

Jaroslav Šindelář; Antonín Tuzar
Úvod do teorie stability regulovaných soustav

Kybernetika, Vol. 6 (1970), No. Suppl, (1),3--183

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/124213>

Terms of use:

© Institute of Information Theory and Automation AS CR, 1970

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://project.dml.cz>

Kybernetika

Úvod do teorie stability regulovaných soustav

JAROSLAV ŠINDELÁŘ, ANTONÍN TUZAR

ACADEMIA
PRAHA

15/5

ÚVOD

Teorie stability se zabývá vlivem poruch na chování nejrůznějších systémů. Stabilitou přitom rozumíme kvantitativní vyjádření „odolnosti“ soustavy proti poruchám. Z elementární fyziky je každému dobře znám pojem stability polohy: hmotná kulička v nejnižším bodě jamky je ve stabilní poloze, zatímco táž kulička např. na vrcholu kužele je v poloze nestabilní (labilní). Tato intuitivní představa snadno vede k definici stabilní polohy jako takové, do níž se soustava (těleso, hmotný bod) vždy vrátí, pokud z ní byla vychýlena dostatečně málo, neboli pokud nastala porucha dostatečně malá. Při zkoumání stability dynamických systémů, to je systémů, jejichž stav je v čase proměnný, budeme obdobně za stabilní považovat takové, jejichž chování v čase se změní dostatečně málo, pokud porucha byla dostatečně malá. Přesné definice této stability nalezneme čtenář níže.

V technické praxi se velmi často setkáváme se soustavami, jejichž chování v čase lze popsat obyčejnými lineárními diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty. Uvádíme namátkou např. matematický popis kmitů hmotného bodu, zavěšeného na pružině, rovnice přechodových jevů v elektrotechnice, rovnice pro výstup lineární regulované soustavy s regulátorem ve zpětné vazbě apod. Jak známo, obecné řešení rovnic s konstantními koeficienty závisí na kořenech tzv. charakteristické rovnice. Partikulární řešení, odpovídající kořenům se zápornou reálnou částí, konvergují pro $t \rightarrow +\infty$ k nule a budeme je nazývat stabilní, kdežto řešení, odpovídající kořenům s kladnou reálnou částí, rostou v absolutní hodnotě pro $t \rightarrow +\infty$ nade všechny meze a nazveme je nestabilní. Tato řešení se projeví v chování soustavy, jakmile dojde k poruše, vyjádřené např. změnou počátečních podmínek nebo pravé strany rovnice. Název stabilní a nestabilní se zde vztahuje vlastně k stabilitě ustáleného stavu. Otázkami rozložení kořenů polynomu v komplexní rovině v souvislosti se stabilitou se zabývala řada významných fyziků a matematiků. Uvádíme francouzského matematika C. Hurwitze, který v r. 1856 publikoval práci, v níž uváděl souvislost mezi počtem kořenů s reálnou částí v daném intervalu a počtem znaménkových změn koeficientů jisté kvadratické formy. Podobný problém formuloval v r. 1868 anglický fyzik J. C. Maxwell [28]. Angličan E. J. Routh [32], který se zabýval problémy stability v mechanice, použil Sturmovu větu a Cauchyho teorii indexu a objevil algoritmus pro stanovení počtu kořenů mnohočlenu s kladnou reálnou částí. Z toho potom vyplynulo kritérium stability: stabilní je soustava, která nemá žádné kořeny s nezápornou reálnou částí.

Na řešení problému stability se podílel i Čechoslovák Aurel Stodola, původem z Liptovského

Mikuláše (1859–1942). V době, kdy působil jako profesor na curyšské polytechnice, předložil problém stability parních a plynových turbin [34]. Tato práce byla podnětem pro práci profesora curyšské university A. Hurwitze [15], ve které stanovil algebraické kritérium stability. Podobně jako Routh, vycházel z výsledků C. Hermitea.

V roce 1914 francouzští matematikové Liénard a Chipart stanovili nové kritérium stability. Použili speciální kvadratické formy a získali kritérium podobné kritériu Hurwitzovu. Před tímto má však výhodu, neboť počet determinantových nerovností je asi poloviční.

Podle částečně zveřejněné práce L. Cremera [9] a na ní nezávislé práci A. Leonharda [23] lze znázornit řešení diferenciální rovnice v komplexní rovině. Z toho také vychází Cremerovo-Leonhardovo kritérium stability. Stejný postup byl vypracován A. V. Michajlovem [29]. Toto kritérium se také nazývá Michajlovovo-Leonhardovo.

V roce 1921 uveřejnil J. Schur [33] důkaz Hurwitzovy věty a Routhovo schéma sestavit do přehledné tabulky. Proto se také v literatuře vyskytuje termín Routhův-Schurův algoritmus.

Dalším významným krokem při zkoumání stability bylo určení podmínek stability, vhodně definované, pro složitější a zejména nelineární soustavy. Největší zásluhu v této oblasti má ruský matematik A. M. Ljapunov, který ve své doktorské disertaci [26] v r. 1892 formuloval obecný problém stability pohybu a objevil efektivní přesná kritéria pro tuto stabilitu. Ljapunov rozdělil způsoby řešení problému stability na dvě skupiny: do první skupiny (tzv. první metoda) náleží postupy, při nichž se vyjádří (např. ve tvaru řady) obecné nebo partikulární řešení a vyšetřují se jeho vlastnosti. Druhá skupina (tzv. druhá Ljapunovova metoda) zahrnuje algoritmy, které bez znalosti řešení diferenciální rovnice umožňují na základě vlastností jistých funkcí času a stavových veličin určit, zda soustava je stabilní. Další rozvoj zaznamenala Ljapunovova teorie v pozdějších letech, uvádíme zde např. práce N. G. Četajeva, I. G. Malkina, L. Cezariho, R. Coniho a mnoha jiných.

Uvedený stručný přehled nevyčerpává díla všech autorů, zabývajících se problémem stability. Uvádí pouze ta nejzávažnější, která jsou předmětem následujících kapitol.

Tato práce má podat přehled některých, v praxi často užívaných, výsledků teorie stability. Je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole jsou uvedena nejdůležitější algebraická kritéria stability: Routhovo, Hurwitzovo, Schurovo, Liénardovo-Chipartovo a Michajlovo-Leonhardovo. V další části kapitoly je stručná zmínka o problému stability pro případ proměnných koeficientů diferenciálních rovnic, kritéria stability pro diskrétní systémy a kritéria aperiodické stability. Odvození není provedeno podrobně, je spíš jen naznačeno, ale jsou uvedeny výsledné vztahy, podle kterých lze kontrolovat stabilitu diferenciálních rovnic. Druhá kapitola je věnována první Ljapunovově metodě a zahrnuje mj. některé výsledky O. Perrona a N. P. Jerugina. Třetí kapitola pojednává o druhé Ljapunovově metodě; jsou zde dokázány klasické Ljapunovy věty a některé novější výsledky, které na ně logicky navazují. Poslední, čtvrtá kapitola, je věnována aplikacím teorie stability hlavně na problematiku samočinné regulace lineárních i nelineárních soustav.

V práci, která má posloužit čtenáři jako víceméně elementární úvod do uvedené problematiky a má tedy ryze kompilační charakter, jsme se samozřejmě nemohli zdaleka dotknout všech problémů, které do této oblasti spadají. Jde o to, že teorie stability je stále předmětem zkoumání a stále se objevují nové významné výsledky. Např. v souvislosti se zaváděním samočinných číslicových počítačů vyvstává problém stability samotných numerických metod při mnohonásobném opakování početních operací [2], [11]. Sama první Ljapunovova metoda úzce souvisí s dalším rozvojem kvalitativní teorie diferenciálních rovnic. Otázky stability hrají důležitou roli i v teorii optimálního řízení.

Věříme, že i při omezeném výběru tematiky se nám podaří vzbudit zájem o tuto zajímavou a užitečnou oblast, pro rozvoj technické kybernetiky nezbytnou.

1. STABILITA LINEÁRNÍCH SOUSTAV

Diferenciální rovnice, popisující lineární soustavy mají buď konstantní nebo proměnné koeficienty. Problém stability obvodů popsaných diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty lze považovat za vyřešený. Jak bylo řečeno v úvodu, zabývala se touto problematikou řada autorů již během minulého století. Naproti tomu je problém stability obvodů popsaných diferenciálními rovnicemi s proměnnými koeficienty dosud otevřený. Byl vyřešen pouze pro některé speciální případy.

1.1. Kritéria stability pro soustavy s konstantními koeficienty

Existuje celá řada kritérií stability vypracovaná různými autory. V některých případech byla vypracována shodná kritéria nezávisle různými autory. Jindy byla kritéria doplněna nebo zlepšena dalšími autory, takže se u jednoho kritéria uvádějí dvě jména. Všechna tato kritéria matematicky řeší stejný problém: polohu kořenů charakteristické rovnice v komplexní rovině. Kritéria, uvedená v této kapitole, vycházejí z koeficientů charakteristické rovnice, takže není nutno hledat kořeny.

Než přistoupíme k popisu jednotlivých kritérií, uvedme některé základní pojmy. Je to především *Cauchyho index* reálné racionální funkce $R(x)$ v intervalu (a, b) , který je označován $I_a^b R(x)$, kde a a b jsou reálná čísla. Budeme tak nazývat rozdíl mezi počtem nespojitostí funkce $R(x)$ s přechodem od $-\infty$ k $+\infty$ a počtem nespojitostí s přechodem od $+\infty$ k $-\infty$ v intervalu (a, b) . Jestliže platí $R(a) = R(b) = 0$, potom index $I_a^b R(x)$ lze vyjádřit pomocí přírůstku spojité funkce $\arctg R(x)$

$$(1.1) \quad I_a^b R(x) = -\Delta_a^b \arctg R(x) \quad (a < b).$$

Pro $a = -\infty$, $b = +\infty$ je $R(-\infty) = R(+\infty)$ a vztah (1.1) platí pro libovolný racionální zlomek.

Dále to je *Sturmova posloupnost*. Mějme konečnou posloupnost reálných mnohočlenů

$$(1.2) \quad f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_m(x),$$

kteřá má v intervalu (a, b) tyto vlastnosti:

1. Při libovolné hodnotě x ($a < x < b$), při které je kterákoliv funkce $f_k(x)$ rovna nule, dvě sousední funkce $f_{k-1}(x)$ a $f_{k+1}(x)$ mají hodnoty různé od nuly a různých znamének, tj. z $f_k(x) = 0$ při $a < x < b$ vyplývá: $f_{k-1}(x)f_{k+1}(x) < 0$.

2. Poslední funkce $f_m(x)$ v posloupnosti (1.2) je nenulová uvnitř intervalu (a, b) , tj. $f_m(x) \neq 0$ při $a < x < b$.

Jestliže posloupnost (1.2) vyhovuje oběma uvedeným podmínkám, nazývá se Sturmovou posloupností.

Označíme-li počet změn znamének při konstantní hodnotě x v posloupnosti (1.2) jako $V(x)$, potom při změně x v intervalu (a, b) může se veličina $V(x)$ měnit pouze

v případě, kdy některá z funkcí posloupnosti (1.2) prochází nulou. Podle podmínky 1. při průchodu nulou funkce $f_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots, m - 1$) se veličina $V(x)$ nemění. Jestliže prochází nulou funkce $f_1(x)$, přibude nebo ubude jedna změna znaménka v posloupnosti (1.2) v závislosti na tom, mění-li se přitom vztah $f_2(x)/f_1(x)$ z $-\infty$ do $+\infty$ nebo naopak. Z toho pak vyplývá

Sturmova věta. Jestliže $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_m(x)$ je Sturmova posloupnost v intervalu (a, b) a $V(x)$ je počet změn znamének v této posloupnosti, potom

$$(1.3a) \quad I_a^b \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = V(a) - V(b).$$

Na základě tohoto teorému lze dokázat, že platí vztah

$$(1.3b) \quad I_a^b R(x) = I_a^b \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = V(a) - V(b).$$

Pomocí Sturmovy věty je možné stanovit počet reálných různých kořenů mnohočlenu $f(x)$ uvnitř intervalu (a, b) , neboť tento počet je roven $I_a^b[f'(x)/f(x)]$. Dále uvedeme důležitý Euklidův algoritmus. Nejprve připomeňme tuto větu:

Věta 1. Ke každým dvěma mnohočlenům $P(x)$, $Q(x) \neq 0$ existují takové jednoznačně určené mnohočleny $S(x)$ a $R(x)$, že

1. $P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$,
2. $R(x)$ je nulový mnohočlen nebo mnohočlen stupně nižšího než mnohočlen $Q(x)$.

Věta 2 (Euklidův algoritmus). Největší společný dělitel dvou (nenulových) mnohočlenů $P(x)$, $Q(x)$ se určí takto:

1. $P(x)$ dělíme podle věty 1 mnohočlenem $Q(x)$:

$$P(x) = Q(x)S_1(x) + R_1(x)$$

[$R_1(x)$ je zbytek.]

2. $Q(x)$ dělíme mnohočlenem $R_1(x)$:

$$Q(x) = R_1(x)S_2(x) + R_2(x),$$

$R_1(x)$ dělíme mnohočlenem $R_2(x)$:

$$R_1(x) = R_2(x)S_3(x) + R_3(x)$$

atd. Poslední zbytek $R_k(x) \neq 0$ je hledaný největší společný dělitel.

Nyní přejdeme k některým kritériím stability.

1.1.1 Routhův algoritmus

Routhův problém spočívá v určení počtu k kořenů reálného mnohočlenu $f(z)$ n -tého stupně, které se nacházejí v pravé polorovině ($\operatorname{Re} z > 0$).

Nejprve se budeme zabývat případem, kdy mnohočlen $f(z)$ nemá nuly na imaginární ose. Existuje kružnice v komplexní rovině se středem v počátku taková, že všechny nuly mnohočlenu $f(z)$ s kladnou reálnou částí (jejich počet značíme k) leží v oblasti vymezené imaginární osou a pravou polovinou této kružnice. Potom bude mít $\arg f(z)$ přírůstek $2k\pi$ nebo $n\pi$ [kde n je řád polynomu $f(z)$] podle směru pohybu po obvodu uvedené oblasti. Pro přírůstek $\arg f(z)$ bude platit

$$(1.4) \quad \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg f(j\omega) = (n - 2k) \pi .$$

Pro další řešení zavedeme odlišné označení pro sudé a liché koeficienty mnohočlenu

$$(1.5) \quad f(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \dots$$

Mnohočlen $f(z)$ lze rozšířit na libovolné komplexní číslo, aniž by se změnil přírůstek argumentu (1.4)

$$(1.6) \quad \frac{1}{j^n} f(j\omega) = f_1(\omega) - j f_2(\omega) .$$

Pro funkce v pravé části rovnice (1.6) platí

$$(1.7) \quad \begin{aligned} f_1(\omega) &= a_0 \omega^n - a_1 \omega^{n-2} + a_2 \omega^{n-4} - \dots , \\ f_2(\omega) &= b_0 \omega^{n-1} - b_1 \omega^{n-3} + b_2 \omega^{n-5} - \dots \end{aligned}$$

Z výrazů (1.1) a (1.6) dostaneme vztah

$$\frac{1}{\pi} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg f(j\omega) = -\frac{1}{\pi} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} .$$

Na základě tohoto výsledku a s použitím vztahů (1.4) a (1.7) můžeme psát

$$(1.8) \quad I_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_0 \omega^{n-1} - b_1 \omega^{n-3} + \dots}{a_0 \omega^n - a_1 \omega^{n-2} + \dots} = n - 2k .$$

Levou část rovnice (1.8) určíme pomocí Sturmovy věty. Jmenovatel a číselník zlomku jsou určeny vztahem (1.7). Nyní se budeme zabývat případem, kdy pro poslední člen Sturmovy posloupnosti platí $m = n + 1$. Potom stupeň každé funkce Sturmovy posloupnosti bude o jednotku menší než stupeň předchozí a poslední funkce $f_m(\omega)$ bude nultého stupně.

Z Euklidova algoritmu vyplývá

$$(1.9) \quad f_3(\omega) = \frac{a_0}{b_0} \omega f_2(\omega) - f_1(\omega) = c_0 \omega^{n-2} - c_1 \omega^{n-4} + c_2 \omega^{n-6} - \dots;$$

pro koeficienty pravé strany platí

$$(1.10) \quad \begin{aligned} c_0 &= a_1 - \frac{a_0}{b_0} b_1 = \frac{b_0 a_1 - a_0 b_1}{b_0}, \\ c_1 &= a_2 - \frac{a_0}{b_0} b_2 = \frac{b_0 a_2 - a_0 b_2}{b_0}, \\ c_k &= a_{k+1} - \frac{a_0}{b_0} b_{k+1} = \frac{b_0 a_{k+1} - a_0 b_{k+1}}{b_0}. \end{aligned}$$

Podobně pro další funkci

$$f_4(\omega) = \frac{b_0}{c_0} \omega f_3(\omega) - f_2(\omega) = d_0 \omega^{n-3} - d_1 \omega^{n-5} + \dots,$$

jejíž koeficienty jsou určena vztahy

$$(1.11) \quad \begin{aligned} d_0 &= b_1 - \frac{b_0}{c_0} c_1 = \frac{c_0 b_1 - b_0 c_1}{c_0}, \\ d_1 &= b_2 - \frac{b_0}{c_0} c_2 = \frac{c_0 b_2 - b_0 c_2}{c_0}, \\ d_k &= b_{k+1} - \frac{b_0}{c_0} c_{k+1} = \frac{c_0 b_{k+1} - b_0 c_{k+1}}{c_0}. \end{aligned}$$

Stejným způsobem se určí koeficienty dalších funkcí. Z koeficientů jednotlivých funkcí Sturmovy posloupnosti se sestaví *Routhovo schéma*

$$(1.12) \quad \begin{array}{cccc} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, \dots \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3, \dots \\ c_0, & c_1, & c_2, & c_3, \dots \\ d_0, & d_1, & d_2, & d_3, \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Abychom mohli snadno vyjádřit libovolný prvek Routhova schématu, zavedeme nová označení:

$$(1.12a) \quad \begin{array}{cccc} R(1, 0), & R(1, 1), & R(1, 2), & \dots \\ R(2, 0), & R(2, 1), & R(2, 2), & \dots \\ R(3, 0), & R(3, 1), & R(3, 2), & \dots \\ R(4, 0), & R(4, 1), & R(4, 2), & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

k -tý prvek m -tého řádku lze potom vyjádřit vzorcem:

$$(1.12b) \quad R(m, k) = R(m-2, k+1) - \frac{R(m-2, 0)}{R(m-1, 0)} R(m-1, k+1) .$$

Vzorec platí pro $m \geq 3$, neboť první dva řádky jsou přímo koeficienty polynomu $f(z)$ a teprve další se tvoří podle vzorce (1.12b). Pro n liché budou mít vždy dva řádky schématu stejný počet prvků. První dva řádky budou mít $(n+1)/2$ prvků, další dva řádky budou mít $(n-1)/2$ prvků, pátý a šestý $(n-3)/2$ prvků atd., celkem bude $n+1$ řádků. Obecně řádek m a $m+1$ pro m liché bude mít $(n-m)/2 + 1$ prvků. Pro sudé n bude mít první řádek $n/2 + 1$ prvků, druhý a třetí řádek $n/2$ prvků, čtvrtý a pátý řádek bude mít $n/2 - 1$ prvků atd. Počet řádků bude opět $n+1$. Obecně řádek m a $m+1$ pro m sudé bude mít $(n-m)/2 + 1$ prvků.

Jestliže výraz (1.8) upravíme podle Sturmovy věty v intervalu $(-\infty, +\infty)$, dostaneme vztah

$$(1.13) \quad V(-\infty) - V(+\infty) = n - 2k .$$

V našem případě pro oba prvky na levé straně (1.13) platí vztahy

$$\begin{aligned} V(+\infty) &= V(a_0, b_0, c_0, d_0, \dots), \\ V(-\infty) &= V(a_0, -b_0, c_0, -d_0, \dots). \end{aligned}$$

Jejich součet dává vztah

$$(1.14) \quad V(-\infty) + V(+\infty) = n .$$

Po sloučení (1.13) a (1.14) dostaneme

$$(1.15) \quad k = V(a_0, b_0, c_0, d_0, \dots) .$$

Z dosud uvedeného vyplývá

Routhova věta: Počet kořenů reálného mnohočlenu $f(z)$, ležících v pravé polorovině $\operatorname{Re} z > 0$ je roven počtu změn znaménka v prvním sloupci Routhova schématu.

Z této věty lze snadno odvodit Routhovo kritérium stability, tedy případ, kdy mnohočlen $f(z)$ neobsahuje ryze imaginární kořeny, ale pouze kořeny se zápornou reálnou částí. Vzhledem k tomu je $k = 0$ a výraz (1.13) bude mít tvar

$$(1.16) \quad V(-\infty) - V(+\infty) = n .$$

Oba výrazy na levé straně jsou v mezích

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(-\infty) \leq m-1 \leq n, \\ 0 &\leq V(+\infty) \leq m-1 \leq n. \end{aligned}$$

Rovnice (1.16) bude platit jen v případě $m = n + 1$, $V(+\infty) = 0$ a $V(-\infty) = m - 1 = n$. Ze vztahu (1.15) potom vyplývá

Routhovo kritérium stability: Aby všechny kořeny reálného mnohočlenu $f(z)$ měly záporné reálné části, je nutné a stačí, aby při splnění Routhovy věty všechny prvky prvního sloupce Routhova schématu byly různé od nuly a stejného znaménka.

Výraz (1.8) platí pro případ, kdy mnohočlen $f(z)$ nemá kořeny na imaginární ose. Tento případ lze ještě zobecnit, pokud mnohočlen $f(z)$ má k kořenů v pravé poloovině a s kořenů na imaginární ose. Výraz (1.8) bude mít na pravé straně další člen:

$$(1.17) \quad I_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_0 \omega^{n-1} - b_1 \omega^{n-3} + b_2 \omega^{n-5} - \dots}{a_0 \omega^n - a_1 \omega^{n-2} + a_1 \omega^{n-4} - \dots} = n - 2k - s.$$

Mnohočlen $f(z)$ se bude skládat ze dvou činitelů

$$f(z) = d(z) f^*(z).$$

Mnohočlen $d(z)$ je s -tého stupně a má s kořenů na imaginární ose. Mnohočlen $f^*(z)$ je stupně $n^* = n - s$ a neobsahuje žádné ryze imaginární kořeny. Jestliže platí (1.6), bude zároveň

$$\frac{1}{j^{n-s}} f^*(j\omega) = f_1^*(j\omega) - j f_2^*(j\omega).$$

Potom také bude platit

$$f_1(\omega) - j f_2(\omega) = \frac{1}{j^s} d(j\omega) [f_1^*(j\omega) - j f_2^*(j\omega)].$$

Vzhledem k tomu, že $1/j^s d(j\omega)$ je reálný mnohočlen v proměnné ω , bude platit

$$\frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} = \frac{f_2^*(\omega)}{f_1^*(\omega)}.$$

Podle výrazu (1.8) bude platit

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2^*(\omega)}{f_1^*(\omega)} = n^* - 2k = n - 2k - s,$$

což mělo být dokázáno.

1.1.2. Hurwitzovo kritérium

Routhův algoritmus je vhodný pro mnohočleny, jejichž koeficienty jsou zadány jako konkrétní čísla. Jestliže tyto koeficienty závisí na parametrech a je třeba určit

hodnoty těchto parametrů pro určitou požadovanou hodnotu k (zejména $k = 0$), musíme mít výrazy pro veličiny c_0, d_0, \dots jako funkce koeficientů daného mnohočlenu. Řešením tohoto problému dospějeme k metodě stanovení hodnoty k a současně ke kritériu stability ve tvaru, jak je odvodil Hurwitz.

