Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohumil Kučera

O vodních vlnách

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 1, 65--88

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124003

O vodních vlnách.*)

Žákům středních škol píše prof. Dr. **Boh. Kučera.**

Kdo z Vás by neznal půvabného zjevu vlnek kruhovitě se rozbíhajících po tiché hladině rybníčku za bezvětří v letní podvečer, které se šíří od místa, kde se nad hladinou vymrštila rybka, nebo kam dopadl kámen schválně pro vzbuzení kroužků těch do vody vržený? Stejně znáte nekonečné sledy vln vzbuzených na hladině vodní větrem, které na moři za bouře dostupují takých rozměrů, že se stávají nebezpečnými i menším lodím. O tomto zjevu chceme blíže pojednati.

1. Vlny vodní sestávají z ekvidistantních vrchů a dolů, za malého rozkmitu přibližně sinusoidálných, které postupují po hladině vodní s určitou rychlostí. Ovšem nepostupují vrchní vrstvy vody snad ssebou, jak se snadno přesvědčíme, vhodíme-li na hladinu kousek dřeva nebo jiný malý plovoucí předmět. Tento vykonává pouze jakési oscillace kolem jisté polohy střední, ale nevzdaluje se pozorovatelně od ní, nepostupuje s vlnami. Věc má se zdánlivě stejně, jako jest popsáno v druhém dílu Vaší učebnice fysiky od professorů Jeništy, Maška a Nachtikala (pro VIII. g. resp. VII. r.) v článku o příčném postupném vlnění v řadě bodové. Tam také jest dovozen základní vztah mezi délkou vlnovou λ, postupnou rychlostí V a kmitovou dobou částice T, jenž zní

$$\lambda = V \,.\, T \ldots \qquad (1)$$

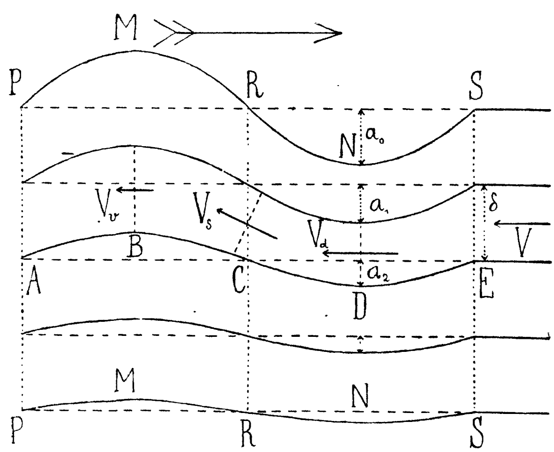
Leč snadnou úvahou dospějete k poznání, že u vodních vln jest pohyb částic alespoň poblíže povrchu složitější, než pouhé kmitání ve směru vertikálním. Nevzniká pod vrchem vlny dutina vody prázdná a pod dolem se voda malými silami, jichž účinkem jest vznik vlnění, znatelně nestlačuje. Jest na snadě představa, že patrně ustupuje z pod dolu unikajíc pod vrch vlny, a když na místo vrchu v dalším postupu vlnění přijde důl, vrací se do své původní polohy zpět, neboť z pokusu s plovoucím tělesem víme, že se se svého místa s postupující vlnou nevzdálí.

*) O tomto článku platí totéž, co bylo řečeno o mých článcích „O pohybu otáčivém“, „O rázu těles“, „O analogiích mezi hydrodynamikou a naukou o elektřině“ v ročnících předchozích.

Kombinují se tedy u částic poblíže povrchu dva pohyby velmi přibližně harmonické, a to jeden ve směru vertikálním o amplitudě a, druhý ve směru horizontálním, totožném se směrem postupu vlnění, o amplitudě b. O velikosti amplitud víme zatím jen tolik, že amplituda a u částic přesně na povrchu vody se nacházejících musí se rovnati amplitudě vln samých, to jest vertikální vzdálenosti vrchu či dolu od horizontální roviny hladiny nerozvlněné. Maximální rychlost částice kmitající jest ve směru vertikálním $\frac{2\pi a}{T}$, ve směru horizontálním pak $\frac{2\pi b}{T}$ (viz Fysika výše citovaná, I. díl: O pohybu harmonickém). Snadný názor dává uhodnouti, že se pohyby tyto neomezují pouze na vrstvu povrchovou snad nekonečně tenkou, nýbrž zasahují i částice v jisté hloubce pod ni. Ale naopak zase v hloubkách velmi velikých zůstává jistě voda v klidu, neboť jinak by musel vlnivý pohyb na moři, kdyby pronikal až ke dnu, representovati ohromnou zásobu mechanické energie, daleko a daleko větší, než jakou dle zkušenosti mu můžeme připsati. Z toho jest patrno, že rozkmitů částic ubývá, jdeme-li do hloubky, a to dle jakéhosi nám zatím neznámého zákona. V následujících řádcích pokusíme se objasniti některé zákonitosti vln na velmi hluboké vodě, pokud tak lze učiniti cestou elementárnou. Patřít přesné úvahy o těchto zjevech k velmi nesnadným problémům hydrodynamiky.

Není nezajímavo podotknouti, že základy theorie vln vodních, jak o nich budeme jednati, podal ve spise uveřejněném naší Král. Českou Společností Nauk v r. 1804 tehdejší professor mathematiky na pražské universitě *Frant. Jos. Gerstner* (nar. 1756 v Chomútově, zemř. 1832 v Mladějově). Byl to muž vysoce vynikající a také jako výtečný inženýr světové pověsti se těšící, jehož úsilím byl po snesení stavů království českého založen v r. 1806 polytechnický ústav v Praze, prvý ve střední Evropě, dnešní to technická vysoká škola. Gerstnerova theorie vodních vln trochoidálných upadla v zapomenutí a teprvé po šedesáti létech (1863) znovu ji objevil škotský fysik a inženýr *W. J. M. Rankine* (1820—1872).

2. Představme si v klidné vodě počínaje od povrchu řadu horizontálních vrstev vesměs stejné tloušťky δ, naznačených v obr. 1. tečkovanými čarami.*) Pohybuje-li se po povrchu vodním vlna na př. z leva na pravo, budou se nacházeti v jistém okamžiku veškeré částice téže střední hloubky, které dříve tvořily horizontální rovinné rozhraní dvou vrstev, nyní na zakřivené ploše, vyznačené přibližně čarami vytaženými. Snadná úvaha o ustáleném stavu pohybovém poučuje nás, že všechny vrchy nacházejí se v téže vertikální přímce, a rovněž tak i všechny doly, to jest, částice v téže vertikální přímce nacházejí se v obdobném stavu kmitání, v téže fasi. Částice právě ve vrchu M neb v dolu N se nacházející mají největší vertikální posunutí



Obr. 1.

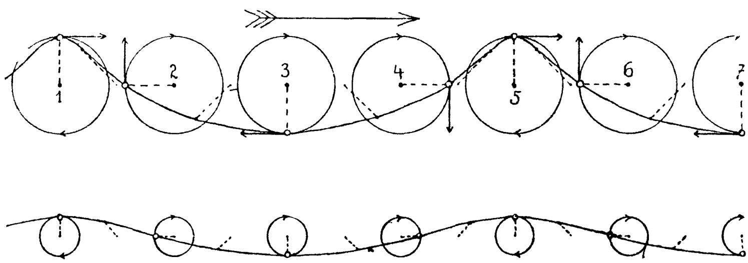
ze své rovnovážné polohy; za to mají vertikální rychlost nullovou, nacházejíce se právě v bodech, kde vertikální složka rychlosti obrací svůj směr. Za to částice, které v zachyceném okamžiku procházejí svou rovnovážnou polohou, to jest částice ve vertikálních rovinách P, R nebo S, mají za nullového posunutí maximální rychlost ve směru vertikálním $\frac{2\pi a}{T}$, a to za daného směru postupu vlny v P a S směrem dolů, v R směrem vzhůru.

