Augustin Pánek

O průměrové rovnici ellipsy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 4, 254--256

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123957

Vedeme-li bodem E a F přímky rovnoběžně k $\overline{ZV}$, tu obdržíme trať roviny sečné $\overline{TT'}$ a přímku směrnou $\overline{S'S''}$. $\overline{EU}$ jest přeložený průřez roviny sečné s rovinou poledníka. Okolo přímky směrné přiložený bod P obdržíme v P', je-li $\overline{FP'} = \overline{FP}$, a podobně obdržíme okolo trati $\overline{TT'}$ přeložený bod C, je-li $\overline{EC'} = \overline{EC}$.

Budiž teď $\sphericalangle$ JC'H $= t$ daný úhel hodinový, a budiž $\overline{C'B'} = \overline{CU}$: tu obdržíme v bodě B' polohu pozorované hvězdy, odpovídající zvolené rovině sečné. Bodem B' vedeme libovolnou přímku $\overline{B'K}$, která protíná trať v bodě K. Bodem P' ku $\overline{B'K}$ rovnoběžně vedená přímka protíná přímku směrnou v bodě L. Spojíme-li K s L, tu protne tato přímka paprsek, jenž spojuje bod P' s bodem B', v bodě B. B jest pak bod v horizontu, pozorované hvězdě odpovídající. Bod B spojen s bodem O dá nám úhel $\sphericalangle$ JOH', hledaný azimuth.

Sestrojíme-li v O na $\overline{H'B}$ kolmici $\overline{OQ} = \overline{OP}$ a spojíme-li Q s B, obdržíme $\sphericalangle$ OBQ, hledanou výšku. Ale položíme-li výpomocnou rovinu sečnou bodem M, tu protíná paprsek deklinaci udávající rovinu sečnou v bodu U'. Bodem M k $\overline{ZV}$ rovnoběžně vedená přímka dá nám příslušnou trať, a je-li $\sphericalangle$ JMH'' daný úhel hodinový, $\overline{MB'_1} = \overline{MU'}$, obdržíme příslušný bod B'_1 vztahující se na novou rovinu sečnou. Vedeme-li bodem B'_1 přímku libovolnou B'_1 K', protíná tato trať $\overline{T_1T'_1}$ v bodě K'; vedeme-li dále bodem P' ku $\overline{B'_1K'}$ přímku rovnoběžnou $\overline{P'L}$, a protíná-li tato přímku směrnou v bodě L, obdržíme, spojíme-li L s K', v průřezu s paprskem $\overline{P'B'_1}$ jako dříve v horizontu ležící bod B.

(Pokračování.)

O průměrové rovnici ellipsy.

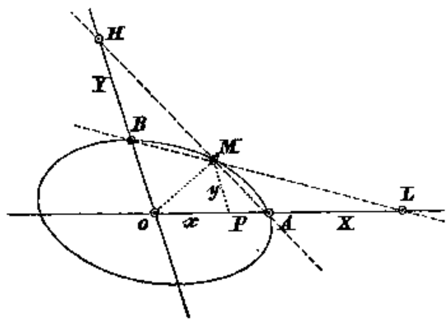
Pro žáky škol středních napsal

Augustin Pánek.

Pokládáme-li sdružené průměry ellipsy za osy soustavy kosoúhlé a označíme-li délky sdružených poloměrů $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, bude průsečník spojnic $\overline{LB}$ a $\overline{HA}$ bodem M ellipsy při podmínce vyjádřené relací

$$\overline{AL} \, . \, \overline{BH} = 2ab \, ,$$

při čemž leží zvolený bod L a H na prodloužených délkách průměrů sdružených.



Abychom hořejní výměr vyznačili analyticky rovnicí, nazvěmež souřadnice bodu M x, y a uvažme, že

$$\overline{AL} = \overline{OL} - a, \qquad \overline{BH} = \overline{OH} - b,$$

tedy především

$$(\alpha) \qquad (\overline{OL} - a)(\overline{OH} - b) = 2ab,$$

kdež $\overline{OL}$ a $\overline{OH}$ vyjádříme souřadnicemi bodu M z úsekového tvaru rovnice přímek $BL \equiv 0$ a $AH \equiv 0$.

Rovnice první přímky má tvar

$$\frac{x}{\overline{OL}} + \frac{y}{b} = 1,$$

a druhé přímky

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\overline{OH}} = 1,$$

z nichž obdržíme

$$\overline{OL} = \frac{b}{b-y}x, \qquad \overline{OH} = \frac{a}{a-x}y.$$

Hodnoty tyto dosadíce do rovnice (α), nabudeme

$$\left(\frac{bx}{b-y} - a\right)\left(\frac{ay}{a-x} - b\right) = 2ab$$

aneb

$$(bx + ay - ab)^2 = 2ab\,(a - x)\,(b - y)$$

a konečně

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

jakožto průměrovou rovnici ellipsy.

Poznámka 1. Hledíme-li na tento výsledek se stanoviska geometrie polohy, můžeme jej vysvětliti takto: Bod H, L, hovící rovnici

$$\mathrm{AL} \,.\, \mathrm{BH} = 2ab = \mathrm{const.}$$

tvoří v osách X, Y dvě projektivné řady, jichž úběžníky jsou body A, B. Také svazky, jimiž se tyto řady z bodů A, B promítají, jsou projektivné a vytvořují tudíž křivku 2. stupně. Tečny v bodech A, B jsou paprsky příslušné ku společnému paprsku obou svazků; tudíž tečnou v A jest přímka určená tímto bodem a úběžným bodem řady Y, tečna v B prochází úběžným bodem řady X. Jsou proto OA, OB sdružené poloměry křivky oběma svazky vytvořené.

Poznámka 2. Úsekový tvar rovnice přímky možno mimo obvyklé způsoby, v učebnicích geometrie se vyskytující, zjednati si takto:

Spojíme-li bod M s počátkem O, jest patrně ploský obsah

$$\triangle\,\mathrm{OMB} + \triangle\,\mathrm{OLM} = \triangle\,\mathrm{OLB},$$

t. j.

$$bx + cy = bc,$$

při čemž kladeno bylo $\mathrm{OL} = c$.

Dělíme-li celou rovnici bc, nalezneme

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1.$$

Úlohy.

Řešení úloh.

Úloha 14.

V trojúhelníku ABC, pravoúhlém při C, vedeny příčky $CD \perp AB$, $DM \perp BC$, $DN \perp AC$. Sestrojiti trojúhelník, dáno-li

$$BM = m, \quad AN = n.$$