Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bedřich Procházka

Kinetický způsob sestrojení středu křivosti ovalu Cartesiova

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 4, 230--234

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123959`

$$\psi\left(n-r, \frac{n-r-1}{r}\right) = \chi(n-r, r),$$

poněvadž každému děliteli $\delta > \frac{n-r-1}{r}$ $\left(\text{tedy } \delta \geqq \frac{n-r}{r}\right)$ čísla $n-r$ odpovídá dělitel sdružený $\delta' \leqq r$ a naopak.

Následuje tedy vzorec

$$N = \sum_{r \geqq -\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}} \psi(n-r, r) + \sum_{\varrho < -\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}} \chi(n-\varrho, \varrho),$$

a věta, že *počet řešení rovnice*

$$E\left(\frac{n}{x}\right) = E\left(\frac{n}{x+1}\right), \qquad x < n,$$

rovná se výrazu N.

Tak na př. pro $n = 30$ vyjdou podmínky $r \geqq 5$, $\varrho < 5$, a pak se obdrží $\sum \psi(30-r, r) = 13$, $\sum_{\varrho=1}^{4} \chi(30-\varrho, \varrho) = 7$, tedy $N = 20$; skutečně hoví čísla $x = 8, 9, 11, 12, 13, 14$ a pak všecka čísla od 16 do 29 dané podmínce.

Kinetický způsob sestrojení středu křivosti ovalu Cartesiova.

Napsal

Bedřich Procházka,

professor v Karlíně.

1. Střed křivosti příslušící bodu a křivky K budeme považovati za okamžitý střed otáčení tečny T při přechodu jejím do polohy soumezné.*) K tomu stačí znáti rychlost $\overline{at}$ jakou

*) „Kinetický způsob sestrojování tečen a středů křivosti křivek 2. stupně“, napsal v „*Rozpravách České Akademie*“, ročn. III., čís. 19., odst. 3. Bedřich Procházka.

se dotyčný bod a v tečně T pohybuje a rychlost $\overline{bv} \perp$ T libovolného bodu jejího b, jakou se kol onoho bodu otáčí. Připojíme-li ku této rychlosti bodu b ještě jeho rychlost postupnou $\overline{bu} = \overline{at}$ v tečně, obdržíme v úhlopříčně $\overline{bx}$ pravoúhelníka $buxv$ nad rychlostmi $\overline{bu}$ a $\overline{bv}$ sestrojeného rychlost $\overline{bx}$ bodu b co do směru i velikosti. Kolmice bs ku bx sestrojená jakožto normala křivky vytvořené bodem b protíná normalu $N_a \perp$ T ve středu křivosti s křivky K.

Užijeme-li rychlostí kolmých: *) $\overline{a\tau} \perp\!\!= \overline{at}$ a $\overline{b\omega} \perp \overline{bv}$, pak určíme střed křivosti jakožto průsek normaly N_a s přímkou, která spojuje bod b s vrcholem ξ pravoúhelníka $a\omega\xi\tau$.

Je-li dána na místě kolmé rychlosti otáčení bodu b, kolmá rychlost $\overline{b\pi}$ tohoto bodu, jakožto průsečíku tečny $\overline{\text{T}}$ s libovolnou přímkou P, pak odvodíme z této rychlosti kolmou rychlost $\overline{b\omega}$ tím, že sestrojíme $\overline{\pi\omega} \perp$ T, kterážto kolmice nám také slouží ku sestrojení bodu ξ.

2. Tohoto způsobu určení středu křivosti můžeme užíti při křivkách 2. stupně určených pěti body **) a některých druhů křivek, jichž výtvarný zákon nelze jednoduše převésti na kotálení.

Zde užijeme jej ku určení středu křivosti *ovalu Cartesiova.*

Mějme na zřeteli předem obecnější případ této křivky, to jest křivku K jakožto geometrické místo bodu a, jehož vzdálenosti $\overline{aa'}$ a $\overline{aa''}$ od dvou křivek A' a A'' jsou ve stálém poměru μ.

Protože i poměr rychlostí, jakou se vzdálenosti ty mění, se rovná μ, můžeme tyto rychlosti vyjádřiti délkami $\overline{aa'}$ a $\overline{aa''}$. Tečnu T v bodu a křivky K pak obdržíme, když sestrojivše v bodech a' a a'' tečny T' respekt. T'' spojíme jejich průsečík b s bodem a.***)

K sestrojení středu křivosti v bodu a křivky K odvodíme

---

*) *Dr. L. Burmester* „Lehrbuch der Kinematik" I. Band. Pag. 23. 1888.

**) Článek „Kin. zp. sestr. teč. a stř. kř. 2. st.", odst. 4.

***) *Chasles* — *„Geschichte der Geometrie"*, německý překlad od *Sohnke* 1839., p. 369.

— dle článku 1. — ku zvolené rychlosti postupné tohoto bodu v tečně T příslušnou rychlost bodu b otáčejícího se kol bodu a.