Vycházíme z mnohočlenu ve tvaru

$$(1.18) \quad f(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \dots$$

Z koeficientů mnohočlenu (1.18) lze sestavit čtvercovou matici n -tého řádu, která se nazývá *Hurwitzovou maticí*:

$$(1.19) \quad \mathbf{H} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Tuto matici upravíme tak, že od sudých řádků (obsahují koeficienty a_k) odečteme liché řádky násobené podílem koeficientů prvních dvou členů polynomu (1.18) a_0/b_0 . Tím dostaneme nové prvky c_k určené výrazem (1.10). Ode všech lichých řádků počínaje třetím takto vzniklé matice (obsahují koeficienty b_k) odečteme sudé řádky násobené podílem b_0/c_0 . Obdržíme další nové prvky d_k podle vztahů (1.11). Tímto způsobem pokračujeme tak dlouho, až dostaneme trojúhelníkovou matici, která bude mít tvar

$$(1.20) \quad \mathbf{R} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & \dots \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & e_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Matice \mathbf{R} je nazývána *Routhovou maticí*. Získáme ji z Routhova schématu tím, že oddělíme první řádek a zbývající posuneme vpravo tak, aby prvky prvního sloupce tvořily diagonálu nové matice. Zbývající volná místa doplníme nulami na čtvercovou matici n -tého řádu.

Lze dokázat, že obě matice, Hurwitzova (1.19) a Routhova (1.20) jsou ekvivalentní. Přitom, jak je známo z teorie matic, dvě matice jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, jestliže při libovolném $p \leq n$ v prvních p řádcích těchto matic odpovídající subdeterminanty p -tého řádu jsou si rovny. Vzhledem k předchozí úpravě, tj. odečte se od libovolného řádku matice libovolný předchozí řádek předem vynásobený libovolným číslem, subdeterminanty p -tého řádu v prvních p řádcích ($p = 1, 2, 3, \dots, n$) nemění svoji hodnotu, takže Hurwitzova matice a Routhova matice jsou ekvi-

valentní:

$$(1.21) \quad H \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix}$$

$$(i_1, i_2, i_3, \dots, i_p = 1, 2, 3, \dots, n; \quad p = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Na základě toho lze vyjádřit všechny prvky Routhovy matice, resp. prvky Routhova schématu pomocí subdeterminantů Hurwitzovy matice, a tedy také pomocí koeficientů mnohočlenu $f(z)$.

Pro jednotlivé hodnoty p ve výrazu (1.21) dostaneme:

$$(1.22) \quad H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_0, \quad H \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = b_1, \quad H \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = b_2,$$

$$H \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = b_0 c_0, \quad H \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = b_0 c_1, \quad H \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = b_0 c_2,$$

$$H \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = b_0 c_0 d_0, \quad H \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = b_0 c_0 d_1, \quad H \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = b_0 c_0 d_2.$$

atd.

Z těchto subdeterminantů lze nalézt výrazy pro prvky Routhova schématu:

$$(1.23) \quad b_0 = H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = H \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = H \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$c_0 = \frac{H \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad c_1 = \frac{H \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad c_2 = \frac{H \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}{H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}},$$

$$d_0 = \frac{H \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}{H \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}, \quad d_1 = \frac{H \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}{H \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}, \quad d_2 = \frac{H \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}{H \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}},$$

Hlavní subdeterminanty Hurwitzovy matice budeme označovat jako *Hurwitzovy determinanty* a zavedeme pro ně zjednodušující označení

$$(1.24) \quad \Delta_1 = H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_0,$$

$$\Delta_2 = H \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = H \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & b_0 & \dots & b_{n-2} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Podle vztahu (1.22) můžeme tedy psát

$$(1.25) \quad \Delta_1 = b_0; \quad \Delta_2 = b_0 c_0; \quad \Delta_3 = b_0 c_0 d_0 \quad \text{atd.}$$

Jestliže jsou všechny prvky prvního sloupce Routhova schématu různé od nuly, budou různé od nuly také všechny Hurwitzovy determinanty. Pro všechny prvky Routhova schématu budou potom platit vztahy (1.23), které jsou obecnější než vztahy získané pomocí Routhova algoritmu.

Prvky prvního sloupce Routhova schématu lze tedy vyjádřit pomocí Hurwitzových determinantů

$$b_0 = \Delta_1, \quad c_0 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad d_0 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \quad \text{atd.}$$

Na základě toho lze také vyjádřit počet změn znamének posloupnosti

$$\begin{aligned} V(a_0, b_0, c_0, \dots) &= V\left(a_0, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right) = \\ &= V(a_0, \Delta_1, \Delta_3, \dots) + V(1, \Delta_2, \Delta_4, \dots). \end{aligned}$$

Z toho pak vyplývá

Věta Routhova-Hurwitzova: *Počet kořenů reálného mnohočlenu $f(z)$, které se nacházejí v pravé polorovině, je určen vztahem*

$$(1.26) \quad k = V\left(a_0, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right).$$

což lze také psát ve tvaru

$$(1.27) \quad k = V(a_0, a_1, a_3, \dots) + V(1, \Delta_2, \Delta_4, \dots).$$

Tato věta platí za předpokladu, že všechny Hurwitzovy determinanty jsou různé od nuly.

Pomocí Routhovy-Hurwitzovy věty lze dále odvodit kritérium stability. Jedná se o případ, kdy všechny kořeny mnohočlenu $f(z)$ jsou rozloženy v levé polorovině $\text{Re } z < 0$. Podle Routhova kritéria všechny prvky prvního sloupce Routhova schématu mají být různé od nuly a stejného znaménka. To znamená že $k = 0$, z čehož vyplývá

Routhovo-Hurwitzovo kritérium stability: *K tomu, aby všechny kořeny reálného mnohočlenu $f(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + \dots$ ($a_0 \neq 0$) měly záporné reálné části, je nutné*

a postačující, aby platily nerovnosti:

$$(1.28) \quad \begin{aligned} a_0 \Delta_1 > 0, \quad a_0 \Delta_n > 0 \text{ pro liché } n, \\ \Delta_2 > 0, \quad \Delta_n > 0 \text{ pro sudé } n, \\ a_0 \Delta_3 > 0, \\ \Delta_4 > 0. \end{aligned}$$

Jestliže je $a_0 > 0$, potom musí být kladné všechny Hurwitzovy determinanty.

Reálný mnohočlen $f(z)$, jehož koeficienty vyhovují nerovnostem (1.28), se nazývá *Hurwitzovým mnohočlenem*. Kořeny tohoto mnohočlenu mají záporné reálné části, tedy vyhovují podmínkám stability.

Poznámka. V naší literatuře bývá toto kritérium nazýváno Hurwitzovým (proto také název odstavce). V některé zahraniční literatuře je označováno jako Routhovo-Hurwitzovo. V naší literatuře se vyskytuje i poněkud odlišné označení koeficientů polynomu $f(z)$

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \\ f(z) &= \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}. \end{aligned}$$

Podle Hurwitzova kritéria mají být všechny subdeterminanty kladné, čili musí platit nerovnosti

$$\begin{aligned} a_0 &> 0, \\ a_1 &> 0, \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} &> 0, \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} &> 0, \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_n \end{vmatrix} &> 0. \end{aligned}$$

Označení, které bylo uvedeno v této kapitole, je však výhodnější pro odvozování obou předchozích kritérií. Také výsledky jsou přehlednější.

1.1.3. Liénardovo - Chipartovo kritérium

Nechť je dán mnohočlen s reálnými koeficienty

$$(1.29) \quad f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 > 0).$$

Jestliže má tento mnohočlen záporné reálné části – vyhovuje Hurwitzovým podmínkám stability

$$(1.30) \quad \Delta_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

kde

$$(1.31) \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

je Hurwitzův determinant i -tého řádu.

Jsou-li splněny podmínky (1.29), lze psát mnohočlen $f(z)$ (po vytknutí a_0) ve tvaru součinů kořenových činitelů. Jednotliví součinitelé mají tvar $z + u$, nebo $z^2 + vz + w$ ($u > 0$, $v > 0$, $w > 0$). Potom mají všechny koeficienty mnohočlenu kladné znaménko

$$(1.32) \quad a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0.$$

Na rozdíl od podmínek (1.30) jsou podmínky (1.32) sice nutné, ne však postačující k tomu, aby všechny kořeny mnohočlenu $f(z)$ byly rozloženy v levé polorovině $\text{Re } z > 0$.

Při splnění podmínek (1.32) nejsou již nerovnosti (1.30) nezávislé. Tato skutečnost zaujala francouzské matematiky Liénarda a Chiparta, kteří v r. 1914 objevili toto kritérium stability:

Nutné a postačující podmínky pro to, aby mnohočlen $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, ($a_0 > 0$) měl všechny kořeny se zápornou reálnou částí, mohou být zapsány v některém z následujících čtyř tvarů:

$$(1.33) \quad \begin{array}{ll} 1. & a_n > 0, a_{n-2} > 0, \dots; \quad \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \\ 2. & a_n > 0, a_{n-2} > 0, \dots; \quad \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots, \\ 3. & a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0, \dots; \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots; \\ 4. & a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0, \dots; \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots \end{array}$$

Z tohoto kritéria vyplývá, že pro reálný mnohočlen (1.29), u něhož všechny koeficienty (nebo pouze část $a_n, a_{n-2}, a_{n-4}, \dots$ nebo $a_n, a_{n-1}, a_{n-3}, \dots$) jsou kladné, nejsou Hurwitzovy determinanty (1.31) nezávislé. Z kladného znaménka Hurwitzových determinantů lichého řádu vyplývá kladné znaménko Hurwitzových determinantů sudého řádu a naopak.

Liénard a Chipart [25] získali podmínku 1. pomocí speciálních kvadratických forem. Tato metoda je poměrně složitá. Existuje mnohem jednodušší způsob odvození všech čtyř podmínek.

Mnohočlen $f(z)$ rozložíme na dva mnohočleny

$$(1.34) \quad f(z) = h(z^2) + z g(z^2),$$

které jsou definovány následujícími vztahy:

Pro sudé n ($n = 2m$)

$$(1.35) \quad \begin{aligned} h(u) &= a_0 u^m + a_2 u^{m-1} + a_4 u^{m-2} + \dots + a_n, \\ g(u) &= a_1 u^{m-1} + a_3 u^{m-2} + a_5 u^{m-3} + \dots + a_{n-1}. \end{aligned}$$

Pro liché n ($n = 2m + 1$)

$$(1.36) \quad \begin{aligned} h(u) &= a_1 u^m + a_3 u^{m-1} + a_5 u^{m-2} + \dots + a_n, \\ g(u) &= a_0 u^m + a_2 u^{m-1} + a_4 u^{m-2} + \dots + a_{n-1}. \end{aligned}$$

Podmínky $a_n > 0$, $a_{n-2} > 0$, ... (resp. $a_{n-1} > 0$, $a_{n-2} > 0$, ...) lze potom zaměnit mnohem obecnějšími: $h(u)$ resp. $g(u)$ nemění znaménko při $u > 0$. Za těchto podmínek lze odvodit výrazy pro počet kořenů mnohočleny $f(z)$ v pravé polorovině pouze užitím Hurwitzových determinantů lichého řádu nebo pouze Hurwitzových determinantů sudého řádu. Přitom nesmí být poslední Hurwitzův determinant nulový $\Delta_n \neq 0$. Výrazy pro počet kořenů rozložených v pravé polorovině budou tedy závislé na tom, zda je n liché nebo sudé a na tom, která funkce — $h(u)$ nebo $g(u)$, nemění znaménko při $u > 0$:

1. $h(u)$ nemění znaménko, n je sudé:

$$(1.37) \quad k = 2V(1, \Delta_1, \Delta_3, \dots, \Delta_{n-1}) = 2V(1, \Delta_2, \Delta_4, \dots, \Delta_n);$$

2. pro n liché:

$$(1.38) \quad k = 2V(1, \Delta_1, \Delta_3, \dots, \Delta_n) - \frac{1 - \varepsilon_\infty}{2} = 2V(1, \Delta_2, \Delta_4, \dots, \Delta_{n-1}) + \frac{1 - \varepsilon_\infty}{2};$$

3. $g(u)$ nemění znaménko, n je sudé:

$$(1.39) \quad k = 2V(1, \Delta_1, \Delta_3, \dots, \Delta_{n-1}) + \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{2} = 2V(1, \Delta_2, \Delta_4, \dots, \Delta_n) - \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{2};$$

4. pro n liché:

$$(1.40) \quad k = 2V(1, \Delta_1, \Delta_3, \dots, \Delta_n) - \frac{1 - \varepsilon_0}{2} = 2V(1, \Delta_2, \Delta_4, \dots, \Delta_{n-1}) + \frac{1 - \varepsilon_0}{2}.$$

Obě hodnoty ε závisí na funkcích $g(u)$ a $h(u)$ podle vztahů

$$(1.41) \quad \varepsilon_\infty = \operatorname{sign} \left[\frac{g(u)}{h(u)} \right]_{u=+\infty}, \quad \varepsilon_0 = \operatorname{sign} \left[\frac{g(u)}{h(u)} \right]_{u=+0}.$$

Platnost těchto vztahů dokážeme následovně. Vycházíme ze vztahu

$$(1.42) \quad \varrho = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_1 z^{n-1} - a_3 z^{n-3} + \dots}{a_0 z^n - a_2 z^{n-2} + \dots} = n - 2k.$$

Opět nutno uvažovat jednotlivé případy (1.37) až (1.40) podle toho, která funkce nemění znaménko a zda je n liché nebo sudé:

1. $h(u)$ nemění znaménko, n je sudé. Potom

$$I_0^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} = I_0^{+\infty} \frac{u g(u)}{h(u)} = 0,$$

podobně platí

$$I_{-\infty}^0 \frac{g(u)}{h(u)} = -I_{-\infty}^0 \frac{u g(u)}{h(u)} = 0.$$

Z toho vyplývá, že také platí vztah

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} = -I_{-\infty}^{+\infty} \frac{u g(u)}{h(u)}.$$

Pomocí těchto vztahů a vztahu (1.42) lze odvodit výraz pro ϱ :

$$(1.43) \quad \varrho = -I_{-\infty}^{+\infty} \frac{z g(-z^2)}{h(-z^2)} = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} - I_{-\infty}^{+\infty} \frac{u g(u)}{h(u)}.$$

S použitím vztahu

$$(1.44) \quad I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} = m - 2V(1, A_1, A_3, \dots, A_{n-1})$$

a vztahu (1.42) odvodíme výraz

$$k = 2V(1, A_1, A_3, \dots).$$

Stejným způsobem lze odvodit i výraz:

$$k = 2V(1, A_2, A_4, \dots, A_n).$$

2. $g(u)$ nemění znaménko, n je sudé. V tomto případě platí vztahy

$$I_0^{+\infty} \frac{h(u)}{g(u)} = I_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u g(u)} = 0,$$

$$I_{-\infty}^0 \frac{h(u)}{g(u)} + I_{-\infty}^0 \frac{h(u)}{u g(u)} = 0.$$

Pomocí vztahů (1.41) najdeme

$$(1.45) \quad I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{g(u)} + I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{u g(u)} - \varepsilon_0 = 0.$$

Jestliže místo funkcí za znakem indexu dosadíme jejich reciproké hodnoty, dostaneme

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} + I_{-\infty}^{+\infty} \frac{u g(u)}{h(u)} = \varepsilon_\infty - \varepsilon_0.$$

S použitím vztahu (1.42) a (1.44) odvodíme vztah

$$k = 2V(1, A_1, A_3, \dots) + \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{2}$$

a analogicky i vztah

$$k = 2V(1, A_2, A_4, \dots) - \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{2}.$$

3. $g(u)$ nemění znaménko, n je liché. Stejným způsobem jako v předchozím případě bychom dospěli k výrazu (1.45), ze kterého lze dále odvodit výraz

$$(1.46) \quad \varrho = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{u g(u)} - I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{g(u)}.$$

Jestliže platí vztah (1.44), který lze pro n liché převést na tvar

$$(1.47) \quad I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{g(u)} = -m + 2V(1, A_2, A_4, \dots, A_{n-1}),$$

a vztahy (1.42), (1.45), odvodíme další výrazy

$$k = 2V(1, A_1, A_3, \dots) - \frac{1 - \varepsilon_0}{2},$$

$$k = 2V(1, A_2, A_4, \dots) + \frac{1 - \varepsilon_0}{2}.$$

4. $h(u)$ nemění znaménko, n liché. Z rovnic

$$I_0^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} = I_0^{+\infty} \frac{u g(u)}{h(u)} = 0,$$

$$I_{-\infty}^0 \frac{g(u)}{h(u)} + I_{-\infty}^0 \frac{u g(u)}{h(u)} = 0$$

dostaneme novou rovnici

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} + I_{-\infty}^{+\infty} \frac{u g(u)}{h(u)} = 0.$$

Za znakem indexu zavedeme reciproké funkce:

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{g(u)} + I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{u g(u)} = \varepsilon_{\infty}.$$

Rovnice (1.44) a (1.47) lze převést na tvar

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{u g(u)} = m + 1 - 2V(1, \Delta_1, \Delta_3, \dots, \Delta_n),$$

který spolu s rovnicí (1.46) a (1.42) dává

$$k = 2V(1, \Delta_1, \Delta_3, \dots) - \frac{1 - \varepsilon_{\infty}}{2},$$

$$k = 2V(1, \Delta_2, \Delta_4, \dots) + \frac{1 - \varepsilon_{\infty}}{2}.$$

Tím je dokázána platnost vztahů (1.37) až (1.40).

Na závěr ještě uvedme větu, která vyplývá z výsledků této kapitoly:

Jestliže má reálný mnohočlen $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, ($a_0 > 0$) reálné koeficienty $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_n > 0$ při $\Delta_n \neq 0$ potom počet kořenů tohoto mnohočlenu, ležících v pravé polovině $\operatorname{Re} z > 0$, je určen vztahem

$$k = 2V(1, \Delta_1, \Delta_3, \dots) = 2V(1, \Delta_2, \Delta_4, \dots).$$

1.1.4. Michajlovo kritérium

Opět se budeme zabývat mnohočlenem

$$(1.48) \quad f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

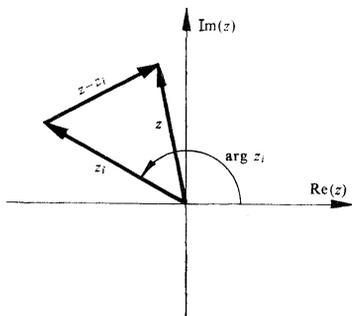
který vyjádříme ve tvaru součinu kořenových činitelů

$$(1.49) \quad f(z) = a_0 \prod_{i=1}^n (z - z_i),$$

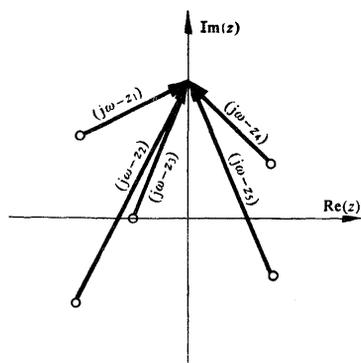
kde z_i jsou kořeny polynomu (1.48). Každý kořen z_i lze geometricky zobrazit jako vektor, který směřuje z počátku souřadnic k bodu z_i , jak je patrné z obr. 1. Délka tohoto vektoru je rovna modulu komplexního čísla z_i , čili jeho absolutní hodnotě $|z_i|$. Úhel, který svírá vektor s kladným směrem reálné osy, se nazývá argumentem

komplexního čísla $\arg z_i$. Prvky součinu (1.49) $(z - z_i)$ se zobrazují jako vektory z bodu z_i do bodu z . Tento vektor je vlastně rozdílem dvou vektorů z a z_i . Za z ve výrazu (1.49) dosadíme $z = j\omega$, čímž dostaneme

$$(1.50) \quad f(j\omega) = a_0 \prod_{i=1}^n (j\omega - z_i).$$



Obr. 1.



Obr. 2.

Konce jednotlivých vektorů se budou nacházet na imaginární ose v bodě $z = j\omega$, jak je patrné z obr. 2. $f(j\omega)$ je tedy vektor daný součinem jednotlivých vektorů $(j\omega - z_i)$. Jeho modul je dán součinem modulů jednotlivých vektorů

$$(1.51) \quad |f(j\omega)| = a_0 |j\omega - z_1| |j\omega - z_2| \dots |j\omega - z_n|.$$

Jeho argument je dán součtem argumentů jednotlivých modulů

$$(1.52) \quad \arg f(j\omega) = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - z_i).$$

Kladný směr otáčení vektoru z_i je proti směru otáčení hodinových ručiček (šipka na obr. 1). Při změně ω z $-\infty$ do $+\infty$ otočí se jednotlivé vektory o $+\pi$ nebo $-\pi$ podle toho zda kořen z_i leží v levé nebo pravé části komplexní roviny. Předpokládáme, že mnohočlen (1.48) má m kořenů v pravé části roviny z a $n - m$ kořenů v levé části komplexní roviny. Při rostoucím ω z $-\infty$ do $+\infty$ změna argumentu vektoru $f(j\omega)$ bude

$$(1.53) \quad \Delta \arg f(j\omega) = (n - m)\pi - m\pi = (n - 2m)\pi.$$

Výsledek lze vyjádřit větou:

Změna argumentu $f(j\omega)$ při změně ω z $-\infty$ do $+\infty$ je rovna π -násobku rozdílu mezi počtem $n - m$ kořenů mnohočlenu $f(z)$ ležících v levé části komplexní roviny a počtem m kořenů mnohočlenu ležících v pravé části komplexní roviny.

Michajlovovo kritérium stability je geometrickou interpretací vztahu (1.53). Důkaz platnosti tohoto kritéria provedeme rozбором rovnice

$$(1.54) \quad f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i} = 0.$$

Leží-li všechny kořeny této rovnice pouze v levé části komplexní roviny potom $m = 0$ a podle vztahu (1.53) bude platit

$$(1.55) \quad \Delta \arg f(j\omega) = n\pi,$$

což je vlastně podmínka stability:

Všechny kořeny mnohočlenu $f(z)$ mají záporné reálné části, jestliže při ω rostoucím od $-\infty$ do $+\infty$ změna argumentu vektoru $f(j\omega)$ bude rovna $n\pi$, kde n je stupeň mnohočlenu $f(z)$.

Při změně ω z $-\infty$ do $+\infty$ opíše konec vektoru $f(j\omega)$ v komplexní rovině křivku, která se nazývá charakteristickou křivkou čili hodografem vektoru $f(j\omega)$ nebo také Michajlovovou křivkou. Rovnici charakteristické křivky lze získat dosazením $z = j\omega$ do mnohočlenu $f(z)$

$$(1.56) \quad f(j\omega) = \sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^{n-i}.$$

Jestliže v této rovnici oddělíme reálnou a imaginární část, dostaneme

$$(1.57) \quad f(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega),$$

kde

$$(1.58) \quad \begin{aligned} u(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots, \\ v(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots \end{aligned}$$

Reálná část $u(\omega)$ je sudá funkce, imaginární část $v(\omega)$ je lichá funkce. Platí tedy

$$\begin{aligned} u(-\omega) &= u(\omega), \\ v(-\omega) &= -v(\omega). \end{aligned}$$

Pro záporné hodnoty ω bude potom platit

$$f(-j\omega) = u(\omega) - jv(\omega),$$

Z toho plyne, že charakteristická křivka je symetrická vzhledem k reálné ose pro $+\omega$ i pro $-\omega$. Při konstrukci charakteristické křivky se tedy můžeme omezit pouze na kladné hodnoty ω od 0 do $+\infty$, přičemž úhel otočení vektoru $f(j\omega)$ čili změna argumentu $f(j\omega)$ se zmenší na polovinu. Kritérium stability lze tedy formulovat takto:

Kořeny mnohočlenu $f(z)$ budou mít pouze záporné reálné části, právě když při změně ω z 0 do $+\infty$ vektor $f(j\omega)$ se otočí o úhel $n \frac{1}{2}\pi$, kde n je stupeň mnohočlenu $f(z)$, nebo jinak řečeno, když je charakteristická křivka při změně ω z 0 do $+\infty$ počínajíc od kladné reálné osy obepíná postupně v kladném směru n kvadrantů.

