2)}$, il faut que

$$|a_{ij}|b_{ij}|b_{ij}| = 2\Theta_1 = 0.$$

Afin que la conique f soit circonscrite polairement à la conique $S^{(1,2)}$, il faut que

$$|a_{ij}|b_{ij}|b_{ij}| = 2\Theta_2 = 0.$$

En prenant compte de la signification géométrique des invariants simultanés Θ_1 et Θ_2, on a le résultat:

III. *Si la première de deux coniques, prises dans un certain ordre est circonscrite polairement à la deuxième, la deuxième est en même temps circonscrite polairement à la courbe S de ces deux coniques.*

En posant, dans l'invariant Θ_3, $c_{ij} = b_{ij} = a_{ij}$, on obtient le discriminant de la conique f, d'après la relation

$$|a_{ij}|a_{ij}|a_{ij}| = 6A. \tag{11}$$

Si les coniques f et g ont un triangle polaire commun et si l'on prend ses côtés pour axes de coordonnées, la condition $\Theta_3 = 0$ s'écrit

$$\Theta_3 \equiv a_{11}(b_{22}c_{33} + b_{33}c_{22}) + a_{22}(b_{11}c_{33} + b_{33}c_{11}) + a_{33}(b_{11}c_{22} + b_{22}c_{11}) = 0.$$

Cette équation sera satisfaite en posant $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0$. Alors l'équation de la conique h à la forme

$$h \equiv c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{23}x_2x_3 = 0,$$

ce qui signifie cette conique passe par les sommets du triangle. On a le résultat:

IV. *Si une de trois coniques est circonscrite au triangle polaire commun aux deux autres coniques, ces trois coniques sont liées par la condition* $\Theta_3 = 0$, *c. à d., les trois coniques sont dans une telle position mutuelle que chacune d'elles est circonscrite polairement à la courbe* S *des deux autres.*

Les théorèmes obtenus donnent lieu aux théorèmes duels suivants:

I′ *Si chacune de trois coniques est inscrite polairement au lieu géométrique des points tels que les couples de tangentes menées par ces points aux deux autres coniques sont conjugués harmoniques; ces trois coniques satisfont à la relation:*

$$\bar{\Theta}_3 \equiv |A_{ij}|B_{ij}|C_{ij}| = 0,$$

et réciproquement, si trois coniques sont liées par la relation $\bar{\Theta}_3 = 0$, *chacune d'elles est inscrite polairement au lieu géométrique des points tels que les couples de tangentes menées par ces points aux deux autres coniques sont conjugués harmoniques.*

II′ *Si trois coniques sont liées par la relation* $\bar{\Theta}_3 = 0$, *chacune d'elles possède une infinité de triangles polaires tels que les couples de tangentes menées de leurs sommets aux deux autres coniques sont conjugués harmoniques. Les sommets de ces triangles polaires se trouvent sur la courbe*

$$\bar{S} \equiv |\alpha_{ij}|\beta_{ij}|x_ix_j| = 0,$$

où α_{ij}, β_{ij} *sont les coefficients des équations tangentielles de ces deux coniques.*

III′ *Si l'on a deux coniques dont la première est inscrite polairement à la deuxième, la deuxième est en même temps inscrite polairement à la courbe* $\bar{S}$ *de ces deux coniques.*

IV′ *Si l'une des trois coniques est inscrite au triangle polaire commun aux deux autres coniques, ces trois coniques sont liées par la relation* $\Theta_3 = 0$, *c. à d. les trois coniques sont dans une telle position mutuelle que chacune d'elles est inscrite polairement à la courbe* $\bar{S}$ *des deux autres.*

Ayant trouvé la signification géométrique de l'invariant simultané Θ_3 de trois coniques, nous connaissons la signification géométrique de tous les invariants simultanés obtenus par l'opération (1) appliquée au discriminant de la conique. Il est évident que c'est Θ_3 qui est, parmi les invariants considérés, l'invariant fondamental, des propriétés duquel découlent comme cas particuliers celles des autres invariants.

Quant aux invariants simultanés obtenus par la différentiation (1) appliquée au discriminant d'une forme quadratique quaternaire, on connaît la signification géométrique des invariants renfermant seulement les coefficients de deux de ces formes. Ce sont les invariants simultanés bien connus Θ_1, Θ_2 et Φ. Mais, tant que je sache, on ne connaît pas même pour l'invariant Φ une propriété géométrique pour laquelle $\Phi = 0$ soit une condition nécessaire et suffisante dans tous les cas. Je n'ai nulle part trouvé la signification géometrique des invariants contenant les coefficients de trois et quatre quadriques. Occupons-nous donc de ces invariants, ainsi que de l'invariant Φ.

Écrivons d'abord les invariants simultanés Θ_1, Θ_2 et Φ sous la forme de déterminants cubiques; nous en aurons besoin dans la suite. Si l'on écrit l'invariant Θ_1 sous la forme d'un déterminant cubique, on aura, d'aprés (11), la relation

$$|a_{ij}|a_{ij}|a_{ij}|b_{ij}| = 6\Theta_1. \tag{12}$$

En posant dans (12) $b_{ij} = a_{ij}$, on obtient

$$|a_{ij}|a_{ij}|a_{ij}|a_{ij}| = 24A. \tag{13}$$

D'une façon analogue

$$|a_{ij}|b_{ij}|b_{ij}|b_{ij}| = 6\Theta_2 \tag{14}$$

et pour $a_{ij} = b_{ij}$

$$|b_{ij}|b_{ij}|b_{ij}|b_{ij}| = 24B. \tag{15}$$

Remplaçons la troisième couche du déterminant cubique du premier membre de la relation (12) par le tableau carré des éléments b_{ij}, ou bien la deuxième couche du déterminant cubique du premier membre de la relation (14) par le tableau des éléments a_{ij}, nous aurons le déterminant

$$|a_{ij}|a_{ij}|b_{ij}|b_{ij}|. \tag{16}$$

Il existe pour le déterminant cubique, un théorème analogue à celui de Laplace valable pour le déterminant ordinaire. En effet, on peut exprimer le déterminant cubique (16) comme la somme de 36 produits de déterminants cubiques associés du second degré, de telle sorte que ce déterminant cubique est égal à la somme

$$\Sigma \pm \begin{vmatrix} a_{rt}a_{ru} & a_{rt}a_{ru} \\ a_{st}a_{su} & a_{st}a_{su} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{r't'}b_{r'u'} & b_{r't'}b_{r'u'} \\ b_{s't'}b_{s'u'} & b_{s't'}b_{s'u'} \end{vmatrix} \tag{17}$$

où r, s, r', s' et t, u, t', u' sont les permutations des nombres 1, 2, 3, 4. Le signe de chacun de ces produits est le même que le signe de $(-1)^{r+s+t+u}$.