Abychom podobně mohli uvažovati o kmitání ve směru horizontálním, udělme veškeré kapalině stálou rychlost V rovnou

*) Podrobností zakreslených mezi druhou a třetí vlnou shora zatím si nevšímejme.

postupné rychlosti vln, ale směru opačného, z prava na levo. Výsledek bude ten, že kapalina bude se pohybovati jakoby v trubicích, vytaženými čarami naznačených z prava na levo, že však vrch a důl vln bude setrvávati nezměněně v klidu, v týchž místech vzhledem na př. ke břehu nebo klidnému pozorovateli. Ostatně lze tento zjev někdy pozorovati i v přírodě, běží-li sled vln proti tekoucí vodě. Jak již bylo řečeno, stávají se v tomto případě křivky vlny značící křivkami, podél nichž se děje proudění vody, zkrátka křivkami proudovými, o nichž bližšího poučení naleznete v mém článku z minulého ročníku „O některých analogiích mezi hydrodynamikou a naukou o elektřině“, který v dalším budu citovati zkratkou „An.“. Uvažujme nejjednodušší případ, že vrchy a doly na hladině tvoří řadu dlouhých rovnoběžných přímek, že se tedy jedná o vlny, které zveme rovinnými. Pak můžeme proudové trubice omeziti dvěma vertikálními rovinami ve směru postupu vln, vzdálenými od sebe o jedničku délkovou; k obrazci 1. musíme si tedy přimysliti druhou rovinu s papírem rovnoběžnou o jedničku délkovou za ním vzdálenou. Pak jest průřez trubice proudové numericky dán vzdáleností (ve skutečnosti vertikální) dvou vytažených čar proudových a jak je patrno, pod vrchy jest největší, pod doly vln nejmenší. Ježto jest voda prakticky téměř nestlačitelna, musí se v proudových trubicích pohybovati pod vrchy nejmenší, pod doly největší horizontální rychlostí, kdežto v místech P, R, S má stálou rychlost střední. Ale rychlost vody v těchto myšlených trubicích jest výslednicí dvou pohybů: 1. horizontální rychlosti V z prava na levo, udělené všem částicím vodním bez rozdílu, 2. rychlosti horizontálního kmitání (o amplitudě b), která jest u různých částic různá. Jest patrno, že tato rychlost přídavná způsobuje zmíněné rozdíly rychlosti pod vrchy a doly, a že zřejmě musí býti směr opačný než směr rychlosti V pod vrchy, totožný s V pod doly a právě v těchto místech M a N maximální. U horizontálních kmitů odpovídají tedy místa M a N maximálním rychlostem, to jest nullovým výchylkám horizontálním z polohy rovnovážné. Body ležící ve vertikálních rovinách P, R, S uprostřed mezi M a N budou, jak z theorie harmonického pohybu patrno, odpovídati nullovým rychlostem horizontálním, ale za to ovšem maximálním výchylkám v tomto směru.

Výsledky těchto našich jednoduchých úvah přehlédneme nejlépe ua obr. 2., kde nahoře naznačena je horizontální řada bodová tečkami 1 až 7. Jsou to částice vodní v rovnovážné poloze. Poloha skutečná je vyznačena kroužky, při čemž zatímně je předpokládáno, že amplituda kmitů vertikálních a i horizontálních b jest stejná. Okamžité rychlosti vyznačeny jsou šipkami. Jest okamžitě patrno, že oba kmity vertikální a horizontální liší se ve fasi, že druhý jest opožděn o čtvrt doby kmitové proti prvému. Vzniká tedy za předpokladu $a = b$ rovnoměrný pohyb částice vodní po dráze kruhové. Spojíme-li skutečné polohy částic*) křivkou, dává nám skutečný tvar vlny (její stopu na vertikální rovině), který se za větších amplitud od sinusoidy značně liší. Kdyby horizontální a vertikální amplitudy nebyly stejné, byl by



Obr. 2.

tvar skutečné dráhy ellipsou, jak nás okamžitě poučují relace pro kmity v obou těchto na sobě kolmých směrech $y = a \sin \omega t$ $x = b \cos \omega t$, z nichž po zmocnění plyne

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Pro tyto amplitudy dostáváme z úvahy právě provedené za použití rovnice (1) obecně platné vztahy

$$V_d = V + \frac{2\pi b}{T} = V\left(1 + \frac{2\pi b}{\lambda}\right) \qquad (2)$$

$$V_v = V - \frac{2\pi b}{T} = V\left(1 - \frac{2\pi b}{\lambda}\right), \qquad (3)$$

*) Lze jich nakresliti libovolně mnoho, jak naznačeno středními částicemi mezi 2 a 3, 3 a 4 a t. d., kde nekreslen kruh, nýbrž jen okamžitá poloha jeho poloměru.

které vyjadřují, že rychlosti pod dolem V_d a pod vrchem V_v se skládají z rychlosti V postupu vln a maximální rychlosti horizontálního kmitání; λ jest délka vlny, to jest v obr. 2. na př. vzdálenost 1 až 5, nebo 2 až 6 a pod.

Rychlost V_s vodních částic pod body P, R, S obr. 1. se skládá z rychlosti V horizontální a maximální rychlosti vertikálních kmitů, které jsou navzájem kolmé, takže dle pravidla geometrického sčítání

$$V_s^2 = V^2 + \left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 = V^2\left(1 + \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2\right). \tag{4}$$

3. Nyní jest nám odvoditi vztah mezi amplitudami a a b vertikálního a horizontálního kmitání částic v téže střední hloubce. Jako v odstavci předcházejícím udělíme veškerým částicím vodním rychlost V z prava na levo a upneme pozornost ke kapalině proudící trubicí $ABCDE$ obr. 1. směrem EA. Trubici myslíme si však tak úzkou ve směru svislém, že na veškeré částice v témž svislém řezu působí prakticky týž tlak. Na tuto proudovou trubici applikujeme rovnici (25) loňského článku („An.“), tam odvozenou,*) která zní:

$$q_2 v_2 (p_2 + \tfrac{1}{2} s_2 v_2^2) - q_1 v_1 (p_1 + \tfrac{1}{2} s_1 v_1^2) = \text{sekundovému zisku energie uvnitř trubice.} \tag{5}$$

Při tom znamená q průřez trubice, v rychlost kapaliny v průřezu tom, p tlak tamže panující a s specif. hmotu kapaliny; indexy 1 odnášejí se k průřezu, jímž kapalina do trubice vstupuje, 2 k tomu, jímž vystupuje. Užijeme-li této rovnice jednou na část trubice DB a podruhé na část CB, a označujíce rychlostem V_d, V_s, V_v příslušející průsečíky trubice pod dolem N rovnovážnou polohou R a vrcholem M písmenami q_d, q_s, q_v, a pokládajíce konečně vodu za přibližně nestlačitelnou, takže $s_1 = s_2 = s$ a také $q_d V_d = q_s V_s = q_v V_v$, neboť kolik vody jedním průřezem vstupuje, tolik jí musí vystupovati druhým, vidíme, že jakási nejistota může panovati pouze ve velikosti tlaku v místech D, C