Obepíná-li charakteristická křivka pouze m kvadrantů ($m < n$), je počet kořenů se zápornou reálnou částí dán výrazem

$$(1.59) \quad a = \frac{n + m}{2}.$$

Počet kořenů s kladnou reálnou částí je dán výrazem

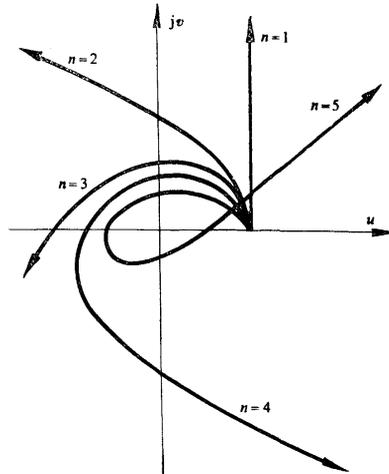
$$(1.60) \quad b = \frac{n - m}{2}.$$

Z předchozí části této kapitoly plyne, že systém bude na mezi stability, jestliže budou splněny podmínky podle (1.58)

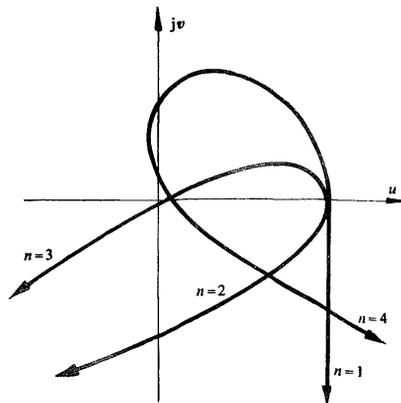
$$(1.61) \quad \begin{aligned} u(\omega) &= 0, \\ v(\omega) &= 0. \end{aligned}$$

Z rovnic (1.58) a (1.61) plyne, že existuje určitá frekvence ω , při níž výsledný vektor je roven nule a charakteristická křivka prochází počátkem souřadnic. Tato frekvence je frekvencí vlastních kmitů systému na mezi stability. Počátek souřadnic v komplexní rovině je nazýván kritickým bodem pro charakteristickou křivku a označuje se P_{kr} . Podle vzájemné polohy kritického bodu a charakteristické křivky mohou nastat dva

případy. Sledujeme-li průběh charakteristické křivky ve směru stoupajících frekvencí, má zůstat kritický bod po levé straně charakteristické křivky. Systém je v tomto případě stabilní. Ve druhém případě, kdy kritický bod zůstává po pravé straně křivky,

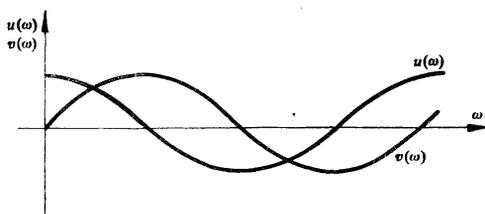


Obr. 3.

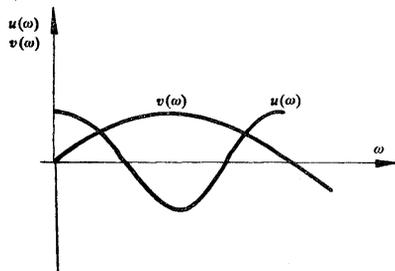


Obr. 4.

je systém nestabilní. Podle vzdálenosti charakteristické křivky od kritického bodu lze usuzovat nejen na skutečnost, zda systém je nebo není stabilní, nýbrž lze také usoudit jak je systém „vzdálen“ od meze stability, čili lze usoudit na bezpečnost stability. Charakteristické křivky pro oba případy jsou zakresleny na obr. 3 a obr. 4. Na obr. 3 jsou křivky pro stabilní systém. Každá křivka protíná tolik kvadrantů, kolikátého je řádu a kritický bod zůstává po levé straně při pohledu ve směru stoupajících frekvencí. Na obr. 4 jsou zakresleny charakteristické křivky nestabilního systému. Křivka pro $n = 1$ sice protíná jeden kvadrant, ale v záporném směru, a kritický bod zůstává po pravé straně. Podobně křivka pro $n = 2$ protíná dva kvadranty v záporné směru s kritickým bodem po pravé straně. Křivka $n = 3$ prochází v kladném směru, z prvního kvadrantu přechází do čtvrtého a potom teprve do třetího. Kritický bod zůstává opět po pravé straně. Křivka pro $m = 4$ má kladný směr, prochází prvním a druhým kvadrantem, třetí však vynechává, vrací se do prvního a potom vstupuje do čtvrtého. Kritický bod je po pravé straně.



Obr. 5.



Obr. 6.

Stabilitu lze určit i z křivek, které jsou vyjádřeny rovnicemi (1.58). Jak již bylo řečeno, z těchto křivek jsme stanovili polohu kritického bodu. Jestliže má charakteristická křivka procházet postupně n kvadranty v kladném směru, musí mít rovnice (1.58) všechny kořeny reálné a jejich hodnoty se musí střídát. To znamená, že křivky

$u(\omega)$ a $v(\omega)$ musí střídavě protínat vodorovnou osu ω . Průběhy křivek $u(\omega)$ a $v(\omega)$ pro tento případ jsou zakresleny na obr. 5. Křivka $v(\omega)$ začíná v počátku souřadnic neboť musí mít jeden kořen nulový. Z průběhů obou křivek je patrné, že se střídají jejich průsečíky s osou ω a systém bude tudíž stabilní. Na obr. 6 je znázorněn průběh křivek $u(\omega)$ a $v(\omega)$ pro nestabilní systém. Průsečíky obou křivek s osou ω se v tomto případě nestřídají. Podmínku stability lze tedy vyjádřit větou:

Mají-li rovnice $u(\omega) = 0$ a $v(\omega) = 0$ při $u(0) > 0$ a $[dv(\omega)/d\omega]_{\omega=0}$ všechny kořeny reálné a jejich hodnoty se střídají, bude systém stabilní.

Michajlovovy podmínky stability lze použít v regulační technice ke kontrole stability uzavřeného obvodu, pokud je znám frekvenční přenos otevřeného obvodu. Bývá obvykle dán ve tvaru

$$(1.62) \quad F(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(j\omega) + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n},$$

kde $n \geq m$. Charakteristická rovnice uzavřeného obvodu při poruše i při řízení vychází ze vztahu

$$(1.63) \quad 1 + F(j\omega) = 0.$$

Frekvenční přenos otevřeného regulačního obvodu lze psát zjednodušeně

$$(1.64) \quad F(j\omega) = \frac{M(j\omega)}{N(j\omega)}.$$

Polynomy ve jmenovateli a čitateli zlomku jsou

$$(1.65) \quad M(j\omega) = b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(j\omega) + b_m,$$

$$(1.66) \quad N(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n.$$

Po dosazení (1.64) do (1.63) a úpravě dostaneme

$$(1.67) \quad \frac{N(j\omega) + M(j\omega)}{N(j\omega)} = 0.$$

Aby byla tato podmínka splněna, musí platit rovnice

$$N(j\omega) + M(j\omega) = 0.$$

Výslednou charakteristickou křivku sestavujeme podle následujících pravidel:

1. Sestrojíme charakteristickou křivku polynomů (1.65) a (1.66).
2. Sečteme vektory $M(j\omega)$ a $N(j\omega)$ pro všechny frekvence ω .

V případě, že polynom v čitateli přenosu (1.64) je konstanta nezávislá na frekvenci

$$M(j\omega) = K,$$

představuje součet vektorů (pravidlo 2) posun charakteristické křivky $N(j\omega)$ směrem vpravo tj. ve směru reálné osy. Lze to také provést jednoduše posunutím imaginární osy o hodnotu K směrem vlevo. Jestliže posuneme křivku $N(j\omega)$ tak, aby procházela počátkem souřadnic, dostaneme hodnotu K_{kr} , při níž je obvod na mezi stability. Tuto hodnotu K_{kr} nazýváme kritickým zesílením. Pro tento případ platí

$$(1.68) \quad \begin{aligned} u_1(\omega_0) &= K_{kr}, \\ v_1(\omega_0) &= 0; \end{aligned}$$

ω_0 je frekvence, na které bude uzavřený obvod na mezi stability kmitat.

1.1.5. Cremerovo-Leonhardovo kritérium

L. Cremer a A. Leonhard nezávisle na sobě stanovili stejný postup při určování stability jako A. V. Michajlov, tj. znázornění polynomu $f(z)$ v komplexní rovině. Za nezávisle proměnnou z dosadili do diferenciální rovnice popisující regulační obvod trvalé kmitý $z = e^{j\omega t}$ s amplitudou rovnou jedné. Dostali tak rovnici

$$(1.69) \quad f(j\omega) = \sum_{i=0}^n a_i(j\omega)^i.$$

Jednotlivé členy této rovnice představují v komplexní rovině strany vektorového mnohoúhelníka. Při změně kmitočtu opiše koncový bod charakteristickou křivku. Má-li být obvod stabilní, musí průběh charakteristické křivky splňovat tyto podmínky:

1. Křivka nesmí vycházet z počátku souřadnic. To znamená, že musí platit $a_0 \neq 0$. Charakteristická křivka vychází z bodu na kladné části reálné osy ve vzdálenosti a_0 od počátku souřadnic.
2. Charakteristická křivka musí při změně kmitočtu od 0 do $+\infty$ při mnohočlenu n -tého řádu postupně projít n kvadranty proti směru pohybu hodinových ručiček.

Příklad charakteristických křivek ukazují již dříve uvedené obrázky. Na obr. 3 jsou stabilní křivky, na obr. 4 nestabilní. Podle průběhů křivek lze stabilitu vyšetřit takto: Jestliže koeficienty polynomu $f(z)$ mají stejná znaménka a jsou různé od nuly, musí se fázový úhel charakteristické křivky zvětšovat. Abychom rozhodli o stabilitě, stačí vypočítat průsečíky charakteristické křivky s reálnou a imaginární osou tak, že položíme reálnou část nebo imaginární část rovnice (1.69) rovnou nule. Podle hodnot průsečíků lze zkontrolovat stabilitu.

Obě kritéria, Michajlovovo a Cremerovo-Leonhardovo, jsou v naší literatuře uváděna pod společným názvem jako Michajlovovo-Leonhardovo kritérium.

Výpočet hodnot charakteristické křivky a její kreslení je poměrně pracné a zdlouhavé. B. Heller a A. Veverka v článku [14a] odvodili metodu, která umožňuje stanovení počtu kořenů se zápornou reálnou částí a počtu kořenů s kladnou reálnou částí, aniž by bylo nutno kreslit charakteristickou křivku v komplexní rovině. Tato metoda představuje podstatně zjednodušení Michajlovova-Leonhardova kritéria, neboť umožňuje stanovení veličin a , b daných výrazy (1.59) a (1.60), aniž by bylo nutno kreslit charakteristickou křivku v komplexní rovině.

Uvažujeme polynom, jehož kořeny mají zápornou reálnou část. Rozdělíme je na reálné

$$(1.70) \quad z_{R_i} = -\alpha_{R_i} \quad i = 1, 2, \dots, n_R,$$

kde n_R je počet reálných kořenů, a na komplexní

$$(1.71a) \quad z_{K_i} = -\beta_{K_i} + j\gamma_{K_i} \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n_K}{2},$$

resp. k nim sdružené

$$(1.71b) \quad z_{K_i} = -\beta_{K_i} - j\gamma_{K_i} \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n_K}{2},$$

kde n_K je počet komplexně sdružených kořenů.

Potom polynom (1.48) lze psát ve tvaru součinu kořenových činitelů:

$$(1.72) \quad f(z) = a_0 \prod_{i=1}^{n_R} (z - z_{R_i}) \prod_{i=1}^{n_K} (z - z_{K_i}).$$

Při použití vztahů (1.70), (1.71a) a (1.71b) bude mít polynom (1.72) tvar:

$$(1.73) \quad f(z) = a_0 \prod_{i=1}^{n_R} (z + \alpha_i) \prod_{i=1}^{n_K} [(z + \beta_i)^2 + \gamma_i^2].$$

Po vynásobení dostaneme polynom, který obsahuje pouze kladné koeficienty. Tím je proveden důkaz, že polynom, který má jen kořeny se zápornou reálnou částí, má kladné koeficienty. Jestliže polynom (1.48) obsahuje záporné koeficienty, bude mít kořeny s kladnou reálnou částí a bude tudíž nestabilní. Tímto případem se budeme dále zabývat.

Rovnici (1.61) rozložíme na reálnou a imaginární část:

$$(1.74) \quad f(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega)$$

a vyjádříme ve tvaru

$$(1.75) \quad f(j\omega) = Ae^{j\theta}.$$

Jsou-li splněny podmínky stability, prochází úhel ϑ při změně ω od 0 do $+\infty$ monotonně všechny hodnoty od 0 do $n \frac{1}{2}\pi$. Můžeme tedy na základě závislosti úhlu ϑ na frekvenci ω usoudit zda polynom $f(z)$ má pouze kořeny se zápornou reálnou částí.

Při změně ω od 0 do $+\infty$ dosáhne úhel ϑ maximální hodnoty, jestliže charakteristická křivka polynomu $f(z)$ n -tého řádu protne n kvadrantů komplexní roviny v kladném směru. Potom platí vztah

$$(1.76) \quad \vartheta_{\max} = n \frac{\pi}{2}.$$

Z rovnic (1.74) a (1.75) určíme

$$(1.77) \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{v(\omega)}{u(\omega)}.$$

Nutno rozlišit případy, kdy n je liché ($n = 2t + 1$) nebo sudé ($n = 2t$).

Pro liché n :

$$(1.78a) \quad u(\omega) = a_1(j\omega)^{2t} + a_3(j\omega)^{2t-2} + \dots + a_n,$$

$$(1.78b) \quad jv(\omega) = a_0(j\omega)^{2t+1} + a_2(j\omega)^{2t-1} + \dots + a_{n-1}j\omega,$$

$$(1.79) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \vartheta = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{v(\omega)}{u(\omega)} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega}{a_1} = +\infty.$$

Tomu odpovídá limita úhlu:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \vartheta = k \frac{\pi}{2},$$

kde k je liché číslo.

Pro sudé n :

$$(1.80a) \quad u(\omega) = a_0(j\omega)^{2t} + a_1(j\omega)^{2t-2} + \dots + a_n,$$

$$(1.80b) \quad jv(\omega) = a_1(j\omega)^{2t+1} + a_3(j\omega)^{2t-1} + \dots + a_{n-1}j\omega,$$

$$(1.81) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \vartheta = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{a_1}{\omega} = 0.$$

Tomu odpovídá limita úhlu

$$(1.82) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \vartheta = l\pi,$$

kde l je celé číslo.

Dále budeme sledovat průběh funkce $\operatorname{tg} \vartheta$ v závislosti na ω . Podle rovnice (1.77) dosáhne nekonečna pro nulové hodnoty výrazu $u(\omega)$, které představují jeho kořeny

ω_v . V oblasti $\omega > 0$ je kořenů ω_v maximálně t . Budou tedy platit následující vztahy

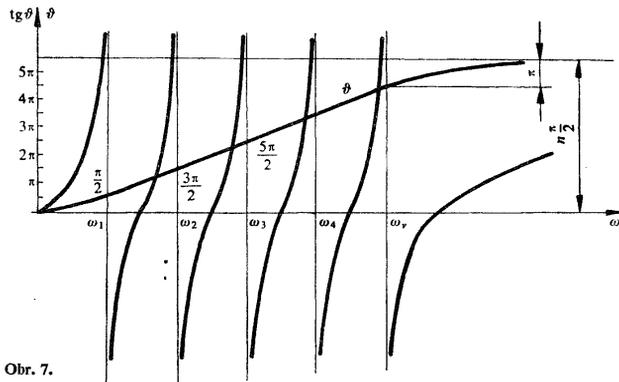
$$(1.83) \quad u(\omega_v) = 0,$$

$$(1.84) \quad \operatorname{tg} \vartheta_v = \frac{v(\omega_v)}{u(\omega_v)} = \infty,$$

$$(1.85) \quad \vartheta(\omega_v) = k \frac{\pi}{2}.$$

Jestliže pro všechny kořeny ω_v roste $\operatorname{tg} \vartheta$ k $+\infty$, platí vztah

$$(1.86) \quad \vartheta(\omega_v) = (2v - 1) \frac{\pi}{2}$$



Obr. 7.

a úhel ϑ při změně ω od nuly do ∞ spojitě roste. Musí tedy pro všechny kořeny platit:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\omega_v - \varepsilon) = +\infty,$$

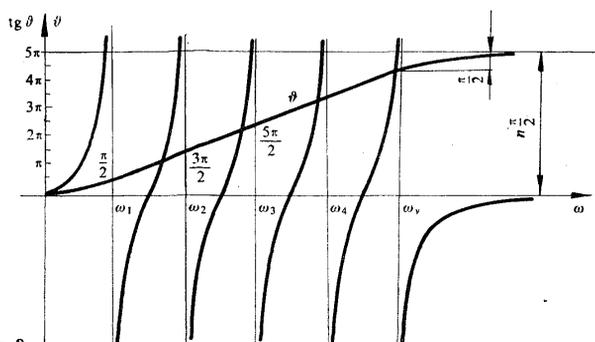
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(\omega_v - \varepsilon)}{u(\omega_v - \varepsilon)} = +\infty,$$

$$(1.87) \quad \frac{v(\omega_v)}{u'(\omega_v)} < 0.$$

Průběh funkce $\operatorname{tg} \vartheta$ a odpovídající průběhy úhlu ϑ jsou znázorněny na obr. 7 a 8. Na obr. 7 pro n liché a na obr. 8 pro n sudé.

Může nastat i případ, kdy $v(\omega_v) = 0$. Vzhledem k tomu, že současně platí $u(\omega_v) = 0$, je ω_v kořenem polynomu $f(j\omega)$. Charakteristická křivka prochází v tomto případě nulou. Systém je na mezi stability a kmitá s frekvencí ω_v . Kořenu ω_v odpovídá podle (1.86) hodnota úhlu ϑ

$$\vartheta(\omega_v) = \frac{\pi}{2} (2v - 1).$$



Obr. 8.

Maximální počet těchto kořenů jsme označili t a odpovídající úhel bude

$$(1.88) \quad \vartheta(\omega_t) = \frac{\pi}{2} (2t - 1).$$

Podle toho je-li řád polynomu $f(z)$ lichý nebo sudý, rozlišíme dva případy. Pro lichý řád ($n = 2t + 1$) dosahuje funkce $\text{tg } \vartheta$ podle (1.79) nekonečna pro $\omega \rightarrow \infty$ a úhel ϑ se v intervalu $\omega_t < \omega < \infty$ zvětší o π . Pro maximální úhel bude tedy platit

$$(1.89) \quad \vartheta_{\max} = \vartheta(\omega_t) + \pi.$$

Po dosazení (1.88) do (1.89) a úpravě dostaneme pro maximální úhel výraz

$$(1.90) \quad \vartheta_{\max} = n \frac{\pi}{2}.$$

Při sudém řádu ($n = 2t$) podle (1.81) je funkce $\text{tg } \vartheta$ pro $\omega \rightarrow 0$ nulová a úhel ϑ pro $\omega_t < \omega < \infty$ se zvětší o $\pi/2$. Pro maximální úhel bude platit

$$(1.91) \quad \vartheta_{\max} = \vartheta(\omega_t) + \frac{\pi}{2}.$$

Po dosažení (1.88) do (1.91) a úpravě dostaneme:

$$(1.92) \quad \vartheta_{\max} = n \frac{\pi}{2}.$$

Z toho plyne, že maximální úhel podle rovnice (1.90) a (1.92) sestrojený z průběhu funkce $\operatorname{tg} \vartheta$ odpovídá podmínce stability podle Michajlova-Leonharda.

Na základě tohoto poznatku lze vyjádřit podmínku stability:

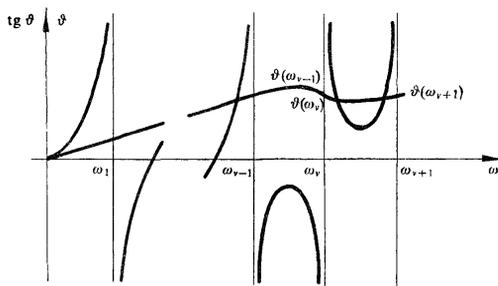
Aby byl systém stabilní je nutné, aby polynom $u(\omega)$ odpovídající reálné části polynomu $f(j\omega)$ měl jen reálné různé kořeny a aby platil vztah

$$\frac{v(\omega_v)}{u'(\omega_v)} < 0.$$

Na obr. 9 jsou zakresleny průběhy funkce $\operatorname{tg} \vartheta$ a úhlu ϑ pro případ, kdy se funkce $\operatorname{tg} \vartheta$ neblíží pro všechny kořeny k nekonečnu se stejné strany. Pro kořen ω_v se blíží k nekonečnu z opačné strany než pro ω_{v-1} a ω_{v+1} . Křivka znázorňující průběh úhlu ϑ dosahuje pro ω_v a ω_{v-1} stejné hodnoty

$$(1.92a) \quad \vartheta(\omega_v) = \vartheta(\omega_{v-1}),$$

takže se ztrácí hodnota π , o kterou se maximální úhel zmenšuje.



Obr. 9.

Pomocí funkce $\operatorname{tg} \vartheta$ lze stanovit průběh úhlu ϑ v závislosti na ω a určit maximální hodnotu úhlu

$$\vartheta_{\max} = m \frac{\pi}{2}, \quad m \leq n.$$

Tím jsme dosáhli stejného výsledku jako při konstrukci charakteristické křivky v komplexní rovině a můžeme stanovit počet kořenů polynomu $f(z)$ se zápornou a kladnou

reálnou částí podle vztahů

$$a = \frac{n + m}{2},$$

$$b = \frac{n - m}{2}.$$

1.1.6. Schurova kritéria

Každý polynom, který obsahuje reálné nebo komplexní koeficienty

$$(1.93) \quad f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

lze převést na tvar

$$(1.94) \quad f^*(x) = \bar{a}_0 - \bar{a}_1x + \bar{a}_2x^2 - \dots + (-1)^n \bar{a}_nx^n.$$

Pro $a_m \neq 0$ lze psát mnohočlen (1.93) ve tvaru součinu kořenových činitelů

$$(1.95) \quad f(x) = a_n \prod_{v=1}^n (x - x_v).$$

Jestliže platí $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, bude také platit $f^*(x) = g^*(x) \cdot h^*(x)$. Podobně při platnosti $f(x) = g(x) + h(x)$ platí také $f^*(x) = g^*(x) + h^*(x)$. Můžeme tedy psát

$$(1.96) \quad f^*(x) = \bar{a}_n \prod_{i=1}^n (-x - x_v),$$

což lze psát ve tvaru

$$f^*(x) = (-1)^n \bar{a}_n \prod_{i=1}^n (z + z_i).$$

Z toho plyne, že mnohočlen $f^*(x)$ má kořeny $-\bar{x}_i$, které jsou vzhledem k imaginární ose souměrné s kořeny x_i mnohočlenu $f(x)$. To znamená, jestliže leží kořeny polynomu $f(x)$ v levé polorovině, budou kořeny polynomu $f^*(x)$ ležet v pravé polorovině.