En développant le déterminant du second degré dans la somme (17), on a, d'après (3),

$$4\Sigma(-1)^{r+s+t+u}A_{r,s;\,t,u}B_{r',s';\,t',u'} \tag{18}$$

ou $A_{r,s;\,t,u}$, $B_{r',s';\,t',u'}$ sont les mineurs du second degré du discriminant A ou B respectivement. On sait que l'expression (18) a la valeur 4Φ*). Donc, on a

$$|a_{ij}|a_{ij}|b_{ij}|b_{ij}| = 4\Phi. \tag{19}$$

De cette façon, tous les trois invariants simultanés de deux quadriques, que nous avons mentionés, sont mis sous la forme de déterminants cubiques. Occupons-nous maintenant des invariants simultanés de trois et quatre quadriques. Dans ce but, mettons sous la forme d'un déterminant cubique l'équation de l'enveloppe des plans $\Sigma u_i x_i = 0$ dont les intersections avec les quadriques $f \equiv \Sigma a_{ij}x_ix_j = 0$, $g \equiv \Sigma b_{ij}x_ix_j = 0$ sont des couples de coniques telles que la conique située sur g est circonscrite polairement à celle située sur f. Son équation est

$$\tau^{**}) \equiv \begin{vmatrix} b_{11}a_{12}a_{13}a_{14}u_1 \\ b_{12}a_{22}a_{23}a_{24}u_2 \\ b_{13}a_{23}a_{33}a_{34}u_3 \\ b_{14}a_{24}a_{34}a_{44}u_4 \\ 0\ \ u_2\ u_3\ u_4\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{12}a_{13}a_{14}u_1 \\ a_{12}b_{22}a_{23}a_{24}u_2 \\ a_{13}b_{23}a_{33}a_{34}u_3 \\ a_{14}b_{24}a_{34}a_{44}u_4 \\ u_1\ 0\ \ u_3\ u_4\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}b_{13}a_{14}u_1 \\ a_{12}a_{22}b_{23}a_{24}u_2 \\ a_{13}a_{23}b_{33}a_{34}u_3 \\ a_{14}a_{24}b_{34}a_{44}u_4 \\ u_1\ u_2\ 0\ \ u_4\ 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}b_{14}u_1 \\ a_{12}a_{22}a_{23}b_{24}u_2 \\ a_{13}a_{23}a_{33}b_{34}u_3 \\ a_{14}a_{24}a_{34}b_{44}u_4 \\ u_1\ u_2\ u_3\ 0\ \ 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant les déterminants dans cette équation, elle prend la forme

$$\Sigma b_{rs}(A_{ij})_{rs}u_iu_j = 0, \tag{20}$$

où A_{ij} sont les mineurs du discriminant de la quadrique f correspondant aux éléments a_{ij} et $(A_{ij})_{rs}$ sont les mineurs A_{ij} correspondant aux éléments a_{rs}. En prenant compte de (20), on vérifie facilement la relation

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{12}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{13}a_{23}a_{33}a_{34} \\ a_{14}a_{24}a_{34}a_{44} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{12}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{13}a_{23}a_{33}a_{34} \\ a_{14}a_{24}a_{34}a_{44} \end{matrix} \begin{vmatrix} b_{11}b_{12}b_{13}b_{14} \\ b_{12}b_{22}b_{23}b_{24} \\ b_{13}b_{23}b_{33}b_{34} \\ b_{14}b_{24}b_{34}b_{44} \end{vmatrix} \begin{matrix} u_1^2, & u_1u_2, & u_1u_3, & u_1u_4 \\ u_1u_2, & u_2^2, & u_2u_3, & u_2u_4 \\ u_1u_3, & u_2u_3, & u_3^2, & u_3u_4 \\ u_1u_4, & u_2u_4, & u_3u_4, & u_4^2 \end{matrix} \Bigg| \equiv 2\tau.$$

L'enveloppe des plans dont les intersections avec les quadriques f et g sont des coniques telles que la conique se trouvant sur g est circonscrite polairement à la conique située sur f, a l'équation

$$S \equiv |a_{ij}|a_{ij}|b_{ij}|u_iu_j| = 0. \tag{21}$$

*) Dr Bydžovský: Úvod do algebraické geometrie, § 114, Praha 1948.

**) Salmon-Fiedler: Analytische Geometrie des Raumes, 3e édition, § 214.

En échangeant les coefficients a_{ij} et b_{ij}, on trouve que l'équation

$$S' \equiv |a_{ij}|b_{ij}|b_{ij}|u_i u_j| = 0 \tag{22}$$

est l'équation de la quadrique enveloppée par les plans dont les intersections avec les quadriques f et g sont des coniques telles que la conique située sur f est circonscrite polairement à la conique sur g.

Pour que la quadrique $h \equiv \Sigma c_{ij} x_i x_j = 0$ soit circonscrite polairement à la quadrique définie par l'équation tangentielle (21), il faut que la somme des produits des coefficients correspondants de l'équation ponctuelle de la quadrique h et de l'équation tangentielle (21) soit nulle; il faut donc que

$$|a_{ij}|a_{ij}|b_{ij}|c_{ij}| = 2\Theta_3^{(1)} = 0. \tag{23}$$

Pour que la quadrique (22) soit circonscrite polairement à la quadrique h, il faut, d'une façon analogue, que

$$|a_{ij}|b_{ij}|b_{ij}|c_{ij}| = 2\Theta_3^{(2)} = 0. \tag{24}$$

L'enveloppe des plans dont les intersections avec les quadriques f et h sont des coniques, telles que la conique située sur f est polairement circonscrite à celle située sur h, a, d'après (21), l'équation

$$|a_{ij}|c_{ij}|c_{ij}|u_i u_j| = 0. \tag{25}$$

Pour que la quadrique g soit circonscrite polairement à cette quadrique, il faut que

$$|a_{ij}|b_{ij}|c_{ij}|c_{ij}| = 2\Theta_3^{(3)} = 0. \tag{26}$$

En prenant compte de ce que l'échange des couches parallèles ne change pas la valeur nulle du déterminant cubique, on voit que les coefficients des équations des quadriques g et h dans l'èquation (23), les coefficients des équations des quadriques f et h dans l'équation (24) et les coefficients des équations des quadriques f et g dans l'équation (25), ont la même position; ce qui est valable pour l'un de ces couples de quadriques est valable encore pour l'autre, en échangeant les quadriques.