*) Jest to zároveň obecný tvar rovnice (145) na str. 174. prvého dílu »Fysiky« prof. brněnské techniky Dra *Vl. Nováka*, který právě vyšel nákladem Jedn. Čes. Math. a Fys, a pro rozšíření vědomostí o této vědě nad látku středoškolskou se velice hodí. Rovnice (145) je zvláštním případem pro $s_1 = s_2$ tedy $q_1 v_1 = q_2 v_2$ a zisk energie jedině gravitační.

a B. Práce gravitačních sil, jež zde jsou jedinými zdroji energie, za jednotku časovou snadno se vyčíslí: Zvedneť se hmota $sq_c V_c$ poprvé do výše dvojnásobné amplitudy vertikálního kmitu, podruhé pouze do výše amplitudy a, takže práce ta jest rovna dráze násobené silou čili součinem z hmoty a urychlení zemské tíže, čili součinem $sq_v V_v g$.

Vraťme se tedy k tlakům. Tlak v místě C buď roven P. Ježto částice v těch místech má maximální rychlost vertikální, t. j. ježto její vertikální urychlení je rovno nulle (ve Vaší fysice v odstavci o harmonickém pohybu, je-li ve výraze pro $r_2 \cos \omega t = 1$, je $\sin \omega t = o$ a tedy $a_2 = o$), je tlak P roven hydrostatickému tlaku ve střední hloubce h, to jest $P = sgh$. Částice v průřezu B jsou ve větší hloubce pod povrchem vodním než částice v C, částice v D pak v hloubce menší Můžeme tedy psáti tlak v C jakožto $P + p$, tlak v D pak $P - p$. Při tom však není p prostě přírůstek tlaku na základě zvětšení střední hloubky o $a_0 - a$ pod M, resp. zmenšení její o stejný obnos pod N, kde a_0 je amplituda částice na volném povrchu vodním. Musíme totiž přihlédati k tomu, že částice v B a C nemají rychlosti vertikální a za to jako vždy u harmonického kmitání maximální urychlení a to v B směrem dolů, v D směrem nahoru. O hmotě m, která v poli zemské tíže padá urychlením $\gamma > g$, dá se i experimentálně dokázati,*) že tlačí na svůj podklad (po případě napíná niť, na níž je zavěšena) nikoli svou celou váhou mg, nýbrž pouze silou $m(g - \gamma)$. Tím jsou poměry tlakové v B a D komplikovány. Nemusíme se však jimi blíže zabývati, stačí zatím svrchu učiněný předpoklad tlaku $P + p$ a $P - p$; veličinu p určí samy pozdější úvahy.

Po všem, co bylo řečeno, můžeme dosadivše do rovnice (5) psáti pro trubici DB

$$q_v V_v (P + p + \tfrac{1}{2} s V_v^2) - q_d V_d (P - p + \tfrac{1}{2} s V_d^2) = - sq_v V_v g \, . \, 2a$$

a pro trubici CB

$$q_v V_v (P + p + \tfrac{1}{2} s V_v^2) - q_s V_s (P + \tfrac{1}{2} s V_s^2) = - sq_v V_v ga.$$

Krátíce stejnými součiny qV a přemístíce obdržíme

$$\tfrac{1}{2} s V_v^2 - \tfrac{1}{2} s V_d^2 = - 2p - 2gsa \tag{6}$$

$$\tfrac{1}{2} s V_v^2 - \tfrac{1}{2} s V_s^2 = - p - gsa, \tag{7}$$

*) Viz na př. *Novákova* Fysika, str. 57. násl.

čili po vyloučení p

$$V_v^2 + V_h^2 = 2V_s^2$$

a po dosazení hodnot z (2), (3) a (4) a krátounké redukci

$$\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2, \text{ to jest } b = a.$$

Jsou tedy amplitudy kmitání vertikálního a horizontálního v téže hloubce stejné, částice obíhají dráhy kruhové se stálou úhlovou rychlostí. Tvar vlny jest obr. 2. správně znázorněn. Křivka, kterou je dán, nazývá se *trochoidou**) nebo prodlouženou cykloidou. Valí-li se kruh poloměru $\lambda/2\pi$ po spodní straně přímky vedené ve výšce $\lambda/2\pi$ nad střední hladinou vrstvy, tedy opisuje bod o a od jeho středu vzdálený profil vlny.

Z obr. 2. je patrno, že na povrchu vody plovoucí předmět posune se poněkud ve směru postupu vln, octne li se na vrchu vlny; v dolu vrací se zase zpět.

4. Nyní snadno získáme vztah pro závislost postupné rychlosti V vln na jejich délce vlnové λ. Dosaďme do rovnice (7) za rychlosti V_v a V_s hodnoty z (3) a (4) a $a = b$. Pak

$$\tfrac{1}{2}sV^2\left(1 - \frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 - \tfrac{1}{2}sV^2\left\{1 + \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2\right\} = -p - gsa$$

a

$$V^2 = \frac{p + gsa}{s \cdot \dfrac{2\pi a}{\lambda}}. \tag{8}$$

V značí zde postupnou rychlost vln ve střední hloubce h pod povrchem, kde je amplituda kmitů a. Rychlost však musí být ve všech hloubkách, tedy pro všechny amplitudy stejná, aby trvale se nacházely částice téže vertikální přímky v téže fasi kmitů. V nesmí záviset na h, tedy ne na a, čili a se musí na pravé straně zkrátit. To je možno jen tehdy, je-li p úměrno a, t. j. $p = ka$. Je-li však délka vln veliká za malé amplitudy, tu je křivost povrchu všude malá, a lze tlak vznikající u zakřiveného povrchu povrchovým napětím zanedbati. Tlak P_0 na povrchu v bodě R (obr. 1.) je rovný tlaku barometrickému a rovněž tak

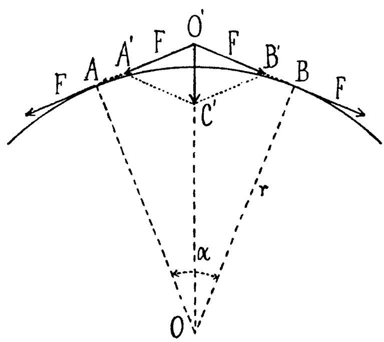
*) τρόχος = kolo; každý bod loukotě opisuje trochoidu, pohybuje-li se kolo po rovině.

tlak $P_0 + p_0$ v bodě M; je-li amplituda u povrchových částic rovna a_0, je $p_0 = ka_0 = o$, čili $k = o$. V libovolné hloubce jest tudíž $p = ka = o$.

Můžeme li tedy zanedbati vliv povrchového napětí, jest tlak podél celé proudové trubice stálý, a to nejen na povrchu, nýbrž v každé hloubce a pro postupnou rychlost vln plyne vzorec

$$V^2 = \frac{gsa}{s \cdot \frac{2\pi a}{\lambda}} = \frac{g\lambda}{2\pi} \quad \text{čili} \quad V = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{9}$$

Je-li tedy vlnění podmíněno pouze tíží, je postupná rychlost vln úměrna druhé odmocnině z vlnové délky — vlny delší šíří se rychleji než krátké.



Obr. 3.