Zavedeme nyní reálné veličiny u, v, u_v, v_v ($v = 1, 2, \dots, n$), pro které platí

$$x = u + jv,$$

$$x_v = u_v + jv_v.$$

Potom bude platit

$$|x + x_v|^2 - |x - x_v|^2 = 4uu_v.$$

Pro zápornou hodnotu u , mohou nastat tři případy:

$$|x - x_v| < |x + \bar{x}_v| \quad \text{pro } u < 0,$$

$$|x - x_v| > |x + \bar{x}_v| \quad \text{pro } u > 0,$$

$$|x - x_v| = |x + \bar{x}_v| \quad \text{pro } u = 0.$$

Z výrazů (1.95) a (1.96) vyplývá: je-li $f(x)$ Hurwitzův polynom, potom bude platit

$$(1.97) \quad 0 \leq |f(x)| < |f^*(x)| \quad \text{pro } \operatorname{Re} x < 0,$$

$$0 \leq |f^*(x)| < |f(x)| \quad \text{pro } \operatorname{Re} x > 0,$$

$$0 < |f(x)| = |f^*(x)| \quad \text{pro } \operatorname{Re} x = 0.$$

Na základě těchto nerovností lze stanovit následující větu:

Jestliže jsou α a β dvě reálné nebo komplexní veličiny a jestliže platí nerovnost

$$(1.98) \quad |\alpha| > |\beta|,$$

je potom $f(x)$ tehdy a jen tehdy Hurwitzovým polynomem jestliže platí rovnice

$$(1.99) \quad g(x) = \alpha f(x) - \beta f^*(x).$$

Jestliže $f(x)$ je Hurwitzovým polynomem, potom pro $\operatorname{Re} x \geq 0$ bude

$$(1.100) \quad |\alpha f(x)| > |\beta f^*(x)|.$$

Pro toto x neplatí rovnost $\alpha f(x) = \beta f^*(x)$. Z toho plyne, že rovnost $|\alpha f(x)| = |\beta f^*(x)|$ platí jen pro $\operatorname{Re} x < 0$. Reálná část všech kořenů mnohočlenu $g(x)$ je potom záporná.

Ze vztahu (1.99) vyplývá

$$(1.101) \quad g^*(x) = \bar{\alpha} f^*(x) - \bar{\beta} f(x).$$

Sloučením výrazů (1.99) a (1.101) dostaneme

$$(1.102) \quad f(x) = \alpha_1 g(x) - \beta_1 g^*(x),$$

kde

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - |\beta|^2},$$

$$\beta_1 = -\frac{\bar{\beta}}{|\alpha|^2 - |\beta|^2}.$$

Potom také platí nerovnost

$$(1.103) \quad |\alpha_1| > |\beta_1|.$$

Tím je dokázán vzájemný vztah mezi $f(x)$ a $g(x)$. Funkci $g(x)$ lze vyjádřit pomocí $f(x)$ vzorcem (1.99) a funkci $f(x)$ pomocí $g(x)$ vzorcem (1.102). Jestliže platí nerovnost (1.98), platí také nerovnost (1.103).

První kritérium

Nechť $f(x)$ je Hurwitzův mnohočlen stupně n a ξ představuje komplexní číslo se zápornou reálnou částí. Bude potom podle (1.97)

$$(1.104) \quad |f^*(\xi)| > |f(\xi)|.$$

Na základě dříve odvozené pomocné věty je

$$(1.105) \quad g(x) = f^*(\xi)f(x) - f(\xi)f^*(x)$$

Hurwitzovým polynomem. Tento polynom má ale kořen $x = \xi$. Potom je také

$$(1.106) \quad f_1(x) = \frac{g(x)}{x - \xi}$$

polynomem, jehož všechny kořeny mají zápornou reálnou část – tedy Hurwitzovým polynomem. Naopak platí, je-li $f_1(x)$ Hurwitzovým polynomem, je jím také $g(x) = f_1(x)(x - \xi)$ a bude tedy vzhledem k (1.94) Hurwitzovým polynomem i polynom $f(x)$. Na základě toho lze vyjádřit větu:

Nechť ξ je libovolné, pevně zvolené číslo se zápornou reálnou částí. Polynom n -tého stupně $f(x)$ je Hurwitzovým polynomem tehdy a jen tehdy, když absolutní hodnota $f(\xi)$ je menší než absolutní hodnota $f^(\xi)$ a polynom stupně $n - 1$*

$$(1.107) \quad f_1(x) = \frac{f^*(\xi)f(x) - f(\xi)f^*(x)}{x - \xi}$$

je Hurwitzovým polynomem.

Druhé kritérium

Polynom

$$(1.108) \quad F(x, \xi) = \frac{f^*(\xi)f(x) - f(\xi)f^*(x)}{x - \xi},$$

který jsme dříve označili $f_1(x)$, je racionální funkce dvou proměnných x a ξ . Jeho rozvoj podle mocnin ξ je

$$(1.109) \quad F(x, \xi) = F_0(x) + F_1(x)\xi + \dots + F_{n-1}(x)\xi^{n-1}.$$

Po vynásobení obou stran rovnice (1.108) $x - \xi$ a porovnání koeficientů u jednotlivých stupňů ξ dostaneme

$$(1.110) \quad \begin{aligned} \bar{a}_0 f(x) - a_0 f^*(x) &= x F_0(x), \\ -\bar{a}_1 f(x) - a_1 f^*(x) &= -F_0(x) + x F_1(x). \end{aligned}$$

Odtud vyplývá

$$(1.111) \quad x^2 [F_0(x) + \xi F_1(x)] = f(x) \varphi(x) - f^*(x) \psi(x),$$

kde

$$(1.112) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= \bar{a}_0 x - \bar{a}_1 \xi x + \bar{a}_0 \xi, \\ \psi(x) &= a_0 x - a_1 \xi x + a_0 \xi. \end{aligned}$$

Můžeme nyní tvrdit, že první kritérium lze nahradit následujícím:

Necht ξ je libovolné, pevně zvolené číslo se zápornou reálnou částí. Polynom $f(x)$ je Hurwitzovým polynomem právě tehdy, vyhovují-li jeho koeficienty a_0 a a_1 podmínkám

$$(1.113) \quad a_0 \neq 0, \quad \operatorname{Re} \frac{a_1}{a_0} > 0$$

a je-li polynom stupně $n - 1$

$$(1.114) \quad H(x) = F_0(x) + \xi F_1(x)$$

Hurwitzovým polynomem.

Pro polynom $f(x)$, jehož kořeny mají zápornou reálnou část, jsou podmínky (1.113) splněny. Podíl a_1/a_0 je záporně vzatý součet reciprokých hodnot všech n kořenů polynomu $f(x)$, proto také bude $\operatorname{Re} a_1/a_0 > 0$. Abychom dokázali, že současně s $f(x)$ je také $H(x)$ Hurwitzovým polynomem, budeme usuzovat takto: Pro $\operatorname{Re}(\xi) < 0$ a $\operatorname{Re}(x) \geq 0$ je, jak již víme, $F(x, \xi)$ vždy různé od nuly. Zavedeme-li $\xi = 1/\eta$, souhlasí opět znaménko reálné části η se znaménkem reálné části ξ . Odtud také pro $\operatorname{Re}(\eta) < 0$, $\operatorname{Re}(x) \geq 0$ platí

$$(1.115) \quad \Phi(x, \eta) = F_0(x) \eta^{n-1} + F_1(x) \eta^{n-2} + \dots + F_{n-1}(x) \neq 0.$$

Dále se budeme zabývat případy, kdy $F_0(x) \neq 0$ a $F_0(x) = 0$. V případě kdy $F_0(x) \neq 0$, je $\Phi(x, \eta)$ mnohočlenem stupně $n - 1$ pro η , jehož kořeny – jak bylo dříve uvedeno – musí ležet v polorovině $\operatorname{Re}(\eta) \geq 0$. Totéž platí také pro součet $-F_1(x)/F_0(x)$ jeho $n - 1$ kořenů. Pro $\operatorname{Re}(\xi) < 0$ proto nemůže být $H(x) = 0$ a musí platit

$$\operatorname{Re} \left[-\frac{F_1(x)}{F_0(x)} \right] = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\xi} \right) < 0.$$

Ve druhém případě, kdy $F_0(x) = 0$, nemůže být současně $H(x) = 0$, neboť podle (1.114) by muselo být také $F_1(x) = 0$ a podle (1.110) by bylo

$$\begin{aligned}\bar{a}_0 f(x) - a_0 f^*(x) &= 0, \\ \bar{a}_1 f(x) + a_1 f^*(x) &= 0\end{aligned}$$

a z toho dále by plynulo při $f(x) \neq 0$

$$\bar{a}_0 a_1 + a_0 \bar{a}_1 = 0,$$

to znamená $\operatorname{Re}(a_1/a_0) = 0$. To je v rozporu s tím, co bylo dříve dokázáno. Vzhledem k tomu, že nemůže nikdy být $H(x) = 0$, ležely by kořeny tohoto polynomu vesměs v polorovině $\operatorname{Re}(x) < 0$.

Uvažujme nyní případ, kdy $H(x)$ je Hurwitzovým polynomem a koeficienty a_0, a_1 vyhovují podmínkám (1.113), tj. $f(x)$ je Hurwitzovým polynomem. To vyplývá z následujícího. Podle (1.111) můžeme psát

$$\begin{aligned}x^2 H(x) &= f(x) \varphi(x) - f^*(x) \psi(x), \\ x^2 H^*(x) &= f^*(x) \varphi^*(x) - f(x) \psi^*(x),\end{aligned}$$

z čehož plyne

$$(1.116) \quad [\varphi^*(x) \varphi(x) - \psi^*(x) \psi(x)] f(x) = x^2 [H(x) \varphi^*(x) + H^*(x) \psi(x)].$$

Přítom platí

$$\varphi^*(x) = -a_0 x + a_1 \bar{\xi} x + a_0 \bar{\xi}.$$

Mějme nyní x , kořen polynomu $f(x)$, jehož reálná část je kladná nebo nulová. Vzhledem k tomu, že $a_0 \neq 0$, nemůže být tento kořen nulový. Z rovnice (1.116) potom vyplývá

$$(1.117) \quad H(x) \varphi^*(x) + H^*(x) \varphi(x) = 0.$$

Na základě nerovnosti (1.97) je

$$|H(x)| > |H^*(x)|$$

nebo

$$|H(x)| = |H^*(x)| > 0.$$

Rovnice (1.117) je tudíž neplatná, neboť bylo dokázáno, že platí nerovnost:

$$|\varphi^*(x)| > |\psi(x)|.$$

Do této nerovnosti dosadíme z (1.112) a dělíme výrazem $|a_0 x \bar{\xi}|$. Dostaneme novou nerovnost

$$\left| -\frac{1}{\bar{\xi}} + \frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{x} \right| > \left| \frac{1}{\bar{\xi}} + \frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{x} \right|.$$

Pro

$$t = -\frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{x},$$

$$\eta = \frac{1}{\xi}$$

bude platit

$$|t + \bar{\eta}| > |t - \eta|.$$

Toto je vzhledem k $\operatorname{Re}(t) < 0$, $\operatorname{Re}(\eta) < 0$ pouze speciální případ nerovnosti (1.97).

Zbývá ještě dokázat, že v našem případě stupeň polynomu $H(x)$ není menší než $n - 1$. Potom by totiž, jak plyne z rovnice (1.110) a (1.111), platilo

$$a_n(\bar{a}_0 - \bar{a}_1\xi) - (-1)^n \bar{a}_n(a_0 + a_1\xi) = 0.$$

Odtud by platila rovnost

$$|\bar{a}_0 - \bar{a}_1\xi| = |a_0 + a_1\xi|,$$

tj.

$$\left| \frac{1}{\xi} - \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0} \right| = \left| \frac{1}{\xi} + \frac{a_1}{a_0} \right|.$$

Pro $\operatorname{Re}(1/\xi) < 0$, $\operatorname{Re}(a_1/a_0) > 0$ platí

$$\left| \frac{1}{\xi} + \frac{a_1}{a_0} \right| < \left| \frac{1}{\xi} - \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0} \right|,$$

což odporuje opět nerovnostem (1.97).

Ve svém článku [30] uvádí J. Nekolný důkaz Schurova kritéria stability, který je podstatně jednodušší než jak jej uvádí Schur [33]. Důkaz je založen na stejném principu, jaký popisují B. Heller a A. Veverka v článku [14a]. Vychází z polynomu ve tvaru

$$(1.118) \quad f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

který převede dosazením za $x = j\omega$ a rozdělí na reálnou a imaginární část

$$f(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega),$$

kde

$$(1.119) \quad u(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots,$$

$$v(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots$$

Dále zavádí funkci

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{v(\omega)}{u(\omega)},$$

kteřou vynáší graficky v závislosti na ω . Tohoto grafu potom používá k důkazu Schurova algoritmu. Z toho lze za předpokladu, že koeficienty polynomu $f(x)$ mají kladné znaménko, rozhodnout o stabilitě systému.

Nejprve budeme analyzovat průběh funkce $\text{tg } \vartheta$. Pro polynom sudého stupně je stupeň $u(\omega)$ o 1 větší než stupeň $v(\omega)$, takže

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{v(\omega)}{u(\omega)} = 0.$$

Derivace v počátku je dána vztahem

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} \frac{v(\omega)}{u(\omega)} = \frac{a_1}{a_0} > 0.$$

Vzhledem k tomu, že koeficienty mají mít kladná znaménka, bude také derivace v počátku kladná.

Pro polynom lichého stupně jsou $u(\omega)$ i $v(\omega)$ stejného stupně. Derivaci v nekonečnu určuje vztah

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d}{d\omega} \frac{v(\omega)}{u(\omega)} = \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

U polynomu, jehož koeficienty vyhovují podmínkám stability platí nerovnost

$$\frac{a_1}{a_0} > \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

neboť vesměs reálné kořeny $u(\omega)$ i $v(\omega)$ se musí pravidelně střídát, jsou-li uspořádány podle velikosti.

Imaginární část $v(\omega)$ polynomu lichého stupně má stejný počet nenulových kořenů jako reálná část $u(\omega)$. Seřadíme-li reálné kladné kořeny podle velikosti, bude pak ke každému kladnému kořenu části $u(\omega)$ možno nalézt jeden kořen části $v(\omega)$ s nejbližší vyšší hodnotou. Součin nenulových kořenů části $v(\omega)$ je dán poměrem a_1/a_n a součin kořenů části $u(\omega)$ je dán poměrem a_0/a_{n-1} . Proto nutně musí platit nerovnost

$$\frac{a_1}{a_n} > \frac{a_0}{a_{n-1}}.$$

Je-li směrnice C přímky vedené počátkem větší nežli směrnice tečny v počátku a_1/a_0 , protíná uvedená přímka křivku $\text{tg } \vartheta$.

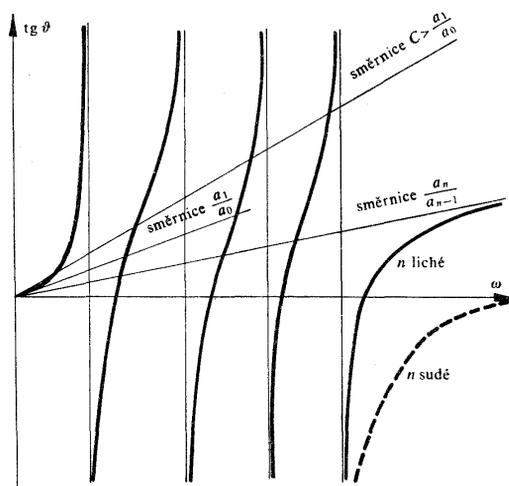
Z podmínky

$$\text{tg } \vartheta = \frac{v(\omega)}{u(\omega)} = C\omega$$

plyne rovnice

$$(1.120) \quad C\omega u(\omega) - v(\omega) = 0,$$

kteřá je stupně o jednu vyššího než je stupeň $u(\omega)$. Z toho plyne, že počet průsečíků zvolené přímky s funkcí $\operatorname{tg} \vartheta$ je vždy o jeden větší než stupeň reálné části $u(\omega)$. Vzhledem k tomu, že zvolená přímka i $\operatorname{tg} \vartheta$ prochází počátkem, bude tento bod jedním z průsečíků. Jestliže tento průsečík vyloučíme, bude počet průsečíků souhlasit se stupněm a tedy také s počtem kořenů funkce $u(\omega)$. Z toho dále plyne, že bude souhlasit i s počtem svislých asymptot průběhu funkce $\operatorname{tg} \vartheta$ a zvolená přímka bude průběh $\operatorname{tg} \vartheta$ protínat v tolika bodech, kolik je svislých asymptot. Tato skutečnost je gra-



Obr. 10.

ficky znázorněna na obr. 10, ze kterého je patrné, že C musí být větší než směrnice tečny v počátku, nebo menší než derivace v nekonečnu.

$$(1.121) \quad \frac{a_1}{a_0} < C < \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Je-li tato podmínka splněna, potom souřadnice průsečíků zvolené přímky s grafem mimo počátek souřadnic splňují tutéž posloupnost jako kořeny původní části polynomu. Souřadnice těchto průsečíků jsou dány rovnicí:

$$u(\omega) - \frac{1}{C} \frac{v(\omega)}{\omega} = 0,$$

příčemž C musí vyhovovat podmínce (1.121). Z rovnice (1.119) plyne, že $v(\omega)/\omega$ je vždy racionální celistvá funkce. Můžeme tedy v polynomu, který vyhovuje podmínce stability, původní reálnou část $u(\omega)$ nahradit funkcí

$$u_1(\omega) = u(\omega) - \frac{1}{C} \frac{v(\omega)}{\omega} = 0,$$

aniž by byla porušena stabilita.

Polynom $f(x)$ rozdělíme na část se sudými mocninami $s(x)$ a na část s lichými mocninami $l(x)$ podle vztahu

$$(1.122) \quad f(x) = s(x) + l(x).$$

Zavedeme nový polynom určený vztahem

$$(1.123) \quad f_1(x) = s(x) - \frac{1}{C} \frac{l(x)}{x} + l(x),$$

který při splnění podmínky (1.121) vyhovuje podmínkám stability, tj. všechny kořeny polynomu $f_1(x)$ leží v levé polorovině. Pro $C \rightarrow a_1/a_0$ bude se absolutní člen polynomu (1.123) blížit k kladným hodnotám k nule a v důsledku toho nejmenší kořen polynomu $f_1(x)$ se bude blížit k průsečíku os komplexní roviny. Pro ostatní členy polynomu $f_1(x)$ můžeme potom psát vztah

$$f_1(x) = \frac{x s(x) - \left(\frac{a_0}{a_1} - x\right) l(x)}{x^2},$$

který pomocí vztahu (1.122) upravíme na tvar

$$f_r(x) = \frac{x f(x) - \frac{a_0}{a_1} l(x)}{x^2}.$$

Počátek charakteristické křivky (viz obr. 3) vymezuje na reálné ose úsek, který odpovídá hodnotě absolutního členu. Jestliže se absolutní člen blíží k nule, bude se úsek na reálné ose zmenšovat rovněž na nulovou hodnotu. Charakteristická křivka tedy bude vycházet z průsečíku os, čímž se ušetří část průběhu procházející prvním kvadrantem.

Popsanou metodou jsme z původního polynomu dostali nový polynom, který vyhovuje podmínkám stability za předpokladu, že jím vyhovoval i polynom původní. Nový polynom je však stupně o 1 nižšího než původní.

Porovnáme-li dříve uvedené důkazy jednotlivých kritérií zjistíme, že důkaz podaný prof. Nekolným je nejjednodušší, neboť postačí graf tangenty a znalost základních

vlastností algebraických rovnic. Nutno ještě podotknout, že platí pouze pro polynomy s reálnými koeficienty, kdežto původní odvození Schurovo [33] platí i pro polynomy s komplexními koeficienty. Při řešení konkrétních problémů se polynomy s komplexními koeficienty prakticky nevyskytují.

V článku [30] je uveden následující postup při použití Schurova kritéria:

1. Daný polynom rozdělíme na část sudou a lichou (např. každý druhý koeficient podtrheme).
2. Rozdíly lichých a sudých koeficientů násobíme stejným kladným číslem tak, aby první koeficient v řadě se tímto rozdílem anuloval. Zbývající nenulové rozdíly považujeme nyní za sudé členy nové řady koeficientů, jejíž liché koeficienty jsou shodné se sudými koeficienty řady původní.
3. Jsou-li všechny koeficienty v nové řadě kladné, opakujeme postup, čímž se řada zkrátí o jeden člen.
4. Jakmile se při některé redukci objeví některý koeficient záporný, skončíme výpočet, neboť soustava je nestabilní.
5. Dospějeme-li postupnou redukcí až k řadě tří kladných koeficientů (odpovídá rovnici druhého stupně) máme dokázáno, že soustava je stabilní.

1.1.7 Nyquistovo kritérium

Uvedené kritérium je založené na tvaru frekvenčních charakteristik vyšetřovaného systému. Formuloval je H. Nyquist pro zesilovače se zpětnou vazbou. Výhodou tohoto kritéria je, že lze určit stabilitu vyšetřovaného systému se zpětnou vazbou z frekvenční charakteristiky systému s rozpojenou zpětnou vazbou nebo také s otevřenou smyčkou. Toto kritérium má význam zejména v případě, kdy není znám přenos systému, ale je možno změřit jeho frekvenční charakteristiku.

Rozpojme tedy zpětnou vazbu a přivedme na vstup harmonické kmitý s frekvencí ω a konstantní amplitudou A_1 . Je-li systém stabilní, utlumí se vlastní kmitý a na výstupu budou kmitý stejné frekvence ω , ale amplitudy A_2 , která je odlišná od amplitudy A_1 . Amplituda a fáze těchto kmitů jsou určeny tzv. frekvenční charakteristikou v komplexní rovině. Frekvenční přenos systému s rozpojenou zpětnou vazbou $F(j\omega)$ byl uveden v kapitole 1.1.4. Jde tu o vztahy (1.62) až (1.66). Přenos lze rozdělit na reálnou a imaginární složku podle vztahu

$$(1.124) \quad F(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

nebo

$$(1.125) \quad F(j\omega) = A(\omega) e^{j\theta(\omega)},$$

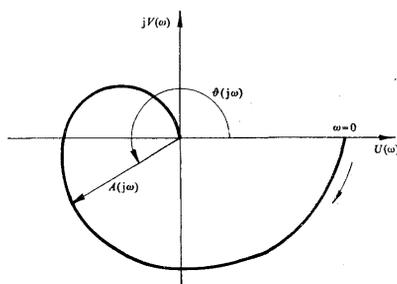
kde $A(\omega)$ je modul určený vztahem

$$(1.126) \quad A(\omega) = \sqrt{[U^2(\omega) + V^2(\omega)]}$$

a $\vartheta(\omega)$ je jeho fáze

$$(1.127) \quad \operatorname{tg} \vartheta(\omega) = \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$$

Vzhledem k tomu, že frekvenční přenos je dán poměrem obrazů výstupní a vstupní veličiny, určíme uvedené vztahy závislost změny modulu a fáze výstupní veličiny na modulu a fázi vstupní veličiny. Modul $A(\omega)$ a argument $\vartheta(\omega)$ lze zobrazit jako vektor v komplexní rovině. Křivka, opsaná koncovým bodem tohoto vektoru při



Obr. 11.

změně ω z 0 do ∞ se nazývá frekvenční charakteristikou. Příklad frekvenční charakteristiky je na obr. 11. Je to vlastně současně zobrazení amplitudové frekvenční charakteristiky a fázové frekvenční charakteristiky.

Jmenovatel frekvenčního přenosu systému s uzavřenou zpětnou vazbou má tvar

$$(1.128) \quad \varphi(j\omega) = 1 + F(j\omega)$$

Použijeme-li výraz (1,64), můžeme psát

$$(1.129) \quad \varphi(j\omega) = \frac{N(j\omega) + M(j\omega)}{N(j\omega)}$$

Položíme-li jmenovatele tohoto výrazu rovným nule, dostaneme charakteristickou rovnici systému s rozpojenou zpětnou vazbou. Čítec pak odpovídá charakteristické rovnici systému s uzavřenou zpětnou vazbou. Předpokládáme, že systém s otevřenou zpětnou vazbou je stabilní. To lze ve většině případů snadno zaručit, neboť systém s otevřenou zpětnou vazbou se obvykle skládá ze stabilních prvků. Za tohoto předpokladu je změna argumentu $N(j\omega)$ při vzrůstající frekvenci ω z 0 do ∞ daná výrazem

$$(1.130) \quad \Delta_0^\infty \arg N(j\omega) = n \frac{\pi}{2},$$

kde n je stupeň polynomu $N(j\omega)$.