Réciproquement, si trois quadriques sont liées par la relation $\Theta_3^{(1)} = 0$, la quadrique h est circonscrite polairement à la quadrique (21) et la quadrique g est circonscrite polairement à la quadrique

$$|a_{ij}|a_{ij}|c_{ij}|u_i u_j| = 0,$$

c. à d. à l'enveloppe des plans dont les intersections avec les quadriques f et h sont des coniques, telles que la conique située sur h soit circonscrite polairement à celle située sur f. Si $\Theta_3^{(2)} = 0$, la quadrique h est circonscrite polairement à la quadrique (22) et la quadrique f est circonscrite polairement à la quadrique

$$|b_{ij}|b_{ij}|c_{ij}|u_i u_j| = 0,$$

c. à d. à l'enveloppe des plans dont les intersections avec les quadriques g et h sont des coniques telles que la conique située sur h est circonscrite polairement à celle située sur g. Et finalement, si $\Theta_3^{(3)} = 0$, la quadrique g est circonscrite polairement à la quadrique (25) et la quadrique f est circonscrite polairement à la quadrique

$$|b_{ij}|c_{ij}|c_{ij}|u_iu_j| = 0,$$

c. à d. à l'enveloppe des plans dont les intersections avec les quadriques g et h sont des coniques telles que la conique situé sur g soit circonscrite polairement à celle située sur h. Donc nous avons le résultat:

V. *Si deux des trois quadriques ont une telle position que chacune de ces deux quadriques est circonscrite polairement à l'enveloppe des plans dont les intersections avec les deux autres quadriques sont des coniques, telles que celle située sur la deuxième de ces quadriques est circonscrite polairement à celle située sur la troisième quadrique, alors pour ces trois quadriques, le déterminant cubique du quatrième degré $\Theta_3^{(i)}$ est égal à zéro. Ce déterminant est formé des tableaux des discriminants de ces quadriques de telle sorte que le tableau du discriminant de chacune des deux quadriques mentionées se trouve chacun dans une couche et le tableau du discriminant de la troisième quadrique dans deux couches. Et réciproquement.*

Pour $\Theta_3^{(1)} = 0$, il en résulte ce théorème:

VI. *Si $\Theta_3^{(1)} = 0$, la quadrique g a une infinité de tetraèdres polaires dont les quatre faces coupent les quadriques f et h en des coniques dont celle située sur h, est circonscrite polairement à celle située sur f, et en même temps, la quadrique h a une infinité de tetraèdres polaires dont les quatre faces coupent les quadriques f et g en des coniques, dont celle située sur g est circonscrite polairement à celle située sur f.*

On a des théorèmes analogues pour $\Theta_3^{(2)} = 0$ et $\Theta_3^{(3)} = 0$ en échangeant, dans l'enoncé précédent, les quadriques correspondantes.

Si l'on pose, dans l'équation (23), $c_{ij} = a_{ij}$ et dans l'équation (24) $c_{ij} = b_{ij}$, on obtient, en échangeant les couches correspondantes du déterminant, d'une part l'équation (12), de l'autre part l'équation (14). De plus, si l'on pose dans l'équation (21) ou (22) $b_{ij} = a_{ij}$ on a la relation

$$|a_{ij}|a_{ij}|a_{ij}|u_iu_j| = 6\Sigma A_{ij}u_iu_j = 0,$$

ce qui est l'équation tangentielle de la quadrique f. Donc, si les deux quadriques se confondent, l'enveloppe des plans coupant les deux quadriques en des coniques conjuguées se confond avec elles. Vu la signification géometrique des invariants $\Theta_3^{(r)}$, on a:

VII. *Si de deux quadriques, prises dans un certain ordre, la première est circonscrite à la seconde, la seconde est en même temps circonscrite à l'enveloppe des plans dont les intersections avec les deux quadriques sont des coniques telles que la conique située sur la première est circonscrite à la conique située sur la seconde.*

Si l'on pose dans l'équation (23) $c_{ij} = b_{ij}$ et $c_{ij} = a_{ij}$ dans (24), on obtient, en échangeant les couches, d'après (19), la condition $\Phi = 0$. Mais l'équation (21) est l'équation de l'enveloppe des plans dont les intersections avec les quadriques f et g sont des coniques telles que la conique située sur la quadrique g est circonscrite polairement à la conique située sur la quadrique f. La condition pour que la quadrique g soit circonscrite polairement à cette enveloppe, s'obtient en posant, dans (21), b_{ij} au lieu de $u_i u_j$; ceci donne

$$|a_{ij}|a_{ij}|b_{ij}|b_{ij}| = 4\Phi = 0.$$

De même, pour que la quadrique f soit circonscrite polairement à l'enveloppe des plans coupant les quadriques f et g en des coniques, dont celle située f est circonscrite polairement à celle située sur g, la condition $\Phi = 0$ doit avoir lieu, ce qu'on obtient en remplaçant, dans (22), les $u_i u_j$ par les coefficients a_{ij}. Réciproquement, si pour les quadriques f et g on a $\Phi = 0$, la quadrique f est circonscrite polairement à la quadrique (22) et la quadrique g est circonscrite polairement à la quadrique (21). Donc, le théorème a lieu:

VIII. *Ayant donné deux quadriques f et g, si la quadrique f est circonscrite polairement à l'enveloppe des plans coupant ces deux quadriques en des coniques, dont celle située sur f est circonscrite polairement à celle située sur g, la relation $\varphi = 0$ a lieu, et réciproquement. En ce cas la quadrique g est polairement circonscrite à l'enveloppe des plans coupant ces deux quadriques en des coniques dont celle située sur g est circonscrite polairement à celle située sur f, ces deux quadriques sont liées par la relation $\Phi = 0$, et réciproquement.*

Il en résulte:

IX. *Si la relation $\Phi = 0$ a lieu pour deux quadriques f et g, la quadrique f possède une infinité de tetraèdres polaires dont les quatre faces coupent les quadriques f et g en des coniques dont celle située sur f est circonscrite polairement à celle située sur g. Les faces de ces tetraèdres polaires sont tangentes à la quadrique S' de ces deux quadriques. La quadrique g possède une infinité de tetraèdres polaires dont les quatre faces coupent les quadriques f et g en des coniques dont celle située sur g est circonscrite polairement à celle située sur f. Les faces de ces tetraèdres polaires sont tangentes à la quadrique S de ces quadriques.*

Passons à l'invariant simultané de quatre quadriques $f \equiv \Sigma a_{ij} x_i x_j = 0$, $g \equiv \Sigma b_{ij} x_i x_j = 0$, $h \equiv \Sigma c_{ij} x_i x_j = 0$, $k \equiv \Sigma d_{ij} x_i x_j = 0$, donné par le déterminant cubique du quatrième degré, dans lequel les quatre couches sont les tableaux des discriminants des quadriques f, g, h, k, c. à d., à l'invariant

$$|a_{ij}|b_{ij}|c_{ij}|d_{ij}|. \tag{27}$$

Pour trouver la signification géométrique de cet invariant, cherchons l'enveloppe des plans $\varrho \equiv \Sigma u_i x_i = 0$ coupant les quadriques f, g, h en des coniques dont chacune est circonscrite polairement à l'enveloppe des droites coupant les deux autres coniques en des couples de points conjugués harmoniques, c. à d. à la courbe S des deux autres coniques. En éliminant la variable x_4 entre l'équation du plan ϱ et l'équation de la quadrique f, on obtient dans le plan $x_4 = 0$, l'équation de la projection du sommet O_4 de la courbe d'intersection respective:

$$(a_{11}u_4^2 + a_{44}u_1^2 - 2a_{14}u_1u_4)x_1^2 + (a_{22}u_4^2 + a_{44}u_2^2 - \\ - 2a_{24}u_2u_4)x_2^2 + (a_{33}u_4^2 + a_{44}u_3^2 - 2a_{34}u_3u_4)x_3^2 + 2(a_{44}u_1u_2 + a_{12}u_4^2 - \\ - a_{14}u_2u_4 - a_{24}u_1u_4)x_1x_2 + 2(a_{44}u_1u_3 + a_{13}u_4^2 - a_{14}u_3u_4 - a_{34}u_1u_4) \cdot \\ \cdot x_1x_3 + 2(a_{44}u_2u_3 + a_{23}u_4^2 - a_{24}u_3u_4 - a_{34}u_2u_4)x_2x_3 = 0.$$

Si, dans cette équation, on remplace les coefficients a_{ij} par les coefficients b_{ij} et par les coefficients c_{ij}, on obtient les équations analogues pour les quadriques g et h. Comme il s'agit d'une propriété projective des coniques dans le plan ϱ, il suffit d'exprimer la condition correspondante pour les projections de ces coniques dans le plan $x_4 = 0$. Pour que chacune de ces coniques soit circonscrite polairement à la courbe S des deux autres coniques, il faut qu'elles vérifient la relation $\Theta_3 = 0$, c. à. d. il faut que

$$|\alpha_{ij}|\beta_{ij}|\gamma_{ij}| = 0, \tag{28}$$

où α_{ij}, γ_{ij}, β_{ij} sont les coefficients des équations des projections de ces coniques dans le plan $x_4 = 0$. En développant le déterminant cubique dans l'équation (28), en simplifiant et en ordonnant par rapport à u, on obtient l'équation de l'enveloppe des plans cherchée sous la forme

$$P \equiv K_{u11}u_1^2 + K_{u22}u_2^2 + K_{u33}u_3^2 + K_{u44}u_4^2 + \\ + 2K_{u12}u_1u_2 + 2K_{u13}u_1u_3 + 2K_{u14}u_1u_4 + 2K_{u23}u_2u_3 \\ + 2K_{u24}u_2u_4 + 2K_{u34}u_3u_4 = 0,$$

où

$$P \equiv \sum_{i,j=1}^{4} K_{uij}u_iu_j = 0 \tag{29}$$

où $K_{uji} = K_{uij}$. En étudiant les polynômes K_{uij}, on constate que ce sont des développements de déterminants cubiques du troisième degré, à savoir des sousdéterminants du déterminant cubique du quatrième degré

$$P \equiv \left| \begin{array}{c|c|c|c} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} & b_{11}b_{12}b_{13}b_{14} & c_{11}c_{12}c_{13}c_{14} & u_1^2,\ u_1u_2,\ u_1u_3,\ u_1u_4 \\ a_{12}a_{22}a_{23}a_{24} & b_{12}b_{22}b_{23}b_{24} & c_{12}c_{22}c_{23}c_{24} & u_1u_2,\ u_2^2,\ u_2u_3,\ u_2u_4 \\ a_{13}a_{23}a_{33}a_{34} & b_{13}b_{23}b_{33}b_{34} & c_{13}c_{23}c_{33}c_{34} & u_1u_3,\ u_2u_3,\ u_3^2,\ u_3u_4 \\ a_{14}a_{24}a_{34}a_{44} & b_{14}b_{24}b_{34}b_{44} & c_{14}c_{24}c_{34}c_{44} & u_1u_4,\ u_2u_4,\ u_3u_4,\ u_4^2 \end{array} \right|$$

qui correspondent aux éléments u_iu_j de la couche correspondante. Le premier membre de l'équation (29) est donc le déterminant cubique

$$P \equiv |a_{ij}|b_{ij}|c_{ij}|u_iu_j|.$$

On a le résultat:

X. *L'enveloppe des plans dont les intersections avec les quadriques f, g, h sont des coniques telles que chacune d'elles est circonscrite polairement à l'enveloppe des droites coupant les deux autres coniques en des couples de points conjugués harmoniques, a pour équation*

$$P \equiv |a_{ij}|b_{ij}|c_{ij}|u_iu_j| = 0. \tag{30}$$

Pour que la quadrique k soit polairement circonscrite à la quadrique P, la somme des produits des coefficients correspondants de l'équation ponctuelle de la quadrique k et de l'équation tangentielle de la quadrique P, doit être nulle. Pour former cette relation il suffit de poser, dans l'équation (30), les cofficients d_{ij} au lieu des $u_i u_j$. On doit donc avoir

$$\Theta_4 \equiv |a_{ij}|b_{ij}|c_{ij}|d_{ij}| = 0. \tag{31}$$

Réciproquement, si quatre quadriques f, g, h et k sont liées par la relation $\Theta_4 = 0$, la quadrique k est circonscrite polairement à la quadrique (30), la quadrique h est circonscrite polairement à la quadrique

$$|a_{ij}|b_{ij}|d_{ij}|u_i u_j| = 0,$$

la quadrique g est circonscrite polairement à la quadrique

$$|a_{ij}|c_{ij}|d_{ij}|u_i u_j| = 0$$

et la quadrique f est circonscrite polairement à la quadrique

$$|b_{ij}|c_{ij}|d_{ij}|u_i u_j| = 0.$$

Ainsi, vu le théorème n^0 X, chacune de ces quatre quadriques est circonscrite polairement à l'enveloppe des plans dont les intersections avec les trois autres quadriques sont des coniques telles, que chacune d'elles est circonscrite polairement à l'enveloppe des droites coupant les deux autres coniques en des couples de points conjugués harmoniques. On a le résultat:

XI. *Si quatre quadriques sont dans une position mutuelle telle que chacune d'elles est circonscrite polairement à l'enveloppe des plans dont les intersections avec les trois autres quadriques sont des coniques telles que chacune d'elles est circonscrite polairement à l'enveloppe des droites coupant les deux autres coniques en des couples de points conjugués harmoniques, ces quatre quadriques sont liées par la relation $\Theta_4 = 0$. Et réciproquement.*

En posant $d_{ij} = c_{ij}$, la condition $\Theta_4 = 0$ se réduit à $\Theta_3^{(3)} = 0$. De même, on obtiendra les conditions $\Theta_3^{(2)} = 0$ et $\Theta_3^{(1)} = 0$ en faisant confondre la quadrique k avec la quadrique g ou f. Donc, on peut compléter le théorème n^0 VI, d'après le théorème précédent, en tenant compte de la signification géométrique de l'invariant $\Theta_3^{(r)}$ pour une quadrique dont le discriminant figure dans deux couches de ce déterminant cubique de la manière suivante:

XII. *Si trois quadriques sont liées par la relation $\Theta_3^{(r)} = 0$, la quadrique, dont le discriminant figure dans deux couches de ce d'éterminant cubique est circonscrite polairement à l'enveloppe des plans dont les intersections avec les trois quadriques sont des coniques telles que chacune d'elles est circonscrite polairement à l'enveloppe des droites coupant les deux autres coniques en des couples de points conjugués harmoniques.*

Si les quadriques f et g ont un tétraèdre polaire commun, prenons-le pour tétraèdre de référence. Pour que les quatre quadriques f, g, h, k

soient dans une telle position mutuelle que chacune d'elles soit circonscrite polairement à la surface P des trois autres quadriques, il faut que la relation ait lieu:

$$\Theta_4 \equiv \left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} a_{11} & 0 & 0 & 0 & b_{11} & 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & b_{22} & 0 & 0 & c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & d_{12} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & b_{33} & 0 & c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 & b_{44} & c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} \end{array}\right| = 0. \qquad (32)$$

En développant le déterminant du premier membre de cette équation, on aura

$$b_{11}\left(a_{22}\left|\begin{array}{cc|cc} c_{33} & c_{34} & d_{33} & d_{34} \\ c_{34} & c_{44} & d_{34} & d_{44} \end{array}\right| + a_{33}\left|\begin{array}{cc|cc} c_{22} & c_{24} & d_{22} & d_{24} \\ c_{24} & c_{44} & d_{24} & d_{44} \end{array}\right| + a_{44}\left|\begin{array}{cc|cc} c_{24} & c_{23} & d_{22} & d_{23} \\ c_{23} & c_{33} & d_{23} & d_{33} \end{array}\right|\right) +$$

$$+ b_{22}\left(a_{11}\left|\begin{array}{cc|cc} c_{33} & c_{34} & d_{33} & d_{34} \\ c_{34} & c_{44} & d_{34} & d_{44} \end{array}\right| + a_{33}\left|\begin{array}{cc|cc} c_{11} & c_{14} & d_{11} & d_{14} \\ c_{14} & c_{44} & d_{14} & d_{44} \end{array}\right| + a_{44}\left|\begin{array}{cc|cc} c_{11} & c_{13} & d_{11} & d_{13} \\ c_{13} & c_{33} & d_{13} & d_{33} \end{array}\right|\right) +$$

$$+ b_{33}\left(a_{11}\left|\begin{array}{cc|cc} c_{22} & c_{24} & d_{22} & d_{24} \\ c_{24} & c_{44} & d_{24} & d_{44} \end{array}\right| + a_{22}\left|\begin{array}{cc|cc} c_{11} & c_{14} & d_{11} & d_{14} \\ c_{14} & c_{44} & d_{14} & d_{44} \end{array}\right| + a_{44}\left|\begin{array}{cc|cc} c_{11} & c_{12} & d_{11} & d_{12} \\ c_{12} & c_{22} & d_{12} & d_{22} \end{array}\right|\right) +$$

$$+ b_{44}\left(a_{11}\left|\begin{array}{cc|cc} c_{22} & c_{23} & d_{22} & d_{23} \\ c_{23} & c_{33} & d_{23} & d_{33} \end{array}\right| + a_{22}\left|\begin{array}{cc|cc} c_{11} & c_{13} & d_{11} & d_{13} \\ c_{13} & c_{33} & d_{13} & d_{33} \end{array}\right| + a_{33}\left|\begin{array}{cc|cc} c_{11} & c_{12} & d_{11} & d_{12} \\ c_{12} & c_{22} & d_{12} & d_{22} \end{array}\right|\right) = 0.$$