Bod a jest průsečíkem normal N′ a N″ sestrojených v bodech a' respekt. a'' ku křivkám A′ respekt. A″ a otáčejících se kol středů křivosti s' respekt. s'' těchto křivek.

Zvolíme-li rychlost postupnou bodu a v tečně T, jest tím stanovena i rychlost otáčení obou normal N′ a N″, jakož i jejich tečen T′ a T″ a jejich průseku b. Můžeme však také vyjíti od rychlosti otáčení normaly N′ a odvoditi všechny ostatní rychlosti.

Předpokládajíce, že jest rychlost otáčení této normaly rovna jednotce, máme v délce $\overline{as'}$ kolmou rychlost bodu a otáčejícího se kol středu s', z níž odvodíme kolmou rychlost $\overline{a^1\nu}$ tohoto bodu v tečně T, když protneme normalu N sestrojenou v bodě a křivky K přímkou $s'^1\nu \perp$ N′ v bodě $^1\nu$. Majíce takto postupnou rychlost bodu a v tečně T stanovenu, zbývá nám ku stanovení středu křivosti křivky K stanoviti rychlost bodu b otáčejícího se kol bodu a. Rychlost tuto stanovíme z rychlosti bodu b jakožto průsečíku tečen T′ a T″ kol bodů s' respekt. s'' se otáčejících.

Délka $\overline{bs'}$ představuje kolmou rychlost otáčení bodu b při otáčení tečny T′ kol bodu s'. Abychom odvodili kolmou rychlost $b^1\mu''$ bodu b při otáčení tečny T″ kol středu s'', spustíme s bodu $^1\nu$ kolmici $^1\nu^1\nu''$ na normalu N″, a patou $^1\nu''$ této kolmice vedenou přímkou $^1\nu''^1\mu'' \parallel$ T protneme spojnici bs'' v bodě $^1\mu''$.

Na základě sestrojených rychlostí kolmých $\overline{bs'}$ a $\overline{b^1\mu''}$ bodu b vzhledem ku otáčení tečen T′ a T″ kol středu s' respekt. s'' určíme jeho kolmou rychlost $\overline{b^1\pi}$ jakožto průsečíku těchto tečen, když sestrojivše body s' a $^1\mu''$ kolmice ^{1}N′ $\equiv$ N′ respekt. ^{1}N″ ku tečnám T′ respekt. T″, spojíme jejich průsečík $^1\pi$ s bodem b. Z této rychlosti kolmé $\overline{b\pi}$ totožné s normalou N_b bodu b křivky B tímto bodem vytvořené, odvodíme dle druhé konstrukce uvedené ve článku 1. bod $^1\xi$, když sestrojivše bodem $^1\pi$ rovnoběžku $^1P \equiv {}^1\pi^1\xi$ s normalou N, protneme ji přímkou $^1Q \equiv {}^1\nu^1\xi \perp$ N. Přímka $X \equiv b^1\xi$ protíná pak normalu N ve středu křivosti s.

3. Zvolivše podruhé rychlost bodu a takovou, aby rychlost otáčení normaly N″ se rovnala jednotce, obdržíme vedouce $s''^2\nu \perp$ N″, kolmou rychlost $\overline{a^2\nu}$ bodu a v tečně T se pohybují-

cího. Délka $\overline{bs''}$ představuje pak kolmou rychlost bodu b při otáčení tečny T″ kol bodu s''. Odvozujíce kolmou rychlost $\overline{b^2\mu'}$ bodu b při otáčení tečny T′ kol středu s' spustíme s bodu ${}^2\nu$ kolmici ${}^2\nu{}^2\nu'$ na normalu N′ a patou ${}^2\nu'$ této kolmice vedenou přímkou ${}^2\nu'{}^2\mu' \parallel$ T protneme spojnici bs' v bodě ${}^2\mu'$.

Na základě sestrojených rychlostí kolmých $\overline{b^2\mu'}$ a $\overline{bs''}$ bodu b vzhledem k otáčení tečen T′ a T″ kol středu s' respekt. s'' určíme jeho kolmou rychlost $\overline{b^2\pi}$, když, sestrojivše body ${}^2\mu'$ a s'' kolmice ^{2}N′ respektive ${}^2\mathrm{N}'' \equiv \mathrm{N}''$ ku tečnám T′ respekt. T″ spojíme jejich průsečík ${}^2\pi$ s bodem b. Jelikož však kolmá rychlost $\overline{b^2\pi}$ bodu b se shoduje s dříve určenou rychlostí $\overline{b^1\pi}$ co do polohy, leží bod ${}^2\pi$ na normale $\mathrm{N}_b \equiv \overline{b^2\pi}$.

Protnuvše pak jako v prvém případě přímku ${}^2\pi{}^2\xi \equiv {}^2\mathrm{P} \parallel \mathrm{N}$ přímkou ${}^2\nu{}^2\xi \perp \mathrm{N}$, obdržíme bod ${}^2\xi$, určující s bodem b přímku $b^2\xi$, kteráž se stotožňujíc s dříve sestrojenou přímkou $\mathrm{X} \equiv b^1\xi$ týž bod s určuje jakožto střed křivosti křivky K.