Pro čitatele zlomku (1.129) zavedeme zjednodušující výraz

$$(1.131) \quad N_z(j\omega) = N(j\omega) + M(j\omega).$$

Stupeň obou polynomů $N(j\omega)$ a $N_z(j\omega)$ je stejný, neboť u reálných systémů není stupeň polynomu $M(j\omega)$ větší než stupeň polynomu $N(j\omega)$.

Změnu argumentu $N_z(j\omega)$ při frekvenci ω rostoucí z 0 do ∞ lze vyjádřit vztahem

$$(1.132) \quad \Delta_0^\infty \arg N_z(j\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2},$$

m – je počet kořenů charakteristické rovnice systému s uzavřenou zpětnou vazbou, které leží v pravé části komplexní roviny.

Změna argumentu $\varphi(j\omega) = N_z(j\omega)/N(j\omega)$ při frekvenci ω rostoucí z 0 do ∞ bude dána vztahem

$$(1.133) \quad \Delta_0^\infty \arg \varphi(j\omega) = \Delta_0^\infty \arg N_z(j\omega) - \Delta_0^\infty \arg N(j\omega),$$

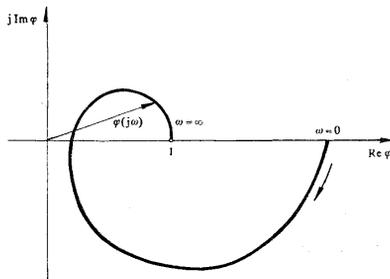
který po dosazení (1.130), (1.132) a úpravě bude mít tvar

$$(1.134) \quad \Delta_0^\infty \arg \varphi(j\omega) = -m\pi.$$

Aby byl systém stabilní musí platit $m = 0$, z čehož plyne

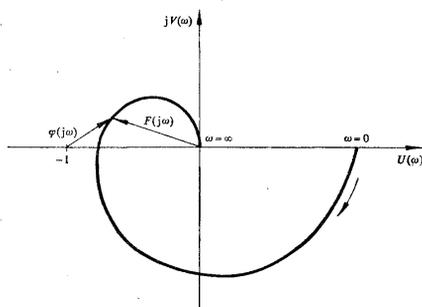
$$(1.135) \quad \Delta_0^\infty \arg \varphi(j\omega) = 0.$$

Zobrazíme-li $\varphi(j\omega)$ v komplexní rovině pro frekvence ω rostoucí z 0 do ∞ opiše vektor $\varphi(j\omega)$ úhel rovný nule pouze v tom případě, jestliže křivka, kterou koncový



Obr. 12.

bod vektoru $\varphi(j\omega)$ opiše, neobepíná počátek souřadnic. Průběh je znázorněn na obr. 12. Koncový bod vektoru $F(j\omega)$ se bude pohybovat po křivce stejného tvaru, pouze posunuté o jednotku vlevo ve směru reálné osy. Průběh je znázorněn na obr. 13. V tomto případě se posunuje i počátek vektoru $\varphi(j\omega)$ do bodu $(-1, j0)$. Jeho koncový bod opisuje křivku – frekvenční charakteristiku. Změna argumentu



Obr. 13.

$\varphi(j\omega)$ bude nulová, jestliže frekvenční charakteristika neobepíná bod $(-1, j0)$. Z toho plyne kritérium stability:

Systém s uzavřenou zpětnou vazbou bude stabilní, jestliže frekvenční charakteristika systému, který při rozpojené zpětné vazbě je stabilní, neobepíná bod $(-1, j0)$ v komplexní rovině.

Jestliže je systém s otevřenou zpětnou vazbou nestabilní, bude postup podobný. Přírůstek argumentu $N(j\omega)$ při frekvenci ω rostoucí od 0 do ∞ bude určen vztahem

$$(1.126) \quad \Delta_0^\infty \arg N(j\omega) = (n - 2m_1) \frac{\pi}{2},$$

kde m_1 je počet kořenů charakteristické rovnice systému s rozpojenou zpětnou vazbou, které leží v pravé části komplexní roviny.

Má-li být systém s uzavřenou zpětnou vazbou stabilní, musí být $m_1 = 0$ a přírůstek argumentu bude určen vztahem

$$(1.137) \quad \Delta_0^\infty \arg N_z(j\omega) = n \frac{\pi}{2}.$$

Pro přírůstek argumentu $\varphi(j\omega)$ platí vztah

$$(1.138) \quad \Delta_0^\infty \arg \varphi(j\omega) = \Delta_0^\infty \arg N_z(j\omega) - \Delta_0^\infty \arg N(j\omega),$$

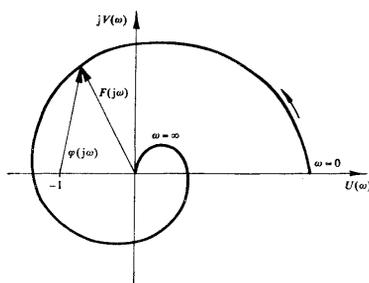
který upravíme pomocí vztahů (1.136) a (1.137) na tvar

$$(1.139) \quad \Delta_0^\infty \arg \varphi(j\omega) = \frac{m_1}{2} 2\pi .$$

Na základě tohoto výsledku lze stanovit kritérium stability pro systémy, které při rozpojené zpětné vazbě jsou nestabilní:

Systém s uzavřenou zpětnou vazbou bude stabilní, jestliže frekvenční charakteristika systému, který při rozpojené zpětné vazbě je nestabilní, obepíná bod $(-1, j0)$ v kladném směru $m_1/2$ -krát.

Příklad průběhu frekvenční charakteristiky v komplexní rovině u systému, který je při rozpojené zpětné vazbě nestabilní, je na obr. 14. Dva kořeny jmenovatele pře-



Obr. 14.

nosu systému s rozpojenou zpětnou vazbou leží v pravé části komplexní roviny. Následkem toho obepíná frekvenční charakteristika bod $(-1, j0)$ jednou. Lze tedy říci, že systém byl zavedením zpětné vazby stabilizován. Z průběhů frekvenčních charakteristik na obr. 13 a obr. 14 je patrné, že při pohledu ve směru stoupající frekvence ω od 0 do ∞ je bod $(-1, j0)$ vždy po levé straně frekvenční charakteristiky. Bod $(-1, j0)$ je kritickým bodem. Jestliže frekvenční charakteristika prochází tímto bodem, je systém na mezi stability.

Dále se budeme zabývat případem, kdy frekvenční charakteristika systému s rozpojenou zpětnou vazbou pro $\omega = 0$ začíná v nekonečnu. Je to obvyklý případ v regulační technice, kdy systém obsahuje astatickou regulovanou soustavu, případně další integrační člen. Tyto systémy se nazývají neutrálními. Charakteristické rovnice jejich přenosů obsahují nulový kořen, který může být v -násobný.

$$(1.140) \quad N(p) = p^v N_1(p) ,$$

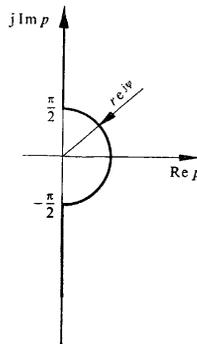
kde v je celé kladné číslo a $N_1(p)$ je polynom, který nemá nulový kořen. Pro $p = j\omega$ bude platit vztah

$$(1.141) \quad N(j\omega) = (j\omega)^v N_1(j\omega).$$

Vzhledem k tomu, že vektor $N(j\omega)$ při $\omega = 0$ má nulovou hodnotu, je změna argumentu $N(j\omega)$ při $\omega = 0$ neurčitá. Proto položíme v polynomu $N(j\omega)$ při $p > 0$ $p = j\omega$ a při $p \rightarrow 0$

$$(1.142) \quad p = re^{j\psi}; \quad \left(r \rightarrow 0; \frac{\pi}{2} \cong \psi \cong -\frac{\pi}{2} \right).$$

Tím docílíme toho, že p v blízkosti $p = 0$ obchází počátek souřadnic po půlkružnici poloměru $r \rightarrow 0$ a dále po imaginární ose $p = j\omega$, jak ukazuje obr. 15. Všechny



Obr. 15.

nulové kořeny charakteristické rovnice systému s rozpojenou zpětnou vazbou $p^v N_1(p) = 0$ budou ležet v levé polorovině, do níž je zahrnuta i oblast vytvořená půlkružnicí o poloměru r . Systém s rozpojenou zpětnou vazbou nelze potom považovat za neutrální, ale za stabilní.

Změna argumentu $N(j\omega)$ při změně ω již nebude neurčitá, ale bude stejná jako v dříve uvedeném případě. Rovněž kritérium stability lze formulovat stejně.

Frekvenční charakteristika

$$(1.143) \quad F(j\omega) = \frac{M(j\omega)}{(j\omega)^v N_1(j\omega)}$$

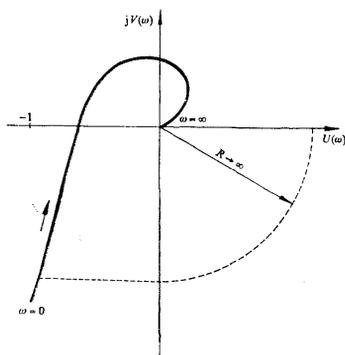
při změně frekvence ω z 0 do ∞ je zobrazena na obr. 16. To odpovídá změně p

směrem k záporným hodnotám po imaginární ose. Při malých hodnotách p bude platit

$$(1.144) \quad F(p) = \frac{k}{p^v} = \frac{k}{r^v} e^{-jv\psi},$$

k je poměr koeficientů mnohočlenů $M(p)$ a $N_1(p)$ nultého stupně. Při $r \rightarrow 0$ a $\pi/2 \geq \psi \geq -\pi/2$ se bude koncový bod vektoru $F(p)$ pohybovat po oblouku o poloměru $R \rightarrow \infty$ a úhlu $v\pi/2$ (na obr. 16 je $v = 1$).

Aby byl systém stabilní musí být bod $(-1, j0)$ vně frekvenční charakteristiky doplněné o oblouk poloměru $R \rightarrow \infty$, případně musí tento bod obepínat $m_1/2$ -krát.



Obr. 16.

Systém s rozpojenou zpětnou vazbou, jehož frekvenční charakteristika je nakreslena na obr. 16 bude tedy po zapojení zpětné vazby stabilní.

Pro praktické použití je výhodnější poněkud odlišná formulace kritéria stability, která nevyžaduje výpočet změny argumentu:

Změna argumentu $\varphi(j\omega)$ při frekvenci ω rostoucí z 0 do ∞ bude rovna nule, jestliže počet přechodů frekvenční charakteristiky $F(j\omega)$ přes úsek reálné osy $(-\infty, -1)$ z horní poloviny do dolní je roven počtu přechodů ze spodní poloviny do horní. Tato změna argumentu bude rovna $\pm m_1\pi$, jestliže rozdíl mezi nimi je roven $\pm m_1/2$.

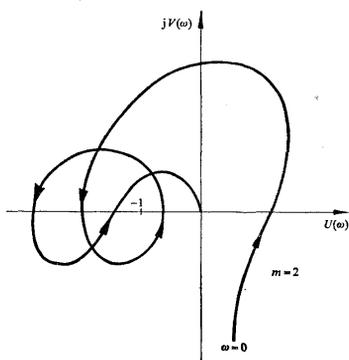
Jestliže jako kladný označíme přechod frekvenční charakteristiky (s rostoucím ω) přes úsek reálné osy $(-\infty, -1)$ z horní části komplexní roviny, do dolní a jako záporný přechod z dolní části komplexní roviny do horní můžeme kritérium stability formulovat takto:

Vyšetřovaný systém bude stabilní, jestliže rozdíl mezi kladnými a zápornými

přechody frekvenční charakteristiky úseku reálné osy $(-\infty, -1)$ je roven $m_1/2$, kde m_1 je počet kořenů s kladnou reálnou částí charakteristické rovnice systému s rozpojenou zpětnou vazbou.

Jestliže frekvenční charakteristika $F(j\omega)$ při $\omega = 0$ začíná na úseku reálné osy $(-\infty, -1)$, budeme počítat s tím, že $F(j\omega)$ při $\omega = 0$ koná polovinu přechodu. Tuto skutečnost nutno respektovat při stanovení počtu přechodů.

V regulační technice je nejobvyklejší případ, kdy systém s rozpojenou vazbou je stabilní nebo neutrální a platí $m_1 = 0$. Podle odvozeného kritéria bude systém



Obr. 17.

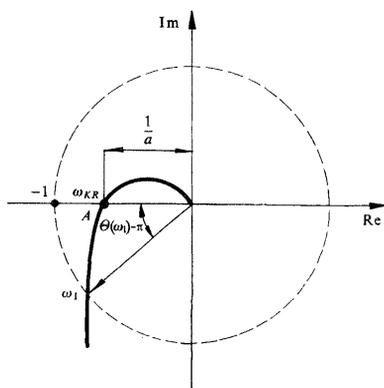
s uzavřenou zpětnou vazbou stabilní, jestliže rozdíl mezi kladnými a zápornými přechody frekvenční charakteristiky úseku na reálné ose $(-\infty, -1)$ je roven nule.

Příklad frekvenční charakteristiky systému, který je při rozpojené zpětné vazbě nestabilní ($m_1 = 2$) znázorňuje obr. 17. Rozdíl mezi kladnými a zápornými přechody frekvenční charakteristiky úseku na reálné ose $(-\infty, -1)$ je $2 - 1 = 1$. Systém s uzavřenou zpětnou vazbou bude stabilní neboť $m_1/2 = 1$.

Stabilitu systému lze ovlivňovat změnou jeho parametrů. Je-li systém na mezi stability, prochází frekvenční charakteristika bodem $(-1, j0)$. Amplituda frekvenční charakteristiky je v tomto případě rovna jedné a fáze je rovna $-\pi$. Zvětšíme-li zesílení systému bude tento nestabilní, snížíme-li zesílení, bude stabilní. Hodnota zesílení, při kterém je systém na mezi stability, nazýváme mezním zesílením a označujeme je K_m . Označíme-li úsek na reálné ose vymezený počátkem souřadnic a průsečíkem frekvenční charakteristiky s reálnou osou $1/a$, můžeme určit hodnotu mezního zesílení ze vztahu

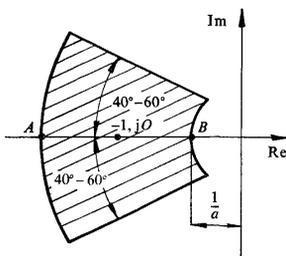
$$K_m = K \cdot a.$$

V praxi se často vyskytují případy, kdy parametry systému mění během provozu svoje hodnoty. Proto je nutné vyšetřit zejména průběh frekvenční charakteristiky v okolí bodu $(-1, j0)$. Vzdálenost frekvenční charakteristiky systému bez zpětné vazby od bodu $(-1, j0)$ udává bezpečnost stability, čili oblast změn parametrů,



Obr. 18.

v níž bude systém ještě stabilní. Bezpečnost stability bývá charakterizována obvykle dvěma veličinami: *fázovou bezpečností* ψ a *amplitudovou bezpečností* a .



Obr. 19.

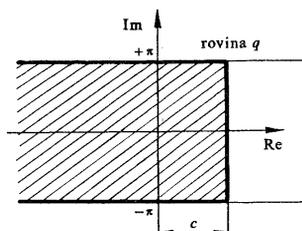
Fázovou bezpečností nazýváme hodnotu úhlu $\Theta^*(\omega) - \pi$ při frekvenci ω_1 , při které frekvenční charakteristika protíná jednotkovou kružnici (obr. 18) se středem v počátku souřadnic. Amplituda frekvenční charakteristiky je při této frekvenci rovna jedné.

Amplitudová bezpečnost je veličina určená reciprokou hodnotou modulu frekvenční charakteristiky pro frekvenci, při níž $\Theta^*(\omega) = \pi$. Frekvence, při které $\Theta^*(\omega) = \pi$, se nazývá kritickou a frekvence, pro kterou se určuje amplitudová bezpečnost, se nazývá mezní.

Fázová bezpečnost se v praxi používá v mezích 40° až 60° . Příklad vymezení oblasti fázové a amplitudové bezpečnosti v komplexní rovině je znázorněn na obr. 19. Bod A je souměrný s bodem B vzhledem k bodu $(-1, j0)$.

1.2 Kritéria stability pro impulsní systémy

Na rozdíl od spojitých systémů, které jsou popsány diferenciálními rovnicemi, jsou impulsní systémy popsány diferenčními rovnicemi. Odvozením základních



Obr. 20.

rovnic se nebudeme zabývat, ale uvedeme výsledné vztahy podle toho jak jsou uváděny v literatuře např. [35]. Tam je uvedeno také jejich úplné odvození.

Jak vyplývá z dalšího, je výhodné pro některá kritéria stability vyjádření dynamických vlastností impulsního systému pomocí diskrétní Laplaceovy transformace, pro některá je výhodnější vyjádření pomocí Z-transformace. Obě transformace, jak známo, spolu souvisí vztahem

$$(1.145) \quad e^q = z,$$

kde $q = \sigma + j\bar{\omega}$ je komplexní proměnná, $\bar{\omega} = T\omega$ a T je perioda vzorkování. Budeme vyšetřovat polynom ve tvaru

$$(1.146) \quad F^*(q) = \sum_{i=0}^l a_i e^{iq}.$$

Je to periodická funkce s periodou 2π . Platí totiž vztah

$$(1.147a) \quad e^{q+2\pi kj} = e^q$$

a tedy také

$$(1.147b) \quad F^*(q) = F^*(q + 2\pi kj)$$

kde k je libovolné celé číslo. Funkce $F^*(q)$ může mít kořeny pouze v oblasti $-\pi < \bar{\omega} \leq +\pi$, jak ukazuje obr. 20. Funkce $F^*(q)$ může tedy mít komplexní kořeny

$$(1.148) \quad q_v = \sigma_v + j\bar{\omega}_v,$$

resp. k nim sdružené

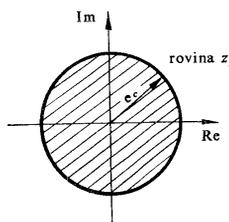
$$(1.149) \quad q_{v+1} = \sigma_v - j\bar{\omega}_v.$$

Má-li být systém stabilní, je nutné a stačí, aby všechny kořeny q_v polynomu $F^(q)$ ležely v levé části komplexní roviny q , v oblasti ohraničené rovnoběžkami s reálnou osou ve vzdálenosti $\pm\pi$ (obr. 22a).*

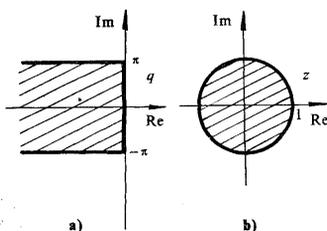
Zavedeme-li proměnnou z podle vztahu (1.145) bude vyšetřovaný polynom vyjádřen vztahem

$$(1.150) \quad F(z) = \sum_{i=0}^l a_i z^i.$$

Oblast vyznačenou v obr. 20 přetransformuje na kružnici o poloměru e^c , jak ukazuje



Obr. 21.



Obr. 22.

obr. 21. Kořenům q_v , které ležely ve vyznačené oblasti roviny q , odpovídají nyní póly z_v , ležící uvnitř kružnice v rovině z o poloměru e^c .

Má-li být systém stabilní, je nutné a stačí, aby všechny kořeny z_v polynomu

$F(z)$ ležely uvnitř jednotkové kružnice se středem v počátku komplexní roviny z , tj. $|z_v| \geq 1$ (obr. 22b).

Podobně jako u spojitych systémů i zde by bylo nutno při vyšetřování stability hledat kořeny polynomu. Proto vznikla snaha nalézt taková kritéria, která by umožňovala vyšetřovat stabilitu přímo z koeficientů polynomu. Jsou to vesměs analogie dříve uvedených kritérií.

1.2.1. Algebraická kritéria stability

Pod tento název lze zahrnout první skupinu kritérií, pro která je výhodný polynom ve tvaru

$$(1.151) \quad F(z) + a_1 z^l + a_{l-1} z^{l-1} + \dots + a_1 z + a_0.$$

Abychom mohli stanovit podmínky, kterým musí vyhovovat koeficienty polynomu $F(z)$, budeme vyšetřovat mnohočlen

$$(1.152) \quad F(z) + \lambda F\left(\frac{1}{z}\right) z^l.$$

K objasnění dalšího postupu uvedme Rouchéovu větu:

Jsou-li $F(z)$ a $\Phi(z)$ dvě funkce jednoznačné a analytické v oblasti, ohraničené uzavřenou rektifikovanou křivkou Γ a na této křivce je splněna podmínka

$$(1.153) \quad |F(z)| < |\Phi(z)|$$

potom uvnitř Γ má součet obou funkcí $F(z) + \Phi(z)$ tolik kořenů, kolik jich má funkce $F(z)$.

Pro vyhledání počtu kořenů funkce $F(z) + \Phi(z)$ použijeme princip argumentu. Přepíšeme ji do tvaru

$$(1.154) \quad F(z) + \Phi(z) = F(z) \left[1 + \frac{\Phi(z)}{F(z)} \right].$$

Je-li splněna podmínka (1.153), bude platit

$$(1.155) \quad \arg [F(z) + \Phi(z)] = \arg F(z) + \arg \left[1 + \frac{\Phi(z)}{F(z)} \right].$$

Dále bude platit

$$(1.156) \quad \left| \frac{\Phi(z)}{F(z)} \right| < 1,$$

proto konec vektoru zobrazujícího výraz $1 + [\Phi(z)/F(z)]$, opisuje uzavřenou křivku, která se nachází uvnitř kružnice se středem v bodě 1 a o poloměru rovném 1. Zmíněný vektor se tedy neotočí ani jednou kolem počátku souřadnic a výsledná změna argumentu $\Delta \arg [1 + \Phi(z)/F(z)]$ je nulová. Změna argumentu $\Delta \arg [F(z) + \Phi(z)]$ při uvedeném pohybu vektoru je totožná se změnou argumentu $\Delta \arg F(z)$ při stejném pohybu vektoru. Odtud tedy podle principu argumentu vyplývá rovnost mezi počtem kořenů funkce $F(z) + \Phi(z)$ a funkce $F(z)$.

Vraťme se nyní k výrazu (1.152), do kterého dosadíme $z = e^{j\omega}$ a upravíme jej na tvar:

$$(1.157) \quad |F(e^{j\omega})| + \lambda |F(e^{-j\omega}) e^{j\ell\omega}|.$$

Při $|\lambda| < 1$ bude polynom (1.152) vyhovovat Rouchéově větě, podle níž polynomy (1.151) a (1.152) budou mít stejný počet kořenů v oblasti vymezené jednotkovou kružnicí. Nechť platí nerovnost

$$(1.158) \quad |a_0| < |a_l|.$$

Ve výrazu (1.152) položíme $\lambda = -a_0/a_l$ a dostaneme polynom, který s polynomem (1.152) souvisí podle vztahu:

$$(1.159) \quad F_1(z) \frac{z}{a_l} = F(z) - \frac{a_0}{a_l} F\left(\frac{1}{z}\right) z^l.$$

Lze jej také vyjádřit vztahem

$$(1.160) \quad F_1(z) = (a_l^2 - a_0^2) z^{l-1} + (a_{l-1}a_l - a_1a_0) z^{l-2} + \dots + (a_l a_l - a_{l-1}a_0).$$

Mnohočlen $F_1(z)$ je tedy stupně $l - 1$. Jelikož $z = 0$ odpovídá kořenu ležícímu uvnitř jednotkové kružnice, potom aby polynom $F(z)$ měl kořeny uvnitř jednotkové kružnice je nutné, aby také polynom $F_1(z)$ měl kořeny uvnitř této jednotkové kružnice. Tím se dostáváme k analogii Schurova kritéria:

Mnohočlen $F(z)$ má kořeny uvnitř jednotkové kružnice, právě když platí nerovnost

$$|a_0| < |a_l|$$

a když mnohočlen

$$(1.161) \quad F_1(z) = \frac{a_l F(z) - a_0 F\left(\frac{1}{z}\right) z^l}{z}$$

stupně $l - 1$ vyhovuje stejným podmínkám jako mnohočlen $F(z)$.