Cette équation est satisfaite si chaque déterminant cubique du second degré figurant dans cette équation est égal a zéro, c. à d. si

$$\left|\begin{array}{cc|cc} c_{ii} & c_{ij} & d_{ii} & d_{ij} \\ c_{ij} & c_{jj} & d_{ij} & d_{jj} \end{array}\right| = 0, \ i < j; \ i = 1, 2, 3; \ j = 3, 2, 4. \qquad (33)$$

Le premier membre de cette relation est l'invariant simultané (2) des équations quadriques

$$c_{ii}x_i^2 + c_{jj}x_j^2 + 2c_{ij}x_ix_j = 0, \ d_{ii}x_i^2 + d_{jj}x_j^2 + 2d_{ij}x_ix_j = 0,$$

donnant les intersections de l'axe o_{ij} avec les quadriques h et k. La valeur nulle de l'expression donnée par (33) exprime la position harmonique de ces intersections. Donc on a le théorème:

XIII. *S'il existe un tetraèdre polaire commun aux deux quadriques, dont les arêtes coupent deux autres quadriques en des couples de points conjugués harmoniques, ces quatre quadriques sont liées par la relation* $\Theta_4 = 0$, *c. à d. le théorème n⁰ XI est valable pour elles.*

Posons, dans la relation (32), $d_{ij} = c_{ij}$. Elle se réduit à la relation $\Theta_3^{(3)} = 0$. La formule (33) divisée par deux prend d'après (3) la forme

$$c_{ii}c_{jj} - c_{ij}^2 = 0, \ i < j; \ i = 1, 2, 3; \ j = 2, 3, 4. \qquad (34)$$

Le premier membre de la formule (34) est le discriminant de l'équation quadratique

$$c_{ii}x_i^2 + c_{jj}x_j^2 + 2c_{ij}x_ix_j = 0,$$

qui donne les intersections de la quadrique h avec l'axe o_{ij}. Ainsi on a démontré pour trois quadriques:

XIV. *Étant donné trois quadriques, prises dans un certain ordre, s'il existe un tetraèdre polaire commun aux deux d'entre elles, dont les arêtes sont tangentes à la troisième quadrique désignée par le numéro d'ordre r, ces trois quadriques sont liées par la relation $\Theta_3^{(r)} = 0$, c. à d. le théorème n⁰* V, *le théorème correspondant n⁰* VI *et le théorème n⁰* XII *sont valables pour elles.*

Posons $b_{ij} = a_{ij}$, $d_{ij} = c_{ij}$ dans la relation $\Theta_4 = 0$. La relation $\Theta_4 = 0$, se réduit à la relation $\Phi = 0$ et la relation (33) se réduit à la relation (34). On aboutit au théorème connu: S'il existe un tétraèdre polaire de la première quadrique, dont les arêtes sont tangentes à la deuxième, on a $\Phi = 0$*).

Si, dans $\Theta_4 = 0$, on pose $d_{ij} = c_{ij} = b_{ij}$, celle-ci se réduit à $\Theta_2 = 0$. La signification géométrique connue de cette condition est une conséquence évidente de la signification géométrique de la condition $\Theta_4 = 0$, quand les quadriques correspondantes se sont confondues.

En posant dans la relation $\Theta_4 = 0$: $d_{ij} = c_{ij} = a_{ij}$, celle ci passe en $\Theta_1 = 0$. Sa signification géométrique connue est pareillement une conséquence de la signification géométrique de la condition $\Theta_4 = 0$, quand les quadriques correspondantes se sont confondues.

Les théorèmes trouvés pour deux, trois et quatre quadriques ont pour théorèmes duels:

Théorème duel au théorème *n⁰* V:

Si deux de trois quadriques ont une telle position que chacune de ces deux quadriques est inscrite polairement au lieu géométrique des sommets des cônes circonscrits aux deux autres quadriques tels que la conique de contact située sur la deuxième est inscrite polairement à la conique située sur la troisième quadrique, alors est nul le déterminant cubique du quatrième degré formé des tableaux des discriminants des équations tangentielles de ces quadriques de telle sorte que le tableau du discriminant de chacune des deux quadriques mentionées se trouve dans une couche et le tableau du discriminant de la première quadrique dans deux couches. Et réciproquement.

Théorème duel au théorème *n⁰* VI:

Si pour trois quadriques f, g, h, on a

$$2\overline{\Theta}_3^{(1)} = |A_{ij}|A_{ij}|B_{ij}|C_{ij}| = 0,$$

la quadrique g a une infinité de tetraèdres polaires, tels que les cônes circonscrits de leurs sommets aux quadriques f et h touchent ces quadriques le long de coniques dont celle située sur h est inscrite polairement à celle située sur f, et en même temps la quadrique h a une infinité de tetraèdres polaires tels que les cônes circonscrits de leurs sommets aux quadriques f et g touchent ces quadri-

*) La recherche complète sur la suffisance de la condition $\Phi = 0$ pour l'existence d'un tetraèdre polaire tangentiel de deux quadriques, a été faite par Dr **Bydžovský** et Dr **Knichal** dans les „Rozpravy 2. třídy české akademie věd a umění", année L(1940), n° 21, sous le titre: „O simultánním invariantu Φ dvou kvadrik".

ques le long de coniques, dont celle située sur g est inscrite polairement à celle située sur f.

On obtient les théorèmes duels relatifs aux relations $2\overline{\Theta}_3^{(2)} = 0$ et $2\overline{\Theta}_3^{(3)} = 0$, en échangeant dans l'énoncé précédent les quadriques correspondantes.

Théorème duel du théorème n^0 VII:

Si, des deux quadriques prises dans un certain ordre, la première est inscrite polairement à la seconde, la seconde est en même temps inscrite polairement au lieu géométrique de points tels que les cônes, ayant ces points pour sommets, circonscrits aux deux quadriques, touchent ces quadriques le long de coniques, dont celle située sur la première quadrique est inscrite polairement à celle située sur la deuxième quadrique.