Zavedení povrchového napětí F v naše úvahy nečiní přílišných obtíží, vzpomenete-li na jeho význam, jak je objasněn v prvém díle Vaší fysiky. Mysleme si část vrchu vlny, vytknutou horizontálními přímkami, jichž stopy na rovině nákresné jsou body A a B (obr. 3.), a jichž délka na papíru kolmá budiž rovna jedničce. Na této délce působí povrchové napětí, takže síla v A i B se rovná délce $\times$ povrch. napětí F, čili zde přímo F. Obě síly skládají se, přeneseme-li je do O', ve výslednici $O'C'$, kterou vypočteme. Malou část AB volného povrchu vlny lze stotožniti s válcem kruhovým, čili křivku AB s částí kruhu o středu O a poloměru $AO = BO = r$, zvaném poloměrem křivosti. Středový úhel α bude, omezíme-li se na nejbližší okolí vrcholu vlny, velmi malý, takže z podobnosti trojúhelníků OAB a $A'O'C'$ plynoucí přesný výraz pro sílu $O'C' = F \,.\, \sin\alpha$ přechází v dostatečně přibližný $F\alpha$. Měříme-li α v míře obloukové, jest délka oblouku AB rovna $r\alpha$. Síla $F\alpha$ rozdělí se na plochu rovnou $1\times$ oblouk AB a způsobuje tedy tlak p_0 rovný $F\alpha$ dělenému obloukem AB. Dosadíme-li sem za oblouk plyne pro tlak $p_0 = F/r$.

Jde o to, vyčísliti poloměr křivosti r. Ježto, jak snadno lze dokázati, má profil vlny přibližně tvar sinusoidy $y = a_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$, kde y jest měřeno od klidné hladiny vertikálně vzhůru, má na vrchu i v dolu vlny reciproký poloměr křivosti až na znamení hodnotu $\frac{1}{r} = a_0 \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$ a tedy tlak p_0 od povrchového napětí, směřující na vrchu vlny směrem dolů, v dolu vlny pak vzhůru hodnotu $p_0 = F a_0 \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$. Tento tlak přistupuje na vrchu vlny k tlaku barometrickému P_0.

Ježto však $p_0 = k a_0 = a_0 F \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$ je $k = F \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$ a v určité hloubce, kde amplituda je a,

$$p = ka = a \cdot F \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2}. \tag{10}$$

Dosazením do vzorce (8) obdržíme tudíž všeobecněji s ohledem na povrchové napětí

$$V^2 = \frac{aF\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + gsa}{s \cdot \frac{2\pi a}{\lambda}} \quad \text{čili} \quad V = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g + \frac{F}{s}\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right)}. \tag{11}$$

5. Řekli jsme, že kmitové amplitudy částic ubývá s rostoucí hloubkou a jde nyní o to, stanoviti zákon, dle něhož se tak děje. Představme si (viz obr. 1.), že prvá vlna postupuje rychlostí V z leva v pravo po klidné před tím hladině. V čelní rovině SS přichází k vrstvám tloušťky δ, ve které si myslíme celou hloubku rozdělenu. Udělme veškeré vodě rychlost V z prava v levo; vlny pak stojí nepohnutě a voda pod nimi běží nakreslenými proudovými trubicemi, šířky rovné jedničce délkové, jak jsme i dříve předpokládali. Vertikální vzdálenost dvou krajních částic ve vrchu vlny, která byla dříve stejná a rovna δ, bude nyní v různých hloubkách různá, ale tam, kam až vlnění zasahá, větší než δ a to o rozdíl amplitud $a_0 - a_1$, $a_1 - a_2$ atd., označujeme-li amplitudy postupně hlubších vrstev rostoucími indexy. Podobně bude vertikální tloušťka proudových trubic pod doly vlny nyní $\delta - a_0 + a_1$, $\delta - a_1 + a_2$ atd. Ježto horizontální tloušťka vrstvy

je rovna jedničce, budou průřezy na př. druhé vrstvy shora pod vrchem q_v a pod dolem vlny q_d dány

$$q_v = \delta + a_1 - a_2 \qquad q_d = \delta - a_1 + a_2.$$

Pro nestlačitelnost kapaliny musí však touž trubicí proudovou procházeti všude totéž sekundové množství její, takže patrně

$$V_v q_v = V_v(\delta + a_1 - a_2) = V\delta$$

a

$$V_d q_d = V_d(\delta - a_1 + a_2) = V\delta,$$

z čehož plyne po krátké redukci

$$V_v^2 - V_d^2 = \frac{-4 \cdot \frac{a_1 - a_2}{\delta}}{\left(1 - \left(\frac{a_1 - a_2}{\delta}\right)^2\right)^2}.$$

Předpokládáme-li, že amplitudy a_0 na volném povrchu jsou proti délce vln malé, budou rozdíly $a_1 - a_2$ tím menší, takže lze ve jmenovateli kvadrát zlomku $(a_1 - a_2) : \delta$ zanedbati proti jedničce a psát přibližně

$$V_v^2 - V_d^2 = -4\,\frac{a_1 - a_2}{\delta}.$$

Dosaďme tento výsledek do rovnice (6), kde za a na pravé straně lze psát a_1, a současně dosaďme tamže hodnotu p z (10). Tak obdržíme

$$V^2(a_1 - a_2) = a_1\delta\left(\frac{F}{s}\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + g\right)$$

a dosazením za závorku na pravé straně z rovnice (11)

$$a_1 - a_2 = \frac{2\pi}{\lambda}a_1\delta \quad \text{čili} \quad a_2 = a_1\left(1 - \frac{2\pi}{\lambda}\delta\right).$$

Známe-li tedy amplitudu a_1 ve střední hloubce h, obdržíme dle tohoto předpisu amplitudu a_2 v hloubce $h + \delta$. Pokračujíce od povrchu můžeme postupně psáti

$$a_1 = a_0\left(1 - \frac{2\pi}{\lambda}\delta\right) \quad a_2 = a_1\left(1 - \frac{2\pi}{\lambda}\delta\right) = a_0\left(1 - \frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)^2 \ldots$$

$$a_n = a_0\left(1 - \frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)^n.$$

Pokračujeme-li do hloubky řadou arithmetickou, klesá amplituda řadou geometrickou. Označme střední hloubku vrstvy, v níž se vyskytuje amplituda a_n písmenou h, tedy $n\delta = h$ a buď $2\pi\delta/\lambda = -1/x$. Je-li δ velmi malé, musí x být svojí absolutní hodnotou velmi veliké. Dále

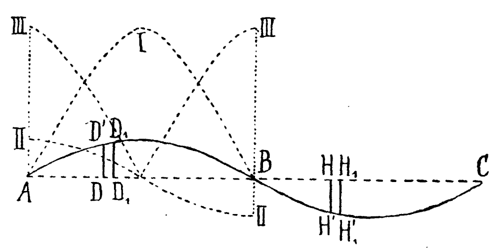
$$n = \frac{h}{\delta} = -\frac{2\pi x h}{\lambda} \quad \text{a tedy}$$

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{-2\pi x h}{\lambda}} = a_0 \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{-2\pi h}{\lambda}}.$$

Klesá-li δ a roste tedy x do nekonečna, blíží se, jak víte z *Bydžovského-Vojtěcha*: Mathematiky pro nejvyšší třídu středních škol, výraz uzavřený hranatými závorkami číslu $e = 2{\cdot}7182$, základu přirozených logarithmů, takže

$$a_n = a_0 e^{\frac{-2\pi h}{\lambda}}. \tag{12}$$

Dle tohoto zákona klesá amplituda kmitů se střední hloubkou, tedy jak se snadno numericky přesvědčíme, velmi rychle.