Opakujeme-li tento postup $l - 2$ -krát dostaneme mnohočlen prvního stupně za předpokladu, že všechny kořeny mnohočlenu $F(z)$ leží uvnitř jednotkové kružnice.

Na základě uvedeného postupu lze sestavit schéma, které je analogií Routhova schématu. Výpočet jednotlivých koeficientů je znázorněn v tab. 1.1. První dva řádky

Tab. 1.1.

	a_0 a_1	a_1 a_{l-1}	...	a_{l-1} a_1	a_l a_0
$\lambda = \frac{a_0}{a_l} < 1$	$c_{0,2} = a_1 - \lambda_1 a_{l-1}$ $c_{l-1,2}$	$c_{1,2} = a_2 - \lambda_1 a_{l-2}$ $c_{l-2,2}$...	$c_{l-1,2} = a_l - \lambda_1 a_0$ $c_{0,2}$	
$\lambda_2 = \frac{c_{0,2}}{c_{l-1,2}}$	$c_{0,3} = c_{1,2} - \lambda_2 c_{l-2,2}$ $c_{l-2,3}$	$c_{1,3} = c_{2,2} - \lambda_2 c_{l-3,2}$ $c_{l-3,3}$...		
.....		

tvorí koeficienty mnohočlenu $F(z)$. V prvním řádku jsou s rostoucím indexem, ve druhém s klesajícím. Koeficienty následujících dvou řádků jsou vypočteny podle následujícího pravidla: Od čísel horního řádku v každé dvojici se odečtou příslušná čísla dolního řádku, která byla dříve násobena koeficientem λ_i ($i = 1, 2, \dots$) takové hodnoty, aby první rozdíl byl nulový. Jestliže vyloučíme tyto nulové hodnoty, dostaneme první řádek nové dvojice. Druhý řádek obsahuje tytéž koeficienty, ale zapsané v opačném pořadí.

Na základě tohoto schématu a na základě Schurova algoritmu, lze formulovat kritérium stability:

Aby všechny kořeny polynomu $F(z)$ ležely uvnitř jednotkové kružnice, je nutné a stačí, aby absolutní hodnota koeficientů λ_i byla menší než jedna

$$(1.162) \quad |\lambda_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Koeficient $c_{k,i}$ k -tého sloupce a i -tého řádku je dán vztahem

$$(1.163) \quad c_{k,i} = c_{k+1,i-1} - \lambda_{l-1} c_{l-i-k+1,i-1}.$$

Koeficienty λ_i jsou určeny koeficienty $c_{k,i}$ podle vztahu

$$(1.164) \quad \lambda_i = \frac{c_{0,i}}{c_{l-i+1,i}}.$$

Abyste bylo možno použít přímo dříve uvedená kritéria je nutné transformovat oblast vymezenou v komplexní rovině kružnicí na oblast, která zaujímá v komplexní

rovině celou oblast vlevo od imaginární osy. Za tím účelem zavedeme substituci

$$(1.165) \quad v = \frac{z+1}{z-1}, \quad z = \frac{v+1}{v-1}.$$

Vyšetřovaný polynom bude mít po dosažení tvar

$$(1.166) \quad (v-1)^l F\left(\frac{v+1}{v-1}\right) = F_0(v) = \sum_{k=0}^l b_k v^k.$$

Koeficient prvního členu je dán vztahem

$$(1.167a) \quad b_l = \sum_{v=1}^l a_v.$$

Další koeficienty lze vyjádřit ve tvaru

$$(1.167b) \quad b_k = \sum_{v=0}^l a_v \sum_{i=\max(0, l+v-k)}^{i=\min(v, k)} (-1)^{l-k+v-i} \binom{v}{i} \binom{l-v}{k-i},$$

kde $\binom{v}{i} = v!/i!(v-i)!$ jsou binomické koeficienty.

Zavedením vztahu (1.165) transformujeme oblast vymezenou kružnicí v komplexní rovině na oblast zaplňující celou levou polorovinu, což dále dokážeme.

Jednotková kružnice se středem v počátku komplexní roviny má rovnici

$$(1.168) \quad z = e^{j\omega}.$$

Dosaďme-li (1.168) do (1.165) dostaneme

$$(1.169) \quad v = \frac{e^{j\omega} + 1}{e^{j\omega} - 1}.$$

Jmenovatele i čitatele zlomku vynásobíme $e^{-j(\omega/2)}$. Tím dostaneme výraz pro $\cotg(\omega/2)$, takže můžeme psát

$$(1.170) \quad v = -j \cotg \frac{\omega}{2}.$$

Z výrazu (1.170) je patrné, že použitím substituce (1.165) lze vyhovět zadanému požadavku, neboť platí

$$\omega = 2\pi \Rightarrow v = -j\infty,$$

$$\omega = \pi \Rightarrow v = 0,$$

$$\omega = 0 \Rightarrow v = +j\infty.$$

Substitucí (1.169) jsme získali polynom $F_0(v)$, jehož koeficienty b_k souvisí s koeficienty vyšetřovaného polynomu $F(z)$ podle vztahu (1.167). Na polynom $F_0(v)$ lze aplikovat všechna kritéria, která jsou uvedena na začátku této kapitoly, stačí místo koeficientů a , dosadit koeficienty b . Podmínky stability lze shrnout ve větě:

Abý všechny kořeny polynomu $F(z)$ ležely uvnitř jednotkové kružnice v komplexní rovině z je nutné a stačí, aby kořeny polynomu $F_0(x)$ ležely v levé části komplexní roviny v.

1.2.2. Analogie Nyquistova kritéria

Toto kritérium umožňuje — podobně jako u spojitého systému — určit stabilitu systému s uzavřenou zpětnou vazbou z frekvenční charakteristiky systému s rozpojenou zpětnou vazbou.

Přenos impulsního systému s uzavřenou zpětnou vazbou má obecně tvar

$$(1.171) \quad K^*(q) = \frac{Q^*(q)}{1 + F^*(q)},$$

kde $F^*(q)$ je přenos impulsního systému s rozpojenou zpětnou vazbou ve tvaru podílu dvou polynomů

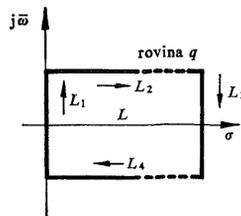
$$(1.172) \quad F^*(q) = \frac{M^*(q)}{N^*(q)}.$$

Jmenovatel přenosu (1.171) označíme

$$(1.173) \quad \varphi^*(q) = 1 + F^*(q)$$

a po dosazení (1.172)

$$(1.174) \quad \varphi^*(q) = \frac{N^*(q) + M^*(q)}{N^*(q)}.$$



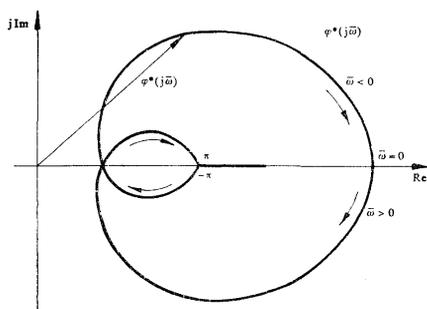
Obr. 23.

Dále se budeme zabývat rozбором funkce $\varphi^*(q)$. V komplexní rovině q vymezíme prostor L , který leží v pravé části komplexní roviny (obr. 23). Je vymezen částí

imaginární osy od $-\mathrm{j}\pi$ do $+\mathrm{j}\pi$ úsečkami L_2 a L_4 rovnoběžnými s reálnou osou ve vzdálenosti π a úsečkou L_3 , rovnoběžnou s imaginární osou. Předpokládáme, že ve vymezené oblasti nejsou kořeny funkce $N^*(q)$ ani funkce $N^*(q) + M^*(q)$. Použijeme-li princip argumentu, potom při změně q po obvodu vymezené oblasti v záporném smyslu, tj. tak, aby oblast L ležela vpravo, bude změna argumentu funkce $\varphi^*(q)$ rovna 2π násobku rozdílu mezi počtem kořenů polynomu čitatele a jmenovatele přenosu $\varphi^*(q)$, které leží ve vymezené oblasti

$$(1.175a) \quad \Delta_L \arg \varphi^*(q) = 2\pi(p - m).$$

Nejprve budeme předpokládat, že systém s rozpojenou zpětnou vazbou je stabilní. Tomu odpovídá $p = 0$. Aby byl stabilní systém se zpětnou vazbou, je nutné a posta-



Obr. 24.

čující, aby ve vymezené oblasti nebyly kořeny polynomu čitatele přenosu $\varphi^*(q)$ čili $n = 0$. Impulsní systém s uzavřenou zpětnou vazbou bude tedy stabilní, jestliže bude platit vztah

$$(1.175b) \quad \Delta_L \arg \varphi^*(q) = 0,$$

tj. jestliže přírůstek argumentu funkce $\varphi^*(q)$ při změně q podél uzavřeného obrysu L bude roven nule.

Mění-li se q podél imaginární osy $q = \mathrm{j}\bar{\omega}$ od $-\mathrm{j}\pi$ do $+\mathrm{j}\pi$ (úsek L_1), bude koncový bod vektoru $\varphi^*(q)$ opisovat uzavřenou křivku

$$(1.176) \quad \varphi^*(\mathrm{j}\bar{\omega}) = 1 + F^*(\mathrm{j}\bar{\omega}).$$

Vzhledem k tomu, že $\varphi^*(\mathrm{j}\bar{\omega})$ je periodická funkce, bude platit

$$\varphi^*(\mathrm{j}\pi) = \varphi^*(-\mathrm{j}\pi).$$

Bude tedy zmíněná křivka protínat reálnou osu nanejvýš při $\bar{\omega} = 0$ a $\bar{\omega} = \pm\pi$ jak je patrné z obr. 24.

Při pohybu q podél přímky L_2 od $\sigma = 0$ do $\sigma = \infty$ bude se měnit funkce $\varphi^*(q)$ podél reálné osy z hodnoty $\varphi^*(j\pi)$ do hodnoty

$$(1.177) \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \varphi^*(\sigma + j\pi) = \text{konst.}$$

Tutéž hodnotu bude mít funkce při změně q podél úsečky L_3 , která se nachází v nekonečnu, tedy ve „vzdálenosti“ $\sigma = \infty$. Při změně q podél přímky L_4 od $\sigma = \infty$ do $\sigma = 0$ bude v důsledku periodičnosti funkce

$$(1.178) \quad \varphi^*(\sigma - j\pi) = \varphi^*(\sigma + j\pi)$$

a funkce $\varphi^*(q)$ se bude měnit podél reálné osy od hodnoty $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \varphi^*(\sigma + j\pi)$ do hodnoty $\varphi^*(-j\pi)$ v opačném směru než předešle. Z průběhu křivky $\varphi^*(j\bar{\omega})$ na obr. 24 a z předchozího textu je patrné, že přírůstek argumentu $\Delta_L \arg \varphi^*(q)$ je určen křivkou $\varphi^*(j\bar{\omega})$ při změně $\bar{\omega}$ v intervalu $-\pi < \bar{\omega} \leq +\pi$ čili

$$(1.179) \quad \Delta_L \arg \varphi^*(q) = \Delta_{-\pi}^{+\pi} \arg \varphi^*(j\bar{\omega}).$$

Přírůstek argumentu je roven počtu otočení vektoru, jehož počátek je v počátku souřadnic komplexní roviny a koncový bod opisuje křivku $\varphi^*(j\bar{\omega})$. Přírůstek argumentu bude roven nule pouze v tom případě, kdy začátek vektoru se bude nacházet mimo oblast ohraničenou křivkou $\varphi^*(j\bar{\omega})$.

Funkci $F^*(j\bar{\omega})$ rozdělíme na část reálnou a imaginární

$$(1.180) \quad F^*(j\bar{\omega}) = U^*(\bar{\omega}) + j V^*(\bar{\omega}),$$

což lze také psát ve tvaru

$$(1.181) \quad F^*(j\bar{\omega}) = A^*(\bar{\omega}) e^{j\theta^*(\bar{\omega})}.$$

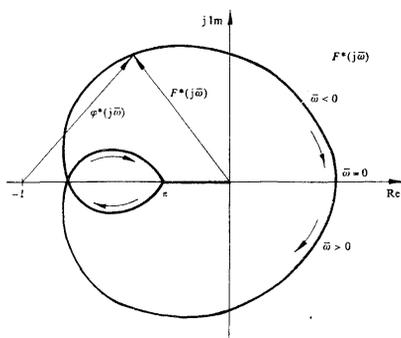
Modul $A^*(\bar{\omega})$ je určen vztahem

$$(1.182) \quad A^*(\bar{\omega}) = \sqrt{[U^{*2}(\bar{\omega}) + V^{*2}(\bar{\omega})]}.$$

Koncový bod vektoru $F^*(j\bar{\omega})$ opíše v komplexní rovině křivku, která je znázorněna na obr. 25. Představuje frekvenční charakteristiku systému s rozpojenou zpětnou vazbou. Lze ji získat posunutím křivky z obr. 24 vlevo ve směru reálné osy o jednotku. Počátek vektoru $\varphi^*(j\bar{\omega})$ se nachází v bodě $(-1, j0)$, konec vektoru opisuje křivku $F^*(j\bar{\omega})$. Podmínka (1.175) bude splněna jestliže bod $(-1, j0)$ z něhož vychází vektor $\varphi^*(j\bar{\omega})$ bude mimo oblast ohraničenou křivkou $F^*(j\bar{\omega})$. Frekvenční charakteristika je symetrická kolem reálné osy. Část vzniklá změnou frekvence v oblasti $0 < \bar{\omega} \leq \pi$ je zrcadlovým obrazem části vzniklé změnou frekvence v oblasti $-\pi < \bar{\omega} < 0$. Stačí tedy při vyšetřování stability uvažovat pouze jednu z obou částí frekvenční charakteristiky.

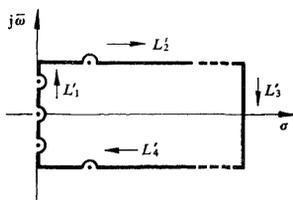
Na základě dosavadních výsledků lze kritérium stability formulovat takto:

Aby impulsní systém (stabilní při rozpojené zpětné vazbě) byl při uzavření zpětné vazby stabilní, je nutné a stačí, aby frekvenční charakteristika systému s rozpojenou zpětnou vazbou při růstu frekvence $\bar{\omega}$ od 0 do π neobepínala bod $(-1, j0)$.



Obr. 25.

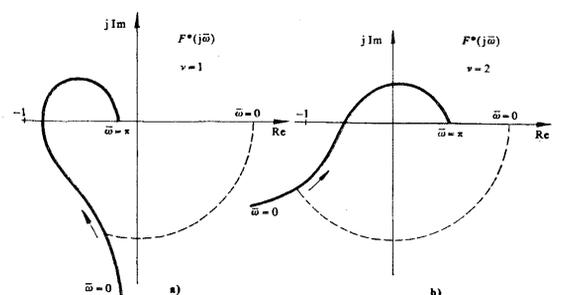
Dále se budeme zabývat případem, kdy systém s rozpojenou zpětnou vazbou je na mezi stability čili je neutrální. Frekvenční charakteristika systému s rozpojenou zpětnou vazbou začíná pro $\bar{\omega} = 0$ v nekonečnu. Oblast L vyznačenou na obr. 23



Obr. 26.

nahradíme oblastí L jak je nakreslena na obr. 26. Malé úseky na imaginární ose, kde leží kořeny polynomu $N^*(q)$ jsou nahrazeny půlkružnicemi poloměru $r \rightarrow 0$, ležícími v pravé části komplexní roviny. Mění-li se q podle obvodu vyznačené oblasti ve směru naznačeném šipkami, potom podle principu argumentu dospějeme k formulaci kritéria stability podobně jako v případě, kdy systém s otevřenou zpětnou vazbou je stabilní. Při změně q podél „nekonečně malých“ půlkružnic se bude koncový bod

vektoru $\varphi^*(q)$ resp. $F^*(q)$ pohybovat po odpovídajících obloucích poloměru $R \rightarrow \infty$, jejichž středové úhly mají hodnotu $v\pi/2$, kde v je číslo udávající násobnost kořenů ležících na imaginární ose. V praxi se velmi často vyskytuje případ, kdy kořen leží v počátku souřadnic. Pro tento případ lze použít dříve uvedené kritérium stability. Při konstrukci frekvenčních charakteristik je musíme doplnit oblouky poloměru $R \rightarrow \infty$, který začíná na reálné ose. Směr těchto oblouků je opačný než směr odpo-



Obr. 27.

ovídajících půlkružnic poloměru $r \rightarrow 0$. Dva příklady pro $v = 1$ a $v = 2$ jsou uvedeny na obr. 27.

V dalším případě, který se může vyskytnout, je systém s rozpojenou zpětnou vazbou nestabilní. Polynom $N^*(q)$ má kořeny s kladnou reálnou částí. Jejich počet označíme s . Výraz pro přírůstek argumentu dostaneme z (1.175a), dosadíme-li $n = 0$ a $p = s$

$$(1.183) \quad \Delta_L \arg \varphi^*(q) = 2\pi s.$$

Při $q = j\bar{\omega}$ bude mít výraz pro argument tvar

$$(1.184) \quad \Delta_{-\pi}^+ \arg \varphi^*(j\bar{\omega}) = 2\pi s.$$

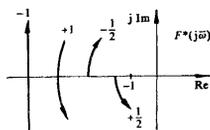
Jak již bylo dříve uvedeno jsou frekvenční charakteristiky symetrické, takže stačí psát

$$(1.185) \quad \Delta_0^+ \arg \varphi^*(j\bar{\omega}) = \pi s.$$

Na základě tohoto výsledku lze formulovat kritérium stability.

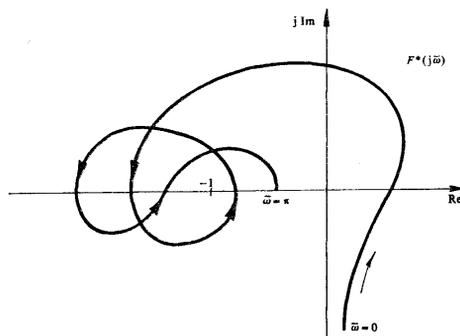
Je-li impulsní systém při rozpojené zpětné vazbě nestabilní, bude při uzavřené zpětné vazbě stabilní tehdy a jen tehdy, jestliže frekvenční charakteristika systému s rozpojenou zpětnou vazbou při rostoucí frekvenci $\bar{\omega}$ od 0 do π obepíná bod $(-1, j0)$ v kladném směru $s/2$ -krát.

Podobně jako u spojitého systému lze u impulsních použít poněkud pozměněnou formulaci kritéria stability, která je založena na změně argumentu. Tím se značně sníží pracnost. Změna argumentu $\varphi^*(j\bar{\omega})$ při změně frekvence $\bar{\omega}$ z 0 do π bude rovna nule, jestliže rozdíl mezi počtem přechodů křivky $F^*(j\bar{\omega})$ přes úsek reálné osy $(-\infty, -1)$



Obr. 28.

$-1)$ z horní poloroviny do dolní a mezi očet přechodů v opačném směru bude roven nule. Je-li tento rozdíl roven $\pm s/2$ bude přírůstek argumentu roven $\pm \pi s$. Je-li začátek frekvenční charakteristiky při $\bar{\omega} = 0$ v úseku $(-\infty, -1)$ na reálné ose, je nutné tento začátek počítat za polovinu přechodu. Sledujme frekvenční



Obr. 29.

charakteristiku systému s rozpojenou zpětnou vazbou ve směru rostoucí frekvence $\bar{\omega}$ od 0 do π . Přechod frekvenční charakteristiky přes úsek reálné osy $(-\infty, -1)$ z horní poloroviny do dolní nazveme kladným, přechod v opačném směru nazveme záporným. Všechny případy jsou patrné z obr. 28. Na základě těchto úvah lze formulovat kritérium stability:

System s uzavřenou zpětnou vazbou bude stabilní, právě když rozdíl mezi počtem kladných a záporných přechodů frekvenční charakteristiky $F^(j\bar{\omega})$ úseku reálné osy $(-\infty, -1)$ bude roven $s/2$, kde s je počet kořenů s kladnou reálnou částí jmenovatele přenosu systému s rozpojenou zpětnou vazbou.*

Je-li systém s rozpojenou zpětnou vazbou stabilní nebo neutrální ($s = 0$), bude systém s uzavřenou zpětnou vazbou stabilní, je-li rozdíl mezi počtem kladných a záporných přechodů frekvenční charakteristiky $F^(j\bar{\omega})$ úseku $(-\infty, -1)$ roven nule.*

Příklad frekvenční charakteristiky systému, který je při rozpojené zpětné vazbě nestabilní ($s = 2$), je na obr. 29. Charakteristika protíná úsek $(-\infty, -1)$ reálné osy, dvakrát v kladném směru, jednou v záporném $2 - 1 = 1$. Vzhledem k tomu, že $s = 2$ bude systém po uzavření zpětné vazby stabilní.

Problém fázové a amplitudové bezpečnosti se řeší stejným způsobem jako u spojitých systémů. Lze tedy použít závěry odstavce 1.1.7.

1.2.3. – Analogie Michajlovova kritéria

Toto kritérium je založeno na rozboru polynomu

$$(1.186) \quad F^*(q) = a_l e^{qT} + a_{l-1} e^{q(T-1)} + \dots + a_1 e^q + a_0.$$

Má-li být systém popsáný rovnicí (1.186) stabilní, musí všechny kořeny polynomu (1.186) ležet v levé části pásma komplexní roviny q , vyznačeném na obr. 20. Použijeme principu argumentu, přičemž vycházíme z obr. 23. Podle dříve uvedených podmínek stability musí platit

$$(1.187) \quad \Delta_L \arg F^*(q) = 0.$$

Celkový přírůstek argumentu se skládá ze součtu přírůstků argumentů po jednotlivých částech obvodu vyznačeném na obr. 23.

$$(1.188) \quad \Delta_L \arg F^*(q) = \Delta_{L_1} \arg F^*(q) + \Delta_{L_2} \arg F^*(q) + \\ + \Delta_{L_3} \arg F^*(q) + \Delta_{L_4} \arg F^*(q).$$

Na imaginární ose je $q = j\bar{\omega}$. Proto bude pro tuto část platit

$$(1.189) \quad \Delta_{L_1} \arg F^*(q) = \Delta_{-\pi}^{+\pi} \arg F^*(j\bar{\omega}).$$

Symbol $\Delta_{-\pi}^{+\pi}$ značí přírůstek argumentu od $-\pi$ do $+\pi$. Vzhledem k periodičnosti $F^*(q)$ podél imaginární osy a na přímkách L_2 a L_3 bude platit

$$F^*(\sigma - j\pi) = F^*(\sigma + j\pi)$$

a také

$$(1.190) \quad \Delta_{L_2} \arg F^*(q) = -\Delta_{L_3} \arg F^*(q).$$

Na přímce L_4 , která se nachází v nekonečnu bude

$$q = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} (\sigma + j\bar{\omega}).$$

$F^*(q)$ lze vyjádřit přibližným vztahem

$$F^*(q) \approx a_l e^{(\sigma + j\omega)l}.$$

Změna argumentu v tomto úseku bude dána výrazem

$$(1.191) \quad \Delta_{L, \sigma} \arg F^*(q) = -2\pi l.$$

Z výrazů (1.188) až (1.191) dostaneme hodnotu argumentu

$$\Delta_L \arg F^*(q) = \Delta_{-\pi}^+ \arg F^*(j\bar{\omega}) - 2\pi l.$$

Podle (1.187) má být tento výraz roven nule, takže dostáváme vztah

$$(1.192) \quad \Delta_{-\pi}^+ \arg F^*(j\bar{\omega}) = 2\pi l.$$

Výraz $F^*(j\bar{\omega})$ rozložíme na reálnou a imaginární část

$$(1.193) \quad F^*(j\bar{\omega}) = U^*(\bar{\omega}) + j V^*(\bar{\omega})$$

a zobrazíme v komplexní rovině jako vektor. Při změně $\bar{\omega}$ z $-\pi$ do $+\pi$ opisuje koncový bod tohoto vektoru tzv. charakteristickou křivku. Počet oběhů koncového bodu vektoru $F^*(j\bar{\omega})$ v kladném smyslu kolem počátku souřadnic je roven počtu kořenů polynomu $F^*(q)$ ležících v levé části pásma komplexní roviny. Systém bude tedy stabilní, jestliže počet úplných otáček vektoru $F^*(j\bar{\omega})$ při rostoucím $\bar{\omega}$ od $-\pi$ do $+\pi$ je roven stupni mnohočlenu $F^*(q)$.