Théorème duel du théorème n^0 VIII:

Si, de deux quadriques f et g, la quadrique f est inscrite polairement au lieu géométrique des points tels que les cônes, ayant ces points pour sommets, circonscrits à ces deux quadriques, touchent ces quadriques le long de coniques telles que celle située sur f est polairement inscrite à celle située sur g, la relation $4\overline{\Phi} \equiv |A_{ij}|A_{ij}|B_{ij}|B_{ij}| = 0$ *a lieu, et réciproquement. En ce cas la quadrique g est inscrite polairement au lieu géométrique des points tels que les cônes, ayant ces points pour sommets, circonscrits à ces deux quadriques, touchent ces quadriques le long de coniques telles que celle située sur g est inscrite polairement à celle située sur f, et réciproquement.*

Théorème duel au théorème n^0 IX:

Si pour deux quadriques f et g, on a $\overline{\Phi} = 0$, *la quadrique f a une infinité de tetraèdres polaires tels que les cônes circonscrits de leurs sommets aux deux quadriques touchent ces quadriques le long de coniques telles que celle située sur f est inscrite polairement à celle située sur g. Les sommets de ces tetraèdres polaires se trouvent sur la quadrique*

$$\overline{S'} \equiv |A_{ij}|B_{ij}|B_{ij}|x_i x_j| = 0.$$

La quadrique g a une infinité de tetraèdres polaires tels que les cônes circonscrits de leurs sommets aux deux quadriques touchent celles-ci le long de coniques telles que celle située sur g est inscrite polairement à celle située sur f. Les sommets de ces tetraèdres polaires se trouvent sur la quadrique

$$\overline{S} \equiv |A_{ij}|A_{ij}|B_{ij}|x_i x_j| = 0.$$

Théorème duel du théorème n^0 X:

Le lieu géométrique de points tels que les cônes ayant ces points pour sommets, circonscrits aux quadriques f, g, h sont tangents à ces quadriques le long de coniques telles que chacune est inscrite polairement au lieu géométrique des points tels que les couples de tangentes menées de ces points aux deux autres coniques sont conjugués harmoniques, a pour équation

$$\overline{P} \equiv |A_{ij}|B_{ij}|C_{ij}|x_i x_j| = 0.$$

Théorème duel au théorème n^0 XI:

Si quatre quadriques sont dans une telle position mutuelle que chacune d'elles est inscrite polairement au lieu géometrique de points tels que les cônes ayant ces points pour sommets circonscrits aux trois quadriques, touchent ces quadriques le long de coniques dont chacune est inscrite polairement au lieu géométrique de points tels que les couples de tangentes, menées de ces points aux deux autres coniques, sont conjugués harmoniques, ces quatre quadriques sont liées par la relation

$$\overline{\Theta}_4 \equiv |A_{ij}|B_{ij}|C_{ij}|D_{ij}| = 0.$$

Et inversement.

Théorème duel au théorème n^0 XII:

Si pour trois quadriques, on a $\overline{\Theta}_3^{(r)} = 0$, la quadrique, dont le discriminant tangentiel figure dans deux couches de ce déterminant cubique est inscrite polairement au lieu géométrique des points tels que les cônes ayant ces points pour sommets, circonscrits aux trois quadriques, touchent ces quadriques le long de coniques dont chacune est inscrite polairement au lieu géométrique de points tels que les couples de tangentes menées de ces points aux deux autres coniques sont conjugués harmoniques.

Théorème duel au théorème n^0 XIII:

S'il existe un tetraèdre polaire commun à deux quadriques et si les plans tangents menés par ses arêtes à deux autres quadriques forment des couples de plan conjugués harmoniques, ces quatre quadriques sont liées par la relation $\overline{\Theta}_4 = 0$, c. à d. le théorème duel au théorème n^0 XI est valable pour elles.

Théorème duel au théorème n^0 XIV:

S'il existe, pour trois quadriques prises dans un certain ordre, un tetraèdre polaire commun aux deux d'entre elles, dont les arêtes sont tangentes à la troisième quadrique désignée par le numéro d'ordre r, ces trois quadriques sont liées par la relation $\overline{\Theta}_3^{(r)} = 0$, c. à d. les théorèmes duels aux des théorèmes n^{0s} V, VI, XII *sont valables pour ces quadriques.*

Dans ce qui precède, nous avons trouvé la signification géométrique de tous les invariants obtenus par l'opération (1) appliquée au discriminant d'une quadrique. Nous avons trouvé les propriétés géométriques de deux, trois et quatre quadriques, pour lesquels l'évanouissement de ces invariants simultanés est une condition et nécessaire et suffisante. L'invariant simultané fondamental est l'invariant Θ_4, étant donné que les autres invariants en découlent, comme cas particuliers et il en est de même de leur signification géométrique.

Pour terminer indiquons encore brièvement comment on peut étendre la théorie précédente aux espaces à plus que trois dimensions. Dans l'espace à quatre dimensions, on procèdera de la façon suivante: On trouvera les enveloppes des hyperplans $\sigma \equiv \sum_1^5 u_i x_i = 0$ dont les

intersections avec les hyperquadriques correspondantes sont des quadriques, pour lesquelles l'un des invariants simultanés Θ_1, Θ_2, Φ, $\Theta_3^{(r)}$ et Θ_4 est égal à zéro. On obtiendra successivement, pour ces enveloppes, les équations suivantes:

$$|a_{ij}|a_{ij}|a_{ij}|b_{ij}|u_iu_j| = 0,$$
$$|a_{ij}|b_{ij}|b_{ij}|b_{ij}|u_iu_j| = 0,$$
$$|a_{ij}|a_{ij}|b_{ij}|b_{ij}|u_iu_j| = 0,$$
$$|a_{ij}|a_{ij}|b_{ij}|c_{ij}|u_iu_j| = 0,$$
$$|a_{ij}|b_{ij}|b_{ij}|c_{ij}|u_iu_j| = 0,$$
$$|a_{ij}|b_{ij}|c_{ij}|c_{ij}|u_iu_j| = 0,$$
$$|a_{ij}|b_{ij}|c_{ij}|d_{ij}|u_iu_j| = 0.$$