Obr. 4.

6. Sled vln vodních representuje určitý obnos energie a jde o to, stanoviti jeho velikost. Je-li hladina vodní v klidu, má její potenciální energie zajisté svou nejmenší hodnotu. Potenciální energie se zvýší, vytvoří-li se vlna. Můžemeť si představiti, že z místa H (obr. 4.) byl vyňat sloupec kapaliny, který byl přenesen do místa D, čímž těžiště jeho stouplo, potenciálná energie vzrostla. Tento vzrůst lze snadno stanoviti, přepokládáme-li, že amplituda vlnění a_0 je poměrně malá proti vlnové délce λ, takže vlna má přibližně tvar sinusoidy

$$y = a_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda},$$

kde y značí pořadnici výškovou DD' v jistém místě, x pak vzdálenost AD od začátku A. Obě polovice AB a BC vlny jsou velikosti totožné, tvaru geometricky shodného, takže elementy téže délky $DD_1 = HH_1 = dx$ v místech x a $x + \frac{1}{2}\lambda$ odpovídají týmž objemům, jichž těžiště stouplo celkem o $\frac{1}{2}(H'H + DD')$ čili o y. Má-li vlna za papír tloušťku rovnou jedničce délkové, jest plošný obsah čtyrúhelníků $DD_1D'_1D' = HH_1H'_1H$ roven $y \, . \, dx$ a objem destičky o šířce rovné jedničce numericky týž. Práce jest dána součinem váhy a zvednutí, tedy

$$sgy \, . \, dx \, . \, y = sgy^2 \, . \, dx,$$

kde patrně s je spec. hmota a g zrychlení tíže. Celé zvýšení potenciálné energie pro jednu vlnu najdeme, vyčerpáme-li takovýmito páry elementů obrazec $AD'BD$, t j. bude rovno E_g

$$E_g = \int_0^{\lambda/2} sgy^2 \, dx = . \, sg \int_0^{\lambda/2} a_0^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda} \, dx.$$

Jak vidno, dosadili jsme již za y^2 jeho nahoře udanou hodnotu. Jde o výpočet integrálu.*) Abychom jej pokud možno zjednodušili, zakresleme do obr. 4. vedle křivky

$$y = a_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

ještě křivku

$$y_1 = y^2 = a_0^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda},$$

označenou I, tím, že nanášíme všude místo pořadnic jejich dvojmoci. Pak integrál hledaný

$$J = \int_0^{\lambda/2} a_0^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda} \, dx = \int_0^{\lambda/2} y_1 \, dx$$

má význam obsahu plochy uzavřené mezi křivkou I a osou. Zakresleme však do obrazce ještě křivku II danou rovnicí

$$y_2 = a_0 \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda}$$

---

*) Čtenáře znovu upozorňujeme na příslušné stati *Bydžovského* a *Vojtěcha*: Mathematiky pro nejvyšší třídu středních škol, nebo na *Vojtěchovy*: Základy mathematiky.

a křivku III, danou

$$y_3 = y_2^2 = a_0^2 \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Pak integrál

$$\int_0^{\lambda/2} a_0^2 \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda}\, dx = \int_0^{\lambda/2} y_3\, dx$$

znamená plochu křivky III, která, jak je okamžitě patrno z obdobného průběhu hodnot sinusů a kosinusů, je táž jako plocha křivky I, takže lze psáti

$$J = \int_0^{\lambda/2} a_0^2 \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda}\, dx = \int^{\lambda/2} a_0^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda}\, dx.$$

Sečteme-li oba integrály, dělivše je konstantou a_0^2, obdržíme

$$\frac{2J}{a_0^2} = \int_0^{\lambda/2} \left(\sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda} + \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda}\right) dx = \int_0^{\lambda/2} dx = \tfrac{1}{2}\lambda.$$

Z toho plyne dosazením hodnoty integrálu J do výrazu pro potenciálnou energii gravitační E_g

$$E_g = sg\, a_0^2\, \tfrac{1}{4}\lambda = \tfrac{1}{4} sg\, a_0^2 \lambda. \tag{13}$$

K této pot. energii gravitační přistupuje ještě potenciálná energie povrchová E_n, vzniklší tím, že původní povrch klidný, rovný
$$2 \,.\, AB \,.\, 1 = 2\tfrac{1}{2}\lambda = \lambda$$
zvětšil svou velikost; každá plošná jednička povrchu representuje obnos F energie od povrchového napětí. Nový povrch prohnutý je numericky — za šířky vlny rovné jedničce — dán délkou $AD'D_1'BH'H'_1C$ čili dvojnásobnou délkou $AD'B$. Kvadrát elementu délkového

$$(ds)^2 = \overline{D'D'_1}^2$$

je dle věty Pythagorovy dán

$$(ds)^2 = \overline{D'D'_1}^2 = \overline{DD}_1^2 + (D'_1 D_1 - D'D)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

a celou délku a tedy i povrch půlvlny nalezneme součtem elementů ds od A až do B, jakožto

$$\int_0^{\lambda/2} ds = \int_0^{\lambda/2} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_0^{\lambda/2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Z daného

$$y = a_0 \sin \frac{2\pi\lambda}{\lambda}$$

plyne

$$\frac{dy}{dx} = a_0 \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda} x,$$

které do integrálu dosadíme.

Rozvineme-li odmocninu dle binomické poučky a vynecháme všechny členy, v nichž přichází čtvrtá a vyšší mocniny poměru $a_0 : \lambda$, který předpokládáme velmi malým, dostáváme výsledkem

$$\int_0^{\lambda/2} ds = \int_0^{\lambda/2} \left(1 + \tfrac{1}{2} a_0^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda}\right) dx = \tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2} a_0^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \int_0^{\lambda/2} \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda} . dx.$$

To je nový povrch půlvlny. Odečteme-li původní $\frac{1}{2}\lambda$ a dosadíme-li za poslední integrál hodnotu výše nalezenou $\frac{1}{4}\lambda$, plyne zvětšení povrchu půlvlny, které je u vrchu i dolu stejné, takže u celé vlny je dvojnásobné. Násobíme-li je konečně povrchovým napětím F, dostaneme celkové zvýšení povrchové energie potenciálné jakožto

$$E_n = F a_0^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} . \tfrac{1}{4}\lambda. \tag{14}$$

Celá energie potenciálná vlny bude tedy E_p, součet energie gravitační a povrchové, tedy rovna

$$E_p = E_g + E_n = a_0^2 \tfrac{1}{4}\lambda \left(gs + F . \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right). \tag{15}$$