Charakteristická křivka $F^*(j\bar{\omega})$ je souměrná pro kladné i záporné hodnoty $\bar{\omega}$ vzhledem k reálné ose. Proto stačí sestavit charakteristickou křivku pouze pro kladné hodnoty $\bar{\omega}$. Potom bude počet otáček vektoru $F^*(j\bar{\omega})$ při rostoucím $\bar{\omega}$ od 0 do π poloviční. Na základě toho lze kritérium stability formulovat takto:

Systém bude stabilní, jestliže při rostoucím $\bar{\omega}$ od 0 do π bude charakteristická křivka $F^(j\bar{\omega})$ postupně procházet $2l$ kvadrantů v kladném směru, kde l je stupeň polynomu $F^*(q)$.*

Příklady charakteristických křivek stabilního systému pro $l = 1, 2, 3, 4$ jsou na obr. 30. Charakteristická křivka nestabilního systému pro $l = 4$ je na obr. 31.

Charakteristickou křivku lze sestavit poměrně jednoduše geometricky. Jestliže ve vztahu

$$(1.194) \quad F^*(j\bar{\omega}) = a_l e^{j\bar{\omega}l} + a_{l-1} e^{j(l-1)\bar{\omega}} + \dots + a_1 e^{j\bar{\omega}} + a_0$$

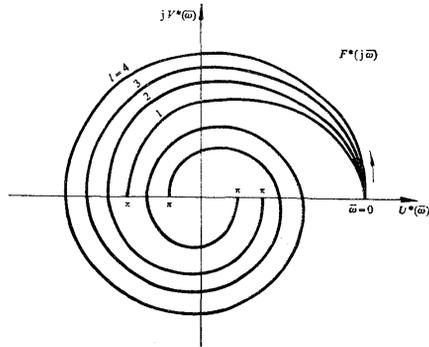
dosadíme nějakou konkrétní hodnotu $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1$, dostaneme vektor $F^*(j\bar{\omega}_1)$, který tvoří v komplexní rovině diagonálu mnohoúhelníku, jehož strany jsou tvořeny hodnotami koeficientů a_0, a_1, \dots, a_l . Úhel, který jednotlivé strany mezi sebou svírají je $\pi - \bar{\omega}_1$. Celá konstrukce je patrna z obr. 32. Při $\bar{\omega} = 0$ je

$$F^*(0) = a_l + a_{l-1} + \dots + a_1 + a_0.$$

Při $\bar{\omega} = \pi$ je

$$F^*(j\pi) = (-1)^l a_l + (-1)^{l-1} a_{l-1} + \dots + a_1 + a_0.$$

Pro tyto hodnoty $\bar{\omega}$ se mnohoúhelník redukuje na přímku.



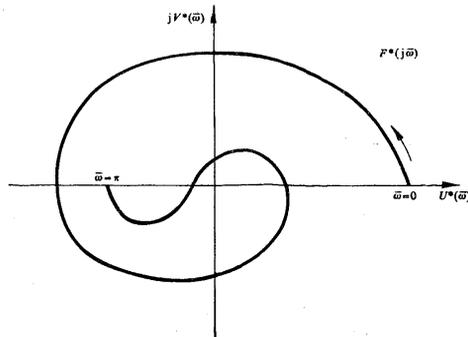
Obr. 30.

U impulsních systémů lze vyjádřit nutné podmínky stability pomocí nerovností:
pro lichý stupeň polynomu

$$F^*(0) > 0, \quad F^*(j\pi) < 0,$$

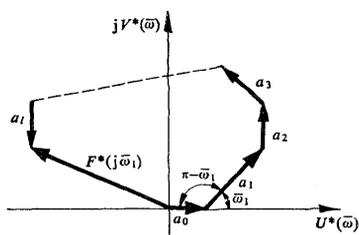
pro sudý stupeň polynomu

$$F^*(0) > 0, \quad F^*(j\pi) > 0.$$

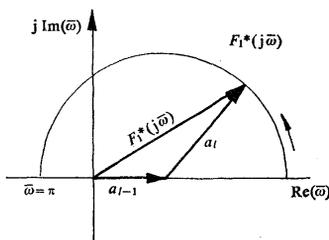


Obr. 31.

Tyto nerovnosti vyplývají z analogie Michajlova kritéria stability podle obrázků 30 a 31. Uvedené podmínky nejsou postačující, je však výhodné před použitím kteréhokoliv kritéria si ověřit zda jsou splněny. V případě, že splněny nejsou, je zbytečná jakákoliv další kontrola.



Obr. 32.



Obr. 33.

Pro konstrukci charakteristické křivky lze použít grafickou metodu. Výraz pro $F^*(j\bar{\omega})$ upravíme do tvaru

$$(1.195) \quad F^*(j\bar{\omega}) = (\dots (a_l e^{j\bar{\omega}} + a_{l-1}) e^{j\bar{\omega}} + a_{l-2}) e^{j\bar{\omega}} + \dots + a_1 e^{j\bar{\omega}} + a_0),$$

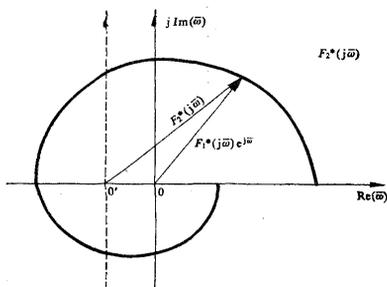
z něhož je patrné, že pro sestavení charakteristické křivky může být použito jednoduchých operací. Nejprve sestojíme křivku

$$F_1^*(j\bar{\omega}) = a_l e^{j\bar{\omega}} + a_{l-1}.$$

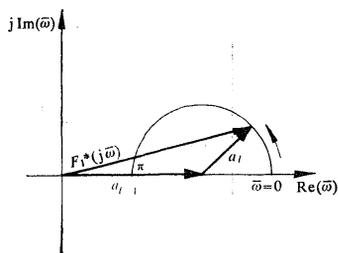
V komplexní rovině to je půlkružnice se středem na reálné ose $U^*(\bar{\omega})$ vzdáleném o a_{l-1} od počátku souřadnic a o poloměru rovném a_l , jak je patrné z obr. 33. Další křivku

$$F_1^*(j\bar{\omega}) e^{j\bar{\omega}} = (a_l e^{j\bar{\omega}} + a_{l-1}) e^{j\bar{\omega}}$$

získáme otáčením vektoru $F_1^*(j\bar{\omega})$, který vychází z počátku souřadnic a jehož koncový bod se pohybuje po kružnici zobrazené na obr. 33. Vektor $F^*(j\bar{\omega})$ přeneseme pro jednotlivé hodnoty $\bar{\omega}$ do obr. 34. Počátek souřadnic 0 přesuneme směrem vlevo o hodnotu koeficientu a_{l-2} . Nový počátek souřadnic je označen O' a imaginární osa je vyznačena čárkovaně. Velikost a směr vektoru $F_2^*(j\bar{\omega})$ pro jednotlivé hodnoty



Obr. 34.



Obr. 35.

$\bar{\omega}$ jsou udány spojnicí počátku souřadnic O' a koncového bodu vektoru $F_1^*(j\bar{\omega})$ pro stejnou hodnotu $\bar{\omega}$. Tím jsme získali křivku

$$F_2^*(j\bar{\omega}) = F_1^*(j\bar{\omega}) e^{j\bar{\omega}} + a_{l-2} = ((a_l e^{j\bar{\omega}} + a_{l-1}) e^{j\bar{\omega}} + a_{l-2}).$$

Z průběhu křivky $F_2^*(j\bar{\omega})$ nalezneme popsáním způsobem průběh křivky $F_2^*(j\bar{\omega}) e^{j\bar{\omega}}$ a křivky $F_3^*(j\bar{\omega})$. Postupně po l krocích získáme výslednou charakteristickou křivku:

$$F_l^*(j\bar{\omega}) = F^*(j\bar{\omega}).$$

Má-li argument $F_1^*(j\bar{\omega}) e^{j\bar{\omega}}$ nulovou hodnotu, lze dokázat, že při platnosti nerovnosti

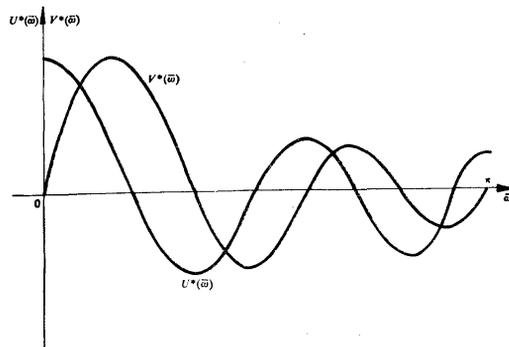
$$|a_{l-1}| > 2a_l$$

nemůže křivka vytvořená koncovým bodem vektoru $F_2^*(j\bar{\omega})$ projít čtyřmi kvadranty jak je naznačeno na obr. 35. Charakteristická křivka nemůže procházet požadovanými $2l$ kvadranty a systém je tudíž nestabilní.

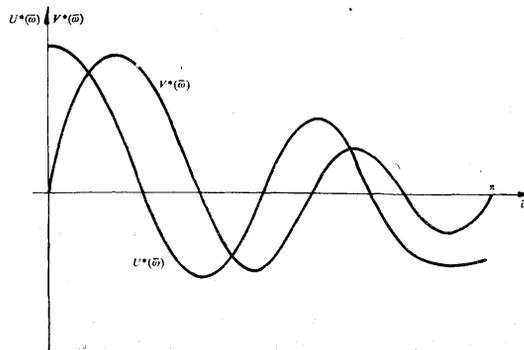
O stabilitě systému lze usuzovat i z grafických průběhů reálné a imaginární části $F^*(j\bar{\omega})$ v závislosti na frekvenci $\bar{\omega}$. Obě části lze vyjádřit pomocí goniometrických funkcí:

$$(1.196) \quad U^*(\bar{\omega}) = a_l \cos l\bar{\omega} + a_{l-1} \cos (l-1)\bar{\omega} + \dots + a_1 \cos \bar{\omega} + a_0,$$

$$V^*(\bar{\omega}) = a_l \sin l\bar{\omega} + a_{l-1} \sin (l-1)\bar{\omega} + \dots + a_1 \sin \bar{\omega}.$$



Obr. 39.



Obr. 37.

Vzhledem k tomu, že $U^*(\bar{\omega})$ a $V^*(\bar{\omega})$ mohou mít maximálně l kořenů, lze formulovat kritérium stability takto:

Impulsní systém bude stabilní, jestliže reálná a imaginární část $U^(\bar{\omega})$ a $V^*(\bar{\omega})$ při změně $\bar{\omega}$ z 0 do π mají l reálných kořenů, které se vzájemně střídají a při $\bar{\omega} = 0$ mají $U^*(0)$ a $V^*(0)$ stejné znaménko.*

Příklady průběhů $U^*(\bar{\omega})$ a $V^*(\bar{\omega})$ v závislosti na $\bar{\omega}$ jsou na obr. 36 a obr. 37. Na obr. 36 se průsečíky obou křivek $U^*(\bar{\omega})$ a $V^*(\bar{\omega})$ s vodorovnou osou střídají, systém bude tedy stabilní. Příklad, kdy se průsečíky nestřídají tedy případ nestabilního systému, je na obr. 37.

Prochází-li charakteristická křivka počátkem souřadnic, je systém na mezi stability. V tomto případě budou mít $U^*(\bar{\omega})$ a $V^*(\bar{\omega})$ společné kořeny a také společné průsečíky s vodorovnou osou. Hodnota $\bar{\omega}$, při které $F^*(j\bar{\omega}) = 0$ a také $U^*(\bar{\omega}) = V^*(\bar{\omega}) = 0$, určuje mezní kmitočet.

1.4 – Stabilita systémů s proměnnými parametry

Diferenciální rovnice, popisující systémy s proměnnými parametry, mají koeficienty proměnné v závislosti na čase; budeme je označovat jako funkce času $a_i(t)$. Stabilitu systémů s proměnnými parametry lze zaručit pouze v určitém časovém intervalu I . Mimo tento interval může být systém nestabilní.

1.4.1 Základní vztahy

Budeme vyšetřovat systém s proměnnými parametry popsany diferenciální rovnicí

$$(1.197) \quad a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} x_2(t) + \dots + a_1(t) \frac{d}{dt} x_2(t) + a_0(t) x_2(t) = x_0(t).$$

$x_2(t)$ je výstupní veličina, $x_0(t)$ je vstupní veličina. Naším úkolem bude nalézt vztah mezi vstupní a výstupní veličinou vyšetřovaného systému pro případ, kdy do okamžiku, ve kterém začíná působit vstupní signál, je systém v klidu. Řešení uvažujeme od okamžiku, kdy začíná působit vstupní signál. Pro tento okamžik platí:

$$(1.198) \quad \frac{d^v}{dt^v} x_2(t)|_{t=0} = 0; \quad v = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

Nalezneme řešení rovnice (1.197) metodou variace konstant. Řešení hledáme ve tvaru

$$(1.199) \quad x_2(t) = \varphi_2(t) \gamma_1(t) + \varphi_2(t) \gamma_2(t) + \dots + \varphi_n(t) \gamma_n(t),$$

kde $\varphi_i(t)$ jsou lineárně nezávislá dílčí řešení homogenní rovnice, funkce $\gamma_i(t)$ určíme tak, aby při dosazení výrazu (1.199) do (1.197) se získala identita.

Určíme derivaci výrazu (1.199)

$$(1.200) \quad x_2'(t) = \varphi_1'(t) \gamma_1(t) + \varphi_2'(t) \gamma_2(t) + \dots + \varphi_n'(t) \gamma_n(t) + \varphi_1(t) \gamma_1'(t) + \varphi_2(t) \gamma_2'(t) + \dots + \varphi_n(t) \gamma_n'(t).$$

Ve vztahu (1.200) budeme požadovat, aby byla splněna podmínka

$$(1.201) \quad \varphi_1(t) \gamma_1'(t) + \varphi_2(t) \gamma_2'(t) + \dots + \varphi_n(t) \gamma_n'(t) = 0.$$

Derivujeme-li ještě jednou výraz (1.200) a bereme-li v úvahu vztah (1.201), dostaneme

$$(1.202) \quad x_2''(t) = \varphi_1''(t) \gamma_1(t) + \varphi_2''(t) \gamma_2(t) + \dots + \varphi_n''(t) \gamma_n(t) + \varphi_1'(t) \gamma_1'(t) + \varphi_2'(t) \gamma_2'(t) + \dots + \varphi_n'(t) \gamma_n'(t).$$

Opět položíme podmínku

$$(1.203) \quad \varphi_1'(t) \gamma_1'(t) + \varphi_2'(t) \gamma_2'(t) + \dots + \varphi_n'(t) \gamma_n'(t) = 0.$$

Postupujeme-li uvedeným způsobem od první až do n -té derivace, dostáváme postupně:

$$(1.204) \quad \begin{aligned} \varphi_1(t) \gamma_1'(t) + \varphi_2(t) \gamma_2'(t) + \dots + \varphi_n(t) \gamma_n'(t) &= 0, \\ \varphi_1'(t) \gamma_1'(t) + \varphi_2'(t) \gamma_2'(t) + \dots + \varphi_n'(t) \gamma_n'(t) &= 0, \\ \dots & \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) \gamma_1'(t) + \varphi_2^{(n-2)}(t) \gamma_2'(t) + \dots + \varphi_n^{(n-2)}(t) \gamma_n'(t) &= 0, \end{aligned}$$

$$(1.205) \quad x_2^{(n)}(t) = \varphi_1^{(n)}(t) \gamma_1(t) + \varphi_2^{(n)}(t) \gamma_2(t) + \dots + \varphi_n^{(n)}(t) \gamma_n(t) + \varphi_1^{(n-1)}(t) \gamma_1'(t) + \varphi_2^{(n-1)}(t) \gamma_2'(t) + \dots + \varphi_n^{(n-1)}(t) \gamma_n'(t).$$

Dosadíme-li takto nalezené hodnoty $x_2(t), x_2'(t), \dots, x_2^{(n)}(t)$ do rovnice (1.197) a uvažujeme-li, že funkce $\varphi_i(t)$ po dosažení do rovnice (1.197) anulují její levou část, dostáváme:

$$(1.206) \quad \varphi_1^{(n-1)}(t) \gamma_1'(t) + \varphi_2^{(n-1)}(t) \gamma_2'(t) + \dots + \varphi_n^{(n-1)}(t) \gamma_n'(t) = \frac{x_0(t)}{a_n(t)}.$$

Výrazy (1.201) až (1.204) a (1.206) tvoří soustavu lineárních algebraických rovnic s n neznámými $\gamma_j'(t)$

$$(1.207) \quad \begin{aligned} \varphi_1(t) \gamma_1'(t) + \varphi_2(t) \gamma_2'(t) + \dots + \varphi_n(t) \gamma_n'(t) &= 0, \\ \varphi_1'(t) \gamma_1'(t) + \varphi_2'(t) \gamma_2'(t) + \dots + \varphi_n'(t) \gamma_n'(t) &= 0, \\ \dots & \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) \gamma_1'(t) + \varphi_2^{(n-2)}(t) \gamma_2'(t) + \dots + \varphi_n^{(n-2)}(t) \gamma_n'(t) &= 0, \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) \gamma_1'(t) + \varphi_2^{(n-1)}(t) \gamma_2'(t) + \dots + \varphi_n^{(n-1)}(t) \gamma_n'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Řešíme-li tuto soustavu s ohledem na hledané veličiny, dostaneme:

$$(1.208) \quad \gamma_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0, & \varphi_2(t), & \dots, & \varphi_n(t) \\ 0, & \varphi_2'(t), & \dots, & \varphi_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x_0(t)}{a_n(t)}, & \varphi_2^{(n-1)}(t), & \dots, & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}}{\Delta(t)},$$

$$\gamma_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(t), & 0, & \dots, & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t), & 0, & \dots, & \varphi_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t), & \frac{x_0(t)}{a_n(t)}, & \dots, & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}}{\Delta(t)}, \dots,$$

$$\gamma_n'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(t), & \varphi_2(t), & \dots, & 0 \\ \varphi_1'(t), & \varphi_2'(t), & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t), & \varphi_2^{(n-1)}(t), & \dots, & \frac{x_0(t)}{a_n(t)} \end{vmatrix}}{\Delta(t)},$$

kde

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t), & \varphi_2(t), & \dots, & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t), & \varphi_2'(t), & \dots, & \varphi_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t), & \varphi_2^{(n-1)}(t), & \dots, & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

je Vronského determinant rovnice (1.197). Determinanty v čitatelích zlomků (1.208) rozložíme podle prvků sloupců, které obsahují člen $x_0(t)/a_n(t)$. Přitom bereme v úvahu, že všechny prvky těchto sloupců mimo $x_0(t)/a_n(t)$ jsou nulové. Pro hledané hodnoty $\gamma_i'(t)$ dostaneme nové výrazy

$$(1.210) \quad \gamma_1'(t) = (-1)^{n+1} \frac{x_0(t)}{\Delta(t) a_n(t)} A_{n1},$$

$$\gamma_2'(t) = (-1)^{n+2} \frac{x_0(t)}{\Delta(t) a_n(t)} A_{n2},$$

$$\dots,$$

$$\gamma_n'(t) = (-1)^{n+n} \frac{x_0(t)}{\Delta(t) a_n(t)} A_{nn},$$

kde A_{ni} jsou minory i -tého prvku prvního řádku determinantu

$$(1.211) \quad D = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ \varphi_1(t), & \varphi_2(t), & \dots, & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t), & \varphi_2'(t), & \dots, & \varphi_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t), & \varphi_2^{(n-2)}(t), & \dots, & \varphi_n^{(n-2)}(t) \end{vmatrix}.$$

Výrazy (1.210) integrujeme od 0 do t a získané hodnoty $\gamma_j(t)$ dosadíme do výrazu (1.199) při respektování počátečních podmínek (1.198). Dostaneme vztah:

$$(1.212) \quad x_2(t) = \int_0^t \frac{x_0(u)}{a_n(u) A(u)} [\varphi_1(t) A_{n1}(u) (-1)^{n+1} + \varphi_2(t) A_{n2}(u) (-1)^{n+2} + \dots + \varphi_n(t) A_{nn}(u) (-1)^{n+n}] du.$$

Abychom zde odlišili integrační proměnnou od času, označujeme ji u .