La dernière de ces équations est la plus générale. En prenant en considération les conséquences géométriques de la fusion des quadriques correspondantes, on obtiendra comme cas particuliers de cette équation les équations précédentes avec leur signification géométrique. Il suffit donc d'établir cette équation, c. à d. l'équation de l'enveloppe des hyperplans dont les intersections avec les hyperquadriques

$$f \equiv \sum_1^5 a_{ij}\, x_ix_j = 0,\ g \equiv \sum_1^5 b_{ij}x_ix_j = 0,\ h \equiv \sum_1^5 c_{ij}x_ix_j = 0,\quad k \equiv \sum_1^5 d_{ij}x_ix_j = 0$$

sont des quadriques dont chacune est circonscrite polairement à la surface P des trois autres quadriques. On l'obtient par le procédé suivant: En éliminant x_5 de l'équation de l'hyperplan σ et successivement des équations des quadriques f, g, h et k, on aura des équations

$$\sum_1^4 \alpha_{ij}u_iu_j = 0,\quad \sum_1^4 \beta_{ij}u_iu_j = 0,\quad \sum_1^4 \gamma_{ij}u_iu_j = 0,\quad \sum_1^4 \delta_{ij}u_iu_j = 0,$$

qui sont les équations des projections du sommet O_5 des quadriques d'intersections dans l'hyperplan $x_5 = 0$. Comme ici, encore, il s'agit d'une propriété projective de ces quadriques, il suffit de lier par la condition $\Theta_4 = 0$ les projections de ces quadriques dans l'hyperplan $x_5 = 0$, c. à d. de poser

$$\Theta_4 = |\alpha_{ij}|\beta_{ij}|\gamma_{ij}|\delta_{ij}| = 0.$$

En développant le déterminant cubique du premier membre de cette équation et en l'ordonnant par rapport aux éléments u_{ij}, on aura l'équation

$$P_4 = \sum_{i,j=1}^5 K_{uij}u_iu_j = 0;\quad K_{uij} = K_{uji}.$$

Cette équation est le développement d'un déterminant cubique du cinquième degré par rapport à la couche aux éléments u_iu_j; donc on peut écrire

$$P_4 \equiv |a_{ij}|b_{ij}|c_{ij}|d_{ij}|u_iu_j| = 0.$$

Pour que l'hyperquadrique $h \equiv \sum_1^5 e_{ij}x_ix_j = 0$ soit circonscrite polairement à l'hyperquadrique P_4, on doit avoir

$$\Theta_5 \equiv |a_{ij}|b_{ij}|c_{ij}|d_{ij}|e_{ij}| = 0.$$

Par un raisonnement analogue à celui fait à propos des quadriques, nous arriverons au résultat:

Si pour cinq hyperquadriques, on a $\Theta_5 = 0$, chacune d'elles est circonscrite polairement à l'hyperquadrique P des quatre autres hyperquadriques et réciproquement. Cela signifie: *Si pour cinq hyperquadriques on a* $\Theta_5 = 0$, *chacune de ces hyperquadriques a une infinité de hyperpentaèdres polaires dont tous les hyperplans, déterminés par quatre sommets arbitraires, coupent les quatre autres hyperquadriques en des quadriques qui sont dans une position mutuelle caractérisée par la relation* $\Theta_4 = 0$, *c. à d. pour lesquelles le théorème* XI *a lieu.*

Les autres invariants simultanés des hyperquadriques dans l'espace à quatre dimensions avec leurs propriétés géométriques peuvent être obtenus comme cas particuliers de l'invariant Θ_5. Il y en a six types différents.

Dans l'espace à cinq dimension le point de départ seront les relations polaires des hyperquadriques de cet espace aux enveloppes des hyperplans coupant ces hyperquadriques dans les hyperquadriques à quatre dimensions pour lesquelles les invariants simultanés, trouvés pour l'espace à quatre dimensions, sont égaux à zéro.

D'une manière analogue, on procèdera dans les espaces à un nombre plus élévé de dimensions. Évidemment, cette théorie devient de plus en plus ample à mesure que le nombre de dimensions s'accroit.

O geometrickom význame určitých simultánnych invariantov kužeľosečiek a kvadrik.

(Obsah predchádzajúceho článku.)

Z invariantu Π formy n-tého stupňa f s koeficientami a_i pribraním ďalšej formy n-tého stupňa g s koeficientami b_i diferenciáciou $\sum \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} b_i$ dostávame simultánny invariant foriem f a g s tým istým modulom ako u invariantu Π. Opakovaním tejto diferenciácie priberaním ďalších foriem dostávame ďalšie simultánne invarianty, až nakoniec vzniká simultánny invariant lineárny v koeficientoch každej formy. Predmetom predchádzajúcej práce je vyšetrovanie a hľadanie geometrického významu — pokiaľ nie je známy — simultánnych invariantov získaných týmto postupom z diskriminantov kvadratických foriem ternárnych a kvaternárnych. U ternárnej kvadratickej formy jedná sa o simultánne invarianty Θ_1, Θ_2 a Θ_3. Je nájdený obecný geometrický význam základného invariantu Θ_3 a je poukázané tiež ako plynú z neho známe geometrické významy invariantov Θ_1 a Θ_2. U kvaternárnej kvadratickej formy systém týchto invariantov tvoria simultánne invarianty $\Theta_1, \Theta_2, \Phi, \Theta_3^{(1)}, \Theta_3^{(2)}, \Theta_3^{(3)}, \Theta_4$. Pre každý z týchto invariantov je nájdená geometrická vlastnosť príslušných kvadrik, pre ktorú nulová hodnota tohoto invariantu je jak nutnou tak i dostačujúcou podmienkou. Je poukázané ako zo základného invariantu Θ_4 plynú geometrické významy ostatných invariantov, teda i známe obecné geometrické významy invariantov Θ_1, Θ_2 a tiež doposiaľ známy špeciálny geometrický význam invariantu Φ. V závere je odvedená geometrická vlastnosť základného invariantu Θ_5 nadkvadrik v štvorrozmernom priestore a poukázané ako je možné túto teoriu rozšíriť na priestory viacrozmerné. V práci sú používané systematicky kubické determinanty.