7. Ale vlna má vedle energie potenciálné také energii kinetickou, neboť jsme viděli, že veškeré částice opisují větší nebo menší kruhy o poloměrech a, s rychlostí (tangenciální) $2\pi a : T$. Představme si v hloubce h pod povrchem vodním vrstvu tlouštky (ve směru vertikálním) dh. Za (horizontální) šířky vlny rovné jedničce jest objem vrstvy pod jednou vlnou roven $\lambda . dh$ a hmota v ní obsažených částic jest $s\lambda \,.\, dh$. Ježto všechny se pohybují rychlostí

$$2\pi a : T = 2\pi a\, V : \lambda,$$

jest jejich kinetická energie rovna

$$\tfrac{1}{2} s\lambda \,.\, dh \,.\left(\frac{2\pi a V}{\lambda}\right)^2.$$

Celou kinetickou energii E_k jedné vlny obdržíme, sečteme-li podobné výrazy pro vrstvy ve všech hloubkách od povrchu $h = 0$ až do hloubky velmi veliké $h = \infty$. Dosadíme-li ještě za a výraz (12), máme tedy

$$E_k = \tfrac{1}{2} s\lambda \frac{4\pi^2}{\lambda^2} V^2 \,.\, a_0^2 \int\limits_{h=0}^{h=\infty} e^{-\frac{4\pi h}{\lambda}} dh.$$

Hodnotu integrálu obdržíme, dosadíme-li meze do výrazu

$$\left[-\frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{4\pi h}{\lambda}}\right]_{h=0}^{h=\infty} = \frac{\lambda}{4\pi},$$

takže kinetická energie vlny jest

$$E_k = \tfrac{1}{4} s\lambda a_0^2 \,.\, \frac{2\pi}{\lambda} V^2$$

a dosadíme-li za rychlost V její hodnotu ze vzorce (11)

$$E_k = a_0^2\, \tfrac{1}{4} \lambda \left(gs + F\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right) = E_p. \tag{16}$$

Vzorec tento jest zajímavý; praví: Postupuje-li vlna po povrchu kapaliny, jest právě polovina její celkové energie energií potenciálnou, druhá pak polovina jest kinetickou.

8. Výsledek předchozího výpočtu vede nás k zajímavé úvaze. Postupuje-li po povrchu vodním vlna, nepostupují částice s ní, nýbrž konají své kruhové dráhy kolem pevných středů. To znamená — s postupující vlnou nepostupuje její kinetická energie. Energie s vlnou postupující jest tedy čistě potenciálná; jest to patrno — částice na vrchu vlny se svou maximální energií potenciálnou postupují v před, částice v dolu s minimální ustupují do zadu (viz obr. 2.)

Představme si nyní nějakou myšlenou vertikální rovinu kolmou na směr postupu vln. Prošla-li jí jedna úplná vlna, t. j.

jeden vrch a jeden důl, neprošla jí veškerá energie jedné vlny, nýbrž pouze polovice její; aby jí prošla celá energie jedné vlny, musí jí prostoupiti dvě úplné vlny.

Skupinu vln, obsahující omezený počet celých vln, můžeme si představiti jako jakýsi povoz, který veze po povrchu vodním energii. Ježto ji však přenáší pouze poloviční rychlostí postupu vln, musí se skupina ta pohybovati pouze poloviční rychlostí, než je postupná rychlost V vlny jediné. Musí tedy v předu skupiny vlny postupně zanikati zmenšováním amplitud, v zadu pak vznikati z ponechané v těch místech poloviny energie vlny nové o amplitudě menší. Tento vysoce zajímavý a důležitý zjev lze snadno pozorovati, způsobíme-li na klidné hladině rybníka skupinu vln. Vede nás k tomu, že musíme rozeznávati mezi postupnou rychlostí jediné vlny a rychlostí skupiny vln jakožto celku, zvanou rychlostí skupinovou (vitesse de la phase a vitesse de l'amplitude neb d'un train d'ondes, wave — velocity a group — velocity, Wellen- und Gruppengeschwindigkeit.)

Tyto pojmy objasníme si nejlépe, předpokládáme-li, že v řadě bodové šíří se od místa O vlnění

$$y = \sin \frac{2\pi}{T} t$$

rychlostí V_1 a délky vlnové λ_1, takže $V_1 T_1 = \lambda_1$. Do bodu vzdáleného o x *cm* od O přijde teprvé po čase $x : V_1$ a potom bude stále v téže fasi, v jaké bylo vlnění v bodě O právě před časem $x : V_1$. Bude tedy v bodě charakterisovaném vzdáleností x výchylka v libovolném čase (je-li amplituda rovna 1)

$$y_1 = \sin \frac{2\pi}{T_1}\left(t - \frac{x}{V_1}\right) = \sin \frac{2\pi}{\lambda_1}\left(V_1 t - x\right).$$

Kdyby se z O současně šířilo jiné vlnění o délce vlnové málo rozdílné V_2 a kmitové době T_2, bude od něho v bodě x výchylka v témž čase t

$$y_2 = \sin \frac{2\pi}{\lambda_2}(V_2 t - x).$$

Výchylka celková y jest dána součtem výchylek, t. j.

$$y = y_1 + y_2 = \sin m_1 (V_1 t - x) + \sin m_2 (V_2 t - x),$$

píšeme-li kratčeji

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} = m_1, \quad \frac{2\pi}{\lambda_2} = m_2.$$

Známý vzorec

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

ztotožněný s y dává za

$$2\alpha = (m_1 V_1 + m_2 V_2) t - (m_1 + m_2) x,$$
$$2\beta = (m_1 V_1 - m_2 V_2) t - (m_1 - m_2) x,$$

takže

$$y = 2 \cos \tfrac{1}{2} \{ (m_1 V_1 - m_2 V_2) t - (m_1 - m_2) x \} \\ . \sin \tfrac{1}{2} \{ (m_1 V_1 + m_2 V_2) t - (m_1 + m_2) x \} \tag{17}$$

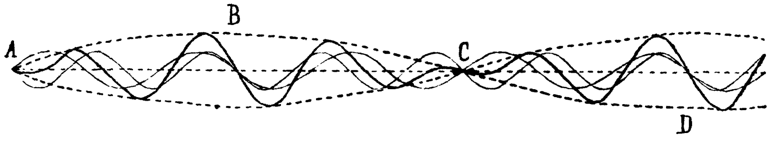
Označme v tomto málo přehledném vzorci

$$\frac{1}{2(m_1 - m_2)} = \frac{2\pi}{L}, \quad \frac{m_1 V_1 - m_2 V_2}{m_1 - m_2} = v. \tag{18}$$

Pak můžeme prvou část jeho psát

$$Y = 2 \cos \tfrac{1}{2} \{ (m_1 V_1 - m_2 V_2) t - (m_1 - m_2) x \} \\ \doteq 2 \cos \frac{2\pi}{L} (vt - x). \tag{19}$$

Jest patrno, že značí jednoduchou harmonickou křivku vlnové délky L, která postupuje rychlostí v podél osy x-ové.



Obr. 5.