Zvolíce jiné kolmé rychlosti bodu a v délkách $\overline{a^3\nu}$, $\overline{a^4\nu}$, ... na normale N, přijdeme uvedeným způsobem k jiným bodům ${}^3\pi$, ${}^4\pi$, ... na normale N_b, ku kterým přísluší přímky ^{3}P, ^{4}P, ... rovnoběžné s normalou N a protínající přímku X v bodech ${}^2\xi$, ${}^3\xi$, ... Poněvadž jsou tedy bodové řady ${}^1\pi$, ${}^2\pi$, ${}^3\pi$, ... a ${}^1\xi$, ${}^2\xi$, ${}^3\xi$ ..... perspektivnými řadami, jest svazek ${}^1\mathrm{N} \equiv a^1\pi \equiv \mathrm{N}'$, ${}^2\mathrm{N} \equiv a^2\pi \equiv \mathrm{N}''$, ${}^3\mathrm{N} \equiv a^3\pi$, ... projektivným se svazkem rovnoběžných přímek ${}^1\mathrm{Q} \equiv {}^1\xi{}^1\nu$, ${}^2\mathrm{Q} \equiv {}^2\xi{}^2\nu$, ${}^3\mathrm{Q} \equiv {}^3\xi{}^3\nu$, ... Jelikož však tečna T jest samodružným paprskem obou těchto svazků, jsou tyto v poloze perspektivné a jejich sdružené paprsky ${}^1\mathrm{N}{}^1\mathrm{Q}$, ${}^2\mathrm{N}{}^2\mathrm{Q}$, ${}^3\mathrm{N}{}^3\mathrm{Q}$, ... se protínají v bodech ${}^1l$, ${}^2l$, ${}^3l$, ... přímé řady L, kteráž zároveň středem křivosti s prochází, jakožto jedním bodem této řady, v němž se protínají sdružené paprsky: ${}^4\mathrm{N} \equiv \mathrm{N}$ a ^{4}Q bod ${}^4\xi \equiv s$ obsahující.

Můžeme tedy bod s určiti jakožto průsek normaly N s přímkou L, kteráž obsahujíc nekonečně vzdálený bod ${}^5l$, to jest průsečík paprsků ${}^5\mathrm{N} \parallel \mathrm{N}_b$ se sdruženou nekonečně vzdálenou přímkou ^{5}Q jest zároveň stejnoměrna s přímkou N_b.

Sestrojujíce střed křivosti s křivky K: *vztýčíme ve středech s' a s'' kolmice ku normalám* N′ *respekt.* N″, *kteréž určují v normale* N *body* ${}^1\nu$ *a* ${}^2\nu$. *V bodech těchto ku normale této vztýčené* *kolmice* $^1v^1l$ *a* $^2v^2l$ *protínají normalu* N', *respekt.* N'' *v bodech* ^1l *respekt.* ^2l, *jimiž jest určena přímka* L *protínající normalu* N *ve středu křivosti s.**)

Z projektivnosti svazků paprsků ^{1}N, ^{2}N, ^{3}N, ... a svazku rovnoběžných paprsků ^{1}Q, ^{2}Q, ^{3}Q, ... vyplývá, že i řada bodů ^1v, ^2v, ^3v, ... jest projektivná se svazkem ^{1}N, ^{2}N, ^{3}N, ... *a proto dvojpoměr*

$$(TN^1N^2N)$$

čtyř paprsků svazku tohoto roven dvojpoměru příslušných čtyř bodů

$$(as^1v^2v)$$

na normale N.**)

Je-li jedna z křivek A'A'' křivkou kruhovou a jest-li druhá se promění v bod, stane se křivka K *ovalem Cartesiovým;* jest-li se mimo to poměr μ stane rovným jednotce positivné nebo negativné, promění se křivka K v křivku hyperbolickou respekt. elliptickou. Nabude-li křivka kruhová poloměru nekonečně velikého t. j. stane-li se přímkou, pak dle hodnoty poměru μ bude křivka K některou křivkou 2. stupně.

Ve všech těchto případech lze s prospěchem užíti uvedené konstrukce středu křivosti, kteráž se mimo to valně zjednoduší.

Řešení číselných rovnic vyšších prokladem arithmetických řad rozdílových.

Podává

Jan Kaloušek,

professor českoslovanské obchodní akademie v Praze.

Sepisuje svou Arithmetiku národohospodářskou***), měl jsem příležitost seznati, jak prokladem vyšších řad rozdílových lze

---

*) 1. *A. Mannheim: „Principes et Développements de Géometrie Cinématique“* 1894., pag. 489, construction (2).

2. *Dr. L. Burmester: „Lehrbuch der Kinematik“*. 1888. Pag. 90.

**) *František Machovec: „Zobrazování tečen a středů křivosti křivek na základě nové methody“*. 1883., pag. 86.

***) Vyšla nákladem „St. Pospíšila zetě, J. Scholle“ v Chrudimi r. 1888 jakožto IV. díl „Nauk obchodních“, vydávaných professorským sborem akademie chrudimské.