V obraze 5. je vyznačena čárkovaně $ABCD$. Skutečné amplitudy jednotlivých částic jsou pak dosazením do (17)

$$y = Y \sin \tfrac{1}{2} \{ (m_1 V_1 + m_2 V_2) t - (m_1 + m_2) x \}$$

a jsou naznačeny v obr. 5. křivkou vytaženou, platící pro určitý okamžik časový, určité t. Ježto m_1 a V_1 jsou dle předpokladu málo odlišné od m_2 a V_2, můžeme v prvém přiblížení psát za střed

$$\tfrac{1}{2}(m_1 V_1 + m_2 V_2) = m V$$

a podobné

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) = m.$$

Výsledná rovnice

$$y = Y \sin m(Vt - x) \tag{20}$$

značila by obyčejný sled vln postupujících rychlostí V, kdyby Y bylo stálé. Ježto však Y se mění s časem t i se vzdáleností x, značí rovnice (20), že každá z vln silněji vytažených postupuje podél osy x-ové rychlostí V, měníc stále svoji amplitudu a to tak, že se vždy dotýká křivky čárkované, která současně postupuje podél osy x-ové rychlostí v. Obaluje tedy křivka čárkovaná postupující *skupiny* vln. Snadno se přesvědčíme o těchto dedukcích skutečným grafickým provedením, sčítajíce amplitudy dvou sinusoid graficky, a kreslíce polohu jejich pro dva okamžiky časové. Zároveň z grafu je pak patrno, že se počet celých délek vlnových obou skládaných pohybů mezi body A a C liší o jednu; musíť v bodě A amplitudy obou kmitů míti směry opačné, v B souhlasné, v C pak opět opačné, a jeden souhlas mezi dvěma opaky nastane, je-li na trati AC na př. n celých vln delších a $(n + 1)$ kratších; v obrazci 5. jsou to 3 a 4. Délka skupiny vlnové jest tedy dána vztahem

$$n\lambda_2 = (n + 1)\lambda_1,$$

kde ovšem $\lambda_1 < \lambda_2$. Postupují-li oba kmitavé pohyby stejnou rychlostí $V_1 = V_2 = V$, postupují také skupiny touž rychlostí, neboť dle (18) pak $v = V$, a vše se děje tak, jako by celý obrazec 5. se posunoval podél osy x-ové. Když však kratší vlny běží rychleji, tu neustále předbíhají delším, a čárkovaná křivka obr. 5. se posunuje z prava na levo rychleji než křivka vytažená. Maximální amplituda B postupuje rychleji než jednotlivé vlny. Opak nastává, je-li postupná rychlost kratších vln menší než vln delších.

Řekli jsme, že na délce jedné skupiny je rozloženo n vln delších a $n + 1$ vln kratších; podobně na délce dvou skupin je $2n$ vln delších a $2n + 2$ kratších. Obráceně můžeme říci, že na každé délce je tolik skupin, o kolik je na ní více vln kratších než delších. Jeli tedy $\lambda_2 > \lambda$, je na jedničce délkové $1/\lambda_2$ vln delších a současně $1/\lambda_1$ vln kratších, čili $1/\lambda_1 - 1/\lambda_2$ skupin.

Upněme nyní pozornost na určitý pevný bod v prostoru, na př. B. Bude v maximální amplitudě, když pod ním procházejí současně vrchy obou druhů vln. Pak amplituda jeho klesá až na nullu, když pod ním je současně vrch jedné a důl druhé vlny a znovu stoupne na maximální, když se vrátí stav prvý. Přešlo pod ním tedy n delších a $(n+1)$ kratších vln, čili jedna skupina. Počet skupin, které v jiném čase prošly pevným bodem, jest tedy roven rozdílu mezi počtem vln kratších a delších, které v téže době prošly. Za vteřinu projde tím bodem tolik vln delších, kolikrát je délka λ_2 obsažena na délce V_2 čili V_2/λ_2 vln; podobně projde za vteřinu V_1/λ_1 vln kratších, a dle toho, co jsme řekli, projde za vteřinu $V_1/\lambda_1 - V_2/\lambda_2$ skupin.

Je-li však v rychlost skupin, projde tato délka pod bodem B za vteřinu, a ježto na každé jednotce délkové je, jak jsme viděli nahoře, $1/\lambda_1 - 1/\lambda_2$ skupin, je počet prošlých skupin ve vteřině také dán součinem těchto čísel, čili

$$v\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)=\frac{V_1}{\lambda_1}-\frac{V_2}{\lambda_2}, \text{ to jest } v=\frac{\frac{V_1}{\lambda_1}-\frac{V_2}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}}. \qquad (21)$$

Tento vzorec je identický s (18), liše se jen faktorem 2π v čitateli i jmenovateli.

Předpokládejme pro vzájemnou závislost postupné rychlost vln V a délky vlnové λ vzorec

$$V = K\lambda^n, \qquad (22)$$

kde K jest stálé, n exponent pro různé druhy vlnění různý. Ze vzorce (18) nebo (21) za předpokladu, že $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta$, kde δ je veličina velmi malá, plyne

$$v = \frac{\lambda_2 V_1 - \lambda_1 V_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{(\lambda_1+\delta)\,K\lambda_1^n - \lambda_1\,K(\lambda_1+\delta)^n}{\delta}$$
$$= K\lambda^n(1-n) = V(1-n), \qquad (23)$$

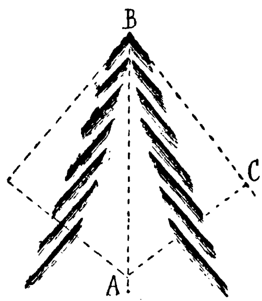
když v binomickém rozvoji vynecháme členy řádem δ^2 počínaje.

Vzorce (22) a (23) dávají vztah mezi rychlostí skupin a rychlostí vln. U vln gravitačních měli jsme dle (9)

$$V = K\,.\,\lambda^{\frac{1}{2}} \text{ proto } v = \tfrac{1}{2}V.$$

U velmi kraťounkých vln čeřivých má v (11) převahu člen od povrchového napětí; tam pak $n = -\frac{1}{2}$ a $v = \frac{3}{2}V$. U vln zvukových a světelných ve vzduchu není (v značném přiblížení) rychlost závisla na délce vlnové, t. j $n = 0$ a $v = V$. U transversální vlny na elastické tyči je $n = -1$ a tudíž $v = 2V$, čili rychlost skupin dvakráte větší než vlny samé — chování právě opačné než u gravitačních vln vodních.

Zde je na místě zmínka o omylu, který se často v knihách vyskytuje. Plave-li těleso nějaké po vodě rychlostí u z bodu A do B (obr. 6.) — mysleme na př. na loď nebo kachnu plovoucí po rybníce — zvedá svou přídí vodu a vzniká v tomto místě vodní vlna. Kdyby se mohla šířit po vodě jediná příslušnou jí rychlostí V, tedy by rozruch hladiny tvořil úhel $ABC = \alpha$, a daný vztahem $\sin \alpha = AC : AB = V : u$. Tak to vskutku stává v knihách. Ale jednotlivá vlna nemůže se šířit, aniž by měnila svůj tvar; jak postupuje, mizí v předu, jak víme, a v zadu vznikají vlny nové a skupina takto vytvořená šíří se rychlostí $\frac{1}{2} V$. Tak vzniká jakýsi stupňovitý útvar naznačený na obrazci.



Obr. 6.

9. Těleso plující po vodě doznává odporu proti pohybu. Pochází jednak od tření, závislého od velikosti plochy vodou omočené a od povahy kapaliny, jakož i od rychlosti tělesa, leč dá se theoreticky vypočísti. Podruhé však vzbuzuje těleso ono vlny, které neustále od něho odnášejí energii, kterou musí hnací síla nahražovati. Tato část síly nedá se theoreticky stanoviti, ač je zvláště při stavbě velikých lodí velmi důležitá. Alespoň částečnou informaci o ní lze však získati následující úvahou dimensionální.

Budiž f síla odporová, vznikající produkcí vln. Závisí patrně na jakési n-té potenci urychlení zemské tíže g, které hraje roli při vzniku gravitačních vln; dále na x-té potenci hmoty tělesem vytlačené kapaliny, čili hmoty m tělesa; dále na neznámé y-té potenci lineární velikosti l tělesa a konečně na z-té potenci jeho rychlosti V. Celkem je

$$f = K \,.\, g^n m^x l^y V^z,$$

kde K je prostá numerická konstanta, závislá na tvaru tělesa, nikoli však jeho velikosti. Dimense základních jedniček hmoty M, délky L a času T na obou stranách rovnice musí býti stejné, jako v každé rovnici fysikální smysl mající. Dosadíme-li je, plyne

$$\frac{ML}{T^2} = \left(\frac{L}{T^2}\right)^n M^x L^y \left(\frac{L}{T}\right)^z.$$

Z toho plyne, že musí

$$1 = x, \quad 1 = n + y + z, \quad -2 = -2n - z,$$

čili po výpočtu

$$x = 1, \quad y = n - 1, \quad z = 2(1 - n),$$

takže lze psáti

$$\frac{f}{m} = K g^n \left(\frac{V^2}{l}\right)^{1-n}. \tag{24}$$

Methoda dimensí nestačí určiti n, ale tolik můžeme tvrditi, že nemůže být rovno 1, ježto by pak odpor nezávisel na l (ježto $y = 0$) a V ($z = 0$), což je absurdní.

Podíl $f : m$ je odporová síla působící na jedničku hmoty plovoucího tělesa; jest patrno, že je stálá, pokud podíl $V^2 : l$ jest stálý. Když tedy model délky l, zhotovený přesně ve tvaru zamýšleném pro loď, vyžaduje síly f_1 na jedničku hmoty, aby se pohyboval rychlostí V, tedy loď dle něho zbudovaná a k-kráte lineárně větší, bude vyžadovati téže síly na jedničku hmoty, pohybuje-li se rychlostí $V \,.\, \sqrt{k}$. Takto určují se nejvhodnější tvary lodí na modelech. Vzorec (24), pro praxi venedůležitý, nazývá se dle svého objevitele *Froude-ovým* zákonem srovnávacím.

10. Několik slov budiž řečeno o vlnách na povrchu vody velmi mělké, tak mělké, že její hloubka H je malá proti vlnové délce vln na ní se pohybujících, ač ji pokládáme za velikou proti amplitudě y vln povrchových. Zde nemohou částice u dna vykonávati vertikální složku svého pohybu kruhového, takže zbývá jim pouze složka horizontální — kmitají sem tam ve vodorovné rovině, neobíhají v kruhu. Vertikální složky kmitové musí do hloubky velice rychle ubývati, kdežto horizontální může zůstávati táž. A z této — neodůvodněné leč souhlasem výsledků se skutečností — hypothesy vyjdeme.

Mysleme si, podobně jako v obr. 1., rozdělenou celou hloubku H na n stejných vrstev tloušťky H/n. Vlny přetvoří původní roviny v jakési válcové plochy, asi jako v obr. 1. Je-li V postupná rychlost vln z leva v pravo, udělme zase celé kapalině i v pravo od S, kam ještě vlnění nepostoupilo, rychlost V z prava na levo. Vlny zůstanou nepohnuty v prostoru, kapalina proudí trubicemi proudovými. Ježto horizontální oscillace částic jsou ve všech hloubkách stejné dle předpokladu, je maximální a minimální rychlost kapaliny táž ve všech hloubkách. Pod vrchem M vlny je tedy rychlost všude stejná a rovněž pod dolem N. Za stejné rychlosti musí však trubice proudové míti všude pod vrchem týž průřez. Je-li amplituda vlny y, tedy průřez jedné trubice bude $(H + y) : n$. Rychlost V_v pak bude, srovnáme-li ji s rychlostí V v části dosud klidné, kde průřez trubice jest $H : n$

$$V_v \frac{H+y}{n} = V \cdot \frac{H}{n}, \quad \text{čili} \quad V_v = V \cdot \frac{H}{H+y}.$$

K určení V uvažujme o trubici prvé pod povrchem. Na pravo od S měla kapalina rychlost V a když se dostala pod M, stoupla o výšku Y proti směru tíže. Tlak v trubici je všude roven atmosférickému P_0. Proto z úvahy zcela podobné jako v odst. 3. plyne

$$(P_0 + \tfrac{1}{2} s V_v^2) - (P_0 + \tfrac{1}{2} s V^2) = -gsy, \text{ čili } V_v^2 - V^2 = -2gy.$$

Dosazením dřívějšího vztahu a zanedbáním $(y : H)^2$ v čitateli, jakož i $y : H$ proti 1 ve jmenovateli plyne

$$V^2 \frac{\frac{2y}{H} + \left(\frac{y}{H}\right)^2}{\left(1 + \frac{y}{H}\right)^2} = 2gy \text{ čili } V = \sqrt{gH}. \tag{25}$$

Když tedy za hořejšího omezení postupují vlny v mělké strouze, je jejich rychlost úměrna druhé odmocnině z hloubky strouhy, ale nezávisí na délce vlnové.*) Šíří se tedy skupina

*) Jakožto cvičení lze snadno dokázati, že rychlost postupu krátkých vlnek čeřivých, je-li hloubka H kapaliny malá proti jejich λ, je dána

$$V \doteq \sqrt{H\left(g + \frac{F}{s}\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right)}.$$

vln stejně rychle jako vlna individuálná a může se nerušeně v kanálu šířit vlna jediná.

Scott Russel studoval podobné vlny na průplavech. Když se má táhnouti bárka průplavem, je výdaj práce nejmenší, pohybuje-li se touž rychlostí jako vlna, kterou svou přídí vzbuzuje. Nednášíť pak vlna, pohybujíc se s ní společně, žádnou energii pryč.

Vzorec (25) podává vysvětlení, proč se mořské vlny překotí a lámou, přijdou-li na mírně skloněné pobřeží. Vrch vlny nachází se v místě hlubším než předcházející důl, postupuje rychleji, až se do dolu překotí. Přicházejí-li vlny šikmo k pobřeží, tedy poblíže něho zvolňují svůj pohyb a konečně se lámou, jsouce téměř rovnoběžny s břehem.

V tomto empirickém odvození vzorce (25) jsme předpokládali, že i částice u dna mohou nerušeně kývati ve směru horizontálním, ač ve skutečnosti jim v tom brání vnitřní tření kapaliny, která na dně nepohnuta lpí.

Paní *Ayrtonová* hledá důvod, proč přes to vzorec (25) dobře souhlasí se skutečností, ve vírových vláknech, které se na dně vytváří a slouží téměř jakoválečky, po nichž se vrstvy vyšší pohybují. Týmiž víry vysvětluje i jemné vlnky pískové, které se přečasto na písčitém pobřeží vyskytují, ba uvádí s nimi ve vztah i rovnoběžné hromádky korkového písku, které se vytváří ve známých *Kundtových* trubicích.

Astronomická zpráva na leden, únor a březen 1918.

Veškerá udání v čase středoevropském vztahují se na meridián středoevropský a 50^0 severní zeměpisné šířky.

Přehled oběžnic.

Merkur mizí začátkem ledna v paprscích zapadajícího Slunce, s nímž vstoupí 2. ledna do spodní konjunkce. V druhé polovině měsíce objeví se na východním nebi, neboť blíží se největší západní elongaci, které dosáhne 25. ledna. Vychází v té době $1^1/_2$ hodiny před Sluncem. V druhé polovici února zmizí v paprscích Slunce, s nímž vstoupí 12. března do svrchní konjunkce. V druhé polovici března objeví se večer na západním nebi. Koncem měsíce zapadá více než $1^1/_2$ hodiny po Slunci.