V mnohočlenu, který je v hranatých závorkách výrazu (1.212) vytkneme $(-1)^{n-1}$. V hranatých závorkách zůstane výraz, který odpovídá rozkladu determinantu (1.211) podle prvního řádku. Jednotlivé prvky tohoto řádku jsou tvořeny funkcemi $\varphi_i(t)$

V determinantu (1.211) nahradíme tedy první řádek funkcemi $\varphi_i(t)$. Dostaneme determinant

$$(1.213) \quad D_\varphi = \begin{vmatrix} \varphi_1(t), & \varphi_2(t), & \dots, & \varphi_n(t) \\ \varphi_1(u), & \varphi_2(u), & \dots, & \varphi_n(u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(u), & \varphi_2^{(n-2)}(u), & \dots, & \varphi_n^{(n-2)}(u) \end{vmatrix},$$

který rozložíme podle prvků prvního řádku:

$$(1.214) \quad D_\varphi(t, u) = (-1)^2 \varphi_1(t) \begin{vmatrix} \varphi_2(u), & \varphi_3(u), & \dots, & \varphi_n(u) \\ \varphi_2'(u), & \varphi_3'(u), & \dots, & \varphi_n'(u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_2^{(n-2)}(u), & \varphi_3^{(n-2)}(u), & \dots, & \varphi_n^{(n-2)}(u) \end{vmatrix} + \\ + (-1)^3 \varphi_2(t) \begin{vmatrix} \varphi_1(u), & \varphi_3(u), & \dots, & \varphi_n(u) \\ \varphi_1'(u), & \varphi_3'(u), & \dots, & \varphi_n'(u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(u), & \varphi_3^{(n-2)}(u), & \dots, & \varphi_n^{(n-2)}(u) \end{vmatrix} + \\ + \dots + (-1)^{n+1} \varphi_n(t) \begin{vmatrix} \varphi_1(u), & \varphi_2(u), & \dots, & \varphi_{n-1}(u) \\ \varphi_1'(u), & \varphi_2'(u), & \dots, & \varphi_{n-1}'(u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(u), & \varphi_2^{(n-2)}(u), & \dots, & \varphi_{n-1}^{(n-2)}(u) \end{vmatrix}.$$

Po vytknutí $(-1)^{n-1}$ před hranatou závorkou bude mít (1.212) tvar

$$(1.215) \quad x_2(t) = \int_0^t x_0(u) \frac{(-1)^{n-1}}{\Delta(u) a_n(u)} [(-1)^2 \varphi_1(t) A_{n1}(u) + (-1)^3 \varphi_2(t) A_{n2}(u) + \dots + (-1)^{n+1} \varphi_n(t) A_{nn}(u)] du .$$

Výraz ve hranaté závorce je totožný s výrazem (1.214) takže můžeme psát:

$$(1.216) \quad x_2(t) = \int_0^t x_0(u) \frac{(-1)^{n-1}}{\Delta(u) a_n(u)} D_\varphi(t, u) du .$$

Zavedeme označení

$$(1.217) \quad g(t, u) = \frac{(-1)^{n-1}}{a_n(u) \Delta(u)} \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & , & \varphi_2(t) & , & \dots & , & \varphi_n(t) \\ \varphi_1(u) & , & \varphi_2(u) & , & \dots & , & \varphi_n(u) \\ \varphi_1'(u) & , & \varphi_2'(u) & , & \dots & , & \varphi_n'(u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi^{(n-2)}(u) & , & \varphi_2^{(n-2)}(u) & , & \dots & , & \varphi_n^{(n-2)}(u) \end{vmatrix} .$$

Výraz (1.212) nabývá potom konečného tvaru

$$(1.218) \quad x_2(t) = \int_0^t g(t, u) x_0(u) du .$$

Abychom vyjasnili fyzikální podstatu funkce $g(t, u)$, vyšetříme případ, kdy na vstup systému je v okamžiku $t = \xi$ zaveden signál ve tvaru Diracova impulsu, tj.

$$x_0(u) = \delta(u - \xi), \quad 0 < \xi < u .$$

S použitím výrazu (1.218) a známé rovnosti

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \xi) dt = f(\xi)$$

dostaneme tzv. impulsní přechodovou funkci systému, popsaného rovnicí (1.197)

$$\int_0^t g(t, u) \delta(u - \xi) du = g(t, \xi) .$$

Impulsní přechodovou funkci se nazývá reakce systému (který byl před začátkem působení signálu v klidu) na vstupní signál tvaru Diracova impulsu. Z matematického hlediska $g(t, \xi)$ je řešením diferenciální rovnice

$$(1.219) \quad a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} g(t, \xi) + \dots + a_1(t) \frac{d}{dt} g(t, \xi) + a_0(t) g(t, \xi) = \delta(t - \xi)$$

s počátečními podmínkami

$$\frac{d^v}{dt^v} g(t, \xi) \Big|_{t=\xi-} = 0; \quad v = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

Impulsní přechodová funkce může být rozšířena i na obecnější případ pro systémy s proměnnými parametry pro řešení rovnice tvaru

$$(1.220) \quad a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} w(t, \xi) + \dots + a_1(t) \frac{d}{dt} w(t, \xi) + a_0(t) w(t, \xi) = \\ = b_m(t) \delta_t^{(m)}(t - \xi) + \dots + b_1(t) \delta_t(t - \xi) + b_0(t) \delta(t - \xi)$$

s počátečními podmínkami

$$(1.221) \quad \frac{d^v}{dt^v} w(t, \xi) \Big|_{t=\xi-} = 0; \quad v = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

Zde $w(t, \xi)$ značí impulsní přechodovou funkci systému s proměnnými parametry obecného tvaru. S funkcí $g(t, \xi)$ souvisí podle vztahu

$$(1.222) \quad w(t, \xi) = (-1)^m \frac{d^m}{d\xi^m} [g(t, \xi) b_m(\xi)] + \dots + g(t, \xi) b_0(\xi).$$

1.4.2 Určení parametrické přenosové funkce

Při analýze systémů s proměnnými parametry se téměř nikdy nepoužívají přímé vztahy mezi vstupními a výstupními veličinami, ale používá se Laplaceovy nebo Fourierovy transformace. Jednak se značně zjednoduší výpočet, jednak se umožní snadný převod do frekvenční oblasti. Proto má použití uvedených transformací pro analýzu systémů s proměnnými parametry velký praktický význam a rozšiřuje možnosti analytického vyšetřování systémů automatické regulace. Významné výsledky v tomto směru získal L. A. Zadeh.

Předpokládáme, že pro vstupní signál systému s proměnnými parametry existuje Fourierův integrál

$$(1.223) \quad x_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

kde $X(j\omega)$ je komplexní relativní amplituda spektra funkce $x_1(t)$.

Místo funkce $x_1(t)$ připojené na vstup systému v okamžiku $t = 0$, bude nyní působit „nekonečné množství“ sinusových kmitů začínajících v $t = -\infty$. Ve vztahu pro výstupní veličinu nutno tuto okolnost respektovat posunutím dolní hranice integrace

$$(1.224) \quad x_2(t) = \int_{-\infty}^t w(t, \xi) x_1(\xi) d\xi.$$

Dosadíme-li výraz (1.223) do rovnosti (1.224) a zaměníme-li pořadí integrace, dostaneme po snadné úpravě

$$x_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) e^{j\omega t} \left[\int_{-\infty}^t w(t, \xi) e^{-j\omega(t-\xi)} d\xi \right] d\omega .$$

Označíme-li

$$(1.225) \quad W(j\omega, t) = \int_{-\infty}^t w(t, \xi) e^{-j\omega(t-\xi)} d\xi ,$$

můžeme psát

$$(1.226) \quad x_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega, t) X_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

Použijeme-li známé metody pro převod Fourierovy transformace na Laplaceovu, můžeme napsat následující výrazy:

$$(1.227) \quad x_2(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(p, t) X_1(p) e^{pt} dp ,$$

$$(1.228) \quad W(p, t) = \int_{-\infty}^t w(t, \xi) e^{-p(t-\xi)} d\xi .$$

Výraz (1.228) je obecnějším vyjádřením známého výrazu pro přenos systému s konstantními parametry. Liší se pouze parametrem t , který se vyskytuje ve funkci $W(p, t)$. V souvislosti s tím budeme funkci $W(p, t)$ nazývat *parametrickou přenosovou funkcí systému*. Hledaná výstupní veličina se snadno určí ze vztahu $X_2(p, t) = W(p, t) X_1(p)$. Vztah (1.228) slouží hlavně k určení parametrické přenosové funkce, kterou budeme používat při kontrole stability systému s proměnnými parametry.

1.4.3 Podmínky stability

Budeme se zabývat systémem s proměnnými parametry stabilním v zadaném intervalu I , jestliže jeho impulsní přechodová funkce je doznívající s časem pro všechna ξ , ležící uvnitř tohoto intervalu. Podmínku stability lze potom vyjádřit ve tvaru

$$(1.229) \quad I_t = \int_0^{\infty} |w(t, \xi)| dt < \infty .$$

Nejprve vyšetříme výraz pro parametrickou přenosovou funkci systému

$$(1.230) \quad W(p, t) = \int_{-\infty}^t w(t, \xi) e^{-p(t-\xi)} d\xi .$$

$\varphi_i(t)$ je lineárně nezávislé dílčí řešení rovnice

$$(1.235) \quad \frac{d^n}{dt^n} x_2(t) + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x_2(t) + \dots + a_0(t) x_2(t) = 0,$$

představující základní systém řešení, $A(\xi)$ je determinant Vronského

$$(1.236) \quad A(\xi) = \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi) & \varphi_2(\xi) & \dots & \varphi_n(\xi) \\ \varphi_1'(\xi) & \varphi_2'(\xi) & \dots & \varphi_n'(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(\xi) & \varphi_2^{(n-1)}(\xi) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(\xi) \end{vmatrix},$$

$g(t, \xi)$ je impulsní přechodová funkce systému.

Podmínky absolutní integrovatelnosti funkce $g(t, \xi)$

$$(1.237) \quad I_g = \int_{-\infty}^t |g(t, \xi)| d\xi < \infty, \quad 0 < t < I$$

jsou splněny, jestliže

$$(1.238) \quad \int_{-\infty}^t \left| \frac{A_n(\xi)}{A(\xi)} \right| d\xi < \infty, \quad 0 < t < I.$$

Podmínka doznívání funkce $g(t, \xi)$ bude vždy splněna, jak je patrné z (1.233), jestliže všechna dílčí řešení $\varphi_i(t)$ jsou doznívající funkce. Při splnění této podmínky budou determinanty A_{ni} a $A(\xi)$ také doznívající, ale podle proměnné ξ . Rychlost doznívání determinantu $A(\xi)$ bude o řád vyšší než rychlost doznívání determinantu A_{ni} , neboť A_{ni} je pro velká ξ veličina řádu o jednotku menšího v proměnné ξ^{-1} . Proto funkce $A_{ni}(\xi)/A(\xi)$ budou mít tutéž rychlost růstu v závislosti na ξ , jako je rychlost doznívání řešení $\varphi_i(t)$ v závislosti na t . Snadno lze ověřit i správnost opačného tvrzení: jestliže funkce $g(t, \xi)$ s časem roste, potom funkce $A_{ni}/A(\xi)$ budou doznívat a budou mít rychlost doznívání rovnou rychlosti růstu $g(t, \xi)$. Abychom objasnili uvedené tvrzení, budeme předpokládat, že rychlost doznívání dílčích řešení $\varphi_i(t)$ je určena exponenciálou

$$(1.239) \quad |\varphi_i(t)| \leq M_i e^{-c_i t},$$

kde c_i a M_i jsou kladná čísla.

Potom rychlost doznívání determinantů $A_{ni}(\xi)$ bude určena prvky tvaru

$$N_{ki} \exp \left[-\xi \sum_{i=1}^{n-1} c_i \right],$$

protože řád těchto determinantů je $n - 1$. Rychlost doznívání $A(\xi)$ bude určena členy tvaru

$$N_{qi} \exp \left[-\xi \sum_{i=1}^n c_i \right],$$

protože jeho řád je n . Rychlost růstu výrazu $A_{ni}/D(\xi)$ při změně ξ od $-\infty$ do t bude určena vztahem

$$(1.240) \quad \left| \frac{A_{ni}(\xi)}{D(\xi)} \right| \leq \frac{N_{ki}}{N_{gi}} \exp \left[-\xi \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i - \sum_{i=1}^n c_i \right) \right] = N_i e^{\xi c_i}.$$

Srovnáme-li výrazy (1.239) a (1.240), snadno se přesvědčíme o pravdivosti výše uvedených tvrzení. Podmínky doznívání impulsní přechodové funkce $g(t, \xi)$ v čase jsou tedy ekvivalentní podmínkám doznívání funkcí $A_{ni}/D(\xi)$ při změně ξ od t do $-\infty$. Proto integrál

$$(1.241) \quad I_g = \int_{-\infty}^t |g(t, \xi)| d\xi$$

bude konvergovat pro všechna t , ležící uvnitř intervalu I . To se týká případu, kdy parametrická přenosová funkce $G(p, t)$ je v pravé polorovině analytická. Naproti tomu, jestliže impulsní přechodová funkce $g(t, \xi)$ roste s časem, bude integrál I_g divergovat, což odpovídá přemístění některých pólů funkce $G(p, t)$ do pravé poloroviny.

Je-li vyšetřovaným systémem setrvačný členek, potom podmínky konvergence integrálu (1.241) nebo ekvivalentní podmínky analytičnosti parametrické přenosové funkce v pravé polorovině a na imaginární ose, prakticky jednoznačně určují doznívání impulsních přechodových funkcí $g(t, \xi)$ v čase. Odtud vyplývá, že konvergence integrálu I_ξ (1.231) je zaručena existencí urychlujícího prvku v systému.

Mezi impulsními funkcemi setrvačného článku a urychlujícího obvodu platí vztah

$$(1.242) \quad w(t, \xi) = B_0(\xi) g(t, \xi) - B_1(\xi) \frac{d}{d\xi} g(t, \xi) + \dots \\ \dots + (-1)^m B_m(\xi) \frac{d^m}{d\xi^m} g(t, \xi).$$

Veličiny $B_i(\xi)$ jsou závislé na koeficientech výrazu (1.222) podle vztahů:

$$(1.243) \quad B_0(\xi) = b_0(\xi) - \frac{d}{d\xi} b_1(\xi) + \frac{d^2}{d\xi^2} b_2(\xi) + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{d\xi^m} b_m(\xi),$$

$$B_1(\xi) = b_1(\xi) - 2 \frac{d}{d\xi} b_2(\xi) + \dots + (-1)^{m-1} m \frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}} b_m(\xi),$$

$$\dots \\ B_m(\xi) = b_m(\xi).$$

Dosadíme-li (1.242) do (1.231), dostaneme

$$(1.244) \quad I_\xi = \int_{-\infty}^t |B_0(\xi) g(t, \xi)| d\xi + \dots + \int_{-\infty}^t \left| B_m(\xi) \frac{d^m}{d\xi^m} g(t, \xi) \right| d\xi.$$

Konvergence integrálu I_ξ se tedy určuje nejen charakterem změny funkce $g(t, \xi)$, ale také charakterem změny funkce $B_i(\xi)$. Například, funkce $g(t, \xi)$, doznívající při změně ξ od $-\infty$ do t , dá divergentní integrál I_g . Libovolná z funkcí $B_i(\xi)$ bude mít rostoucí charakter, přičemž rychlost jejího růstu bude vyšší než rychlost růstu doznívání funkce $g(t, \xi)$. Potom součin obou těchto funkcí bude funkce rostoucí (čili doznívající při změně ξ od t do $-\infty$). To zaručuje konvergenci integrálu I_ξ při existenci divergentního časového průběhu.

Závěrem lze říci, že stabilitu systému s proměnnými parametry v konečném časovém intervalu pro systémy se zrychlením vstupního signálu nutno určovat s uvažováním vlivu parametrů zrychlujícího obvodu. Při použití parametrické přenosové funkce je často třeba určit obrazy pro každý z členů výrazu (1.242) s i bez respektování koeficientů B_i . Přitom je třeba znát jejich vliv na rozložení pólů parametrické přenosové funkce v komplexní rovině.

1.5 Aperiodická stabilita*

Řešení některých úloh v automatické regulaci lze značně usnadnit zavedením požadavku aperiodické stability výsledného obvodu nebo jeho části. Výklad o stabilitě lineárních obvodů doplníme proto definicí stability aperiodické, objasněním nejdůležitějších vlastností aperiodicky stabilních soustav a přehledem algebraických kritérií, kterými lze aperiodickou stabilitu kontrolovat.

1.5.1 Definice a vlastnosti aperiodicky stabilního obvodu

Aperiodicky stabilními nazýváme stabilní obvody, jejichž impulsová charakteristika neobsahuje žádné kmitavé složky.

Matematické podmínky pro splnění tohoto požadavku objasníme na obecném výrazu pro impulsovou charakteristiku.

a) Impulsová charakteristika lineárního spojitého obvodu, popsaného lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty, je obecně vyjádřena vztahem

$$(1.245) \quad x(t) = \sum_{k=1}^q \sum_{i=0}^{r_k-1} A_{ik} \frac{t^i}{i!} e^{p_k t},$$

kde značí t čas, A_{ik} konstanty, p_k kořeny charakteristického polynomu

$$f(p) = \sum_{v=0}^l a_v p^{l-v},$$

r_k násobnost kořenů p_k , q počet různých kořenů p_k , l stupeň charakteristického polynomu.

* Odstavec o aperiodické stabilitě napsala Ing. Alena Halousková, CSc.

b) Impulsová charakteristika lineárního impulsového obvodu, popsaného lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty, je dána výrazem:

$$(1.246) \quad x(t) = \sum_{k=1}^q \sum_{i=0}^{r_k-1} A_{ik} \binom{t}{i} z_k^{t-i} = \sum_{k=1}^q \sum_{i=0}^{r_k-1} A_{ik} \binom{t}{i} e^{(t-i) \ln z_k},$$

kde značí t diskretní čas ($t = 0, T, 2T, \dots$), A_{ik} konstanty, z_k kořeny charakteristického polynomu

$$f(z) = \sum_{v=0}^l a_v z^{l-v},$$

r_k násobnost kořenů z_k , q počet různých kořenů z_k , l stupeň charakteristického polynomu.

Impulsová charakteristika aperiodicky stabilního obvodu nesmí obsahovat žádné kmitavé složky; přesněji řečeno, musí být možné určit časový okamžik t_0 takový, že pro $t > t_0$ má výraz $x(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ stále znaménko.

Podmínka stability klade na kořeny p_k a z_k tato omezení:

$$\operatorname{Re} [p_k] < 0,$$

$$|z_k| < 1.$$

Jak je zřejmé z rovnice (1.245), je podmínka aperiodicity u spojitého obvodu splněna tehdy a jen tehdy, jsou-li všechny kořeny p_k reálné. Podobně z rovnice (1.246) vyplývá, že pro aperiodický impulsní obvod musí být všechny hodnoty $\ln z_k$ reálné, tedy kořeny z_k musí být reálné kladné.

Z definice aperiodické stability vyplývá, že výstupní signál aperiodicky stabilního obvodu neobsahuje žádné harmonické složky způsobené vlastními kmity obvodu. Důsledkem toho je omezení počtu relativních extrémů výstupního signálu. Lze dokázat, že impulsová nebo přechodová charakteristika aperiodicky stabilního obvodu má nejvýše $n - 1$ relativních extrémů.

Při nepřesném vyjadřování se aperiodicita často zaměňuje s monotonností, tj. požadavkem, aby výstupní signál neměl žádné relativní extrémy. Monotonnost a aperiodicita však nejsou přímo vázány: u aperiodicky stabilních obvodů je počet relativních extrémů omezen, u ostatních obvodů omezen není, v obou případech však může být nulový (obecně platné podmínky monotonnosti dosud nebyly stanoveny).

1.5.2 Kritéria aperiodické stability

Z předchozích úvah vyplývá, že stabilní regulační obvod je aperiodický, jsou-li všechny kořeny jeho charakteristického polynomu reálné a to v případě spojitého obvodu reálné záporné, v případě impulsového obvodu reálné kladné. K ověření

aperiodicity lze užít dvou výpočetně různých postupů, a to přímého určení počtu reálných kořenů metodou Sturmových posloupností nebo přímého testu převedením na problém obecné stability.

Předpokládejme, že je dán charakteristický polynom $f(p)$ nebo $f(z)$ a objasníme oba postupy.

1. V kapitole 1.1 byla definována Sturmova posloupnost, umožňující určit počet reálných kořenů polynomu v libovolném intervalu (a, b) . Pro stabilní obvod je podmínkou aperiodicity rovnost

$$(1.247) \quad V(-\infty) - V(\infty) = q$$

Není-li stabilita zajištěna, je možné kontrolovat přímo splnění podmínky:

$$(1.248) \quad V(-\infty) - V(0) = q$$

pro spojitě obvody a

$$(1.249) \quad V(0) - V(1) = q$$

pro obvody impulsní.

Je-li $q < n$, tedy v případě, když charakteristický mnohočlen má násobné kořeny, je třeba Sturmovu posloupnost modifikovat. Při výpočtu Sturmovy posloupnosti $f_1(p), f_2(p) \dots$ dojdeme totiž k funkci $f_{q-1}(p)$, která je největším společným dělitelem předchozích členů, a $f_q(p) = 0$. Pak lze dokázat [13], že posloupnost funkcí

$$(1.250) \quad f_k^*(p) = \frac{f_k(p)}{f_{q-1}(p)}, \quad k = 1, 2, \dots, q + 1$$

je Sturmovou posloupností pro polynom $f_1^*(p)$, který má stejné kořeny jako původní polynom $f(p)$, ale každý pouze jednoduchý. Tím je případ násobných kořenů převeden na případ kořenů jednoduchých.

2. K ověření aperiodické stability lze použít i všech algebraických kritérií, uvedených dříve, použijeme-li následující věty:

Věta. *K tomu, aby polynom*

$$f(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^{n-i},$$

$$a_i > 0 \text{ reálné,}$$

měl všechny kořeny reálné různé, je nutné a stačí, aby všechny kořeny polynomu

$$F(p) = f(p^2) + p f'(p^2)$$

měly zápornou reálnou část [13].

Má-li polynom $f(p)$ násobné kořeny, má $F(p)$ kořeny na imaginární ose a obvyklá kritéria stability úlohu neřeší. I v tomto případě je třeba nalézt největší společný dělitel polynomů $f(p)$ a $f'(p)$. Vydělíme-li tímto společným dělitelem polynom $f(p)$, dostaneme polynom $f_1^*(p)$, definovaný již dříve vztahem (1.250), jehož aperiodicitu můžeme kontrolovat bez obtíží. K výpočtu největšího společného dělitele se používá Euklidova algoritmu, který je až na znaménka shodný s algoritmem výpočtu Sturmových funkcí. Proto jsou při násobných kořenech oba postupy stejně pracné. Pro charakteristický polynom s jednoduchými kořeny je nejrychlejší užití uvedené věty a kontrola stability Routhovým algoritmem.

2. PRVNÍ LJAPUNOVOVA METODA

2.1 Základní definice stability řešení diferenciálních rovnic

V předchozí části byla stabilita řešení diferenciálních rovnic zkoumána v případech, kdy problém stability bylo možné převést na otázku rozložení kořenů algebraického polynomu v Gaussově rovině. Poměrná jednoduchost třídy funkcí, v níž ležela všechna řešení, nám také umožnila snadnou klasifikaci „stabilních“ a „nestabilních“ řešení tak, aby to odpovídalo intuitivní představě o stabilitě. V obecném případě je však nutné vyslovit definici stability nezávislou na specifických vlastnostech určité třídy funkcí (např. exponenciálních).

Budeme uvažovat řešení soustavy

$$(2.1) \quad \dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n; \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt})$$

vycházející z počátečních podmínek

$$(2.2) \quad x_i(t_0) = x_{0i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Níže budeme často používat vektorového zápisu, takže právě uvedené vztahy (2.1) a (2.2) přejdeme na tvar

$$(2.1') \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)),$$

$$(2.2') \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Tučně vytištěná písmena zde znamenají sloupcové vektory. Normou vektoru

$$(2.3) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

rozumíme v dalším, pokud nebude výslovně uvedeno něco jiného, tuto normu:

$$(2.4) \quad \|\mathbf{x}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$



V níže uvedených definicích stability (definice 2.1 až 2.5) budeme předpokládat, že funkce $f_i(t, \mathbf{x})$ jsou spojité a mají spojité derivace podle proměnných x_j ($i, j = 1, \dots, n$) v množině

$$(2.5) \quad M = I_t \times D_x,$$

kde

$$(2.6) \quad I_t = (\tau, +\infty)$$

a D_x je (otevřená) oblast v n -rozměrném Eukleidovském prostoru E_n . Navíc budeme předpokládat, že počáteční úloha (2.1'), (2.2') má jediné řešení, které leží celé v D_x pro $t \in I_t$, samozřejmě pokud $\mathbf{x}_0 \in D_x$.

Definice 2.1. Řešení $\mathbf{x}(t)$ vektorové diferenciální rovnice (2.1') při počáteční podmínce (2.2') se nazývá *stabilní v Ljapunovově smyslu*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ a $t_0 \in I_t$ existuje $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ takové, že:

1. všechna řešení $\mathbf{y}(t)$ rovnice (2.1'), která vyhovují podmínce

$$(2.7) \quad \|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}_0\| < \delta$$

existují pro $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ a leží v oblasti D_x ;

2. tato řešení splňují pro $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ nerovnost

$$(2.8) \quad \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon.$$

Tato stabilita tedy znamená, že každé řešení, jež je v čase t_0 dostatečně blízké bodu (2.2'), se ani v dalším průběhu (pro $t > t_0$) příliš neodchýlí od $\mathbf{x}(t)$ a že za cenu „zpřesnění“ počáteční podmínky můžeme libovolně snižovat horní mez této odchylky.

Poznámka. Někdy je výhodné uvažovat místo intervalu (2.6) interval $(-\infty, +\infty)$ a požadovat splnění nerovnosti (2.8) pro všechna reálná t . V tomto případě mluvíme o *stabilitě v Dirichletově smyslu*. Jestliže v definici (2.1) požadavek (2.8) nahradíme slabším požadavkem

$$|y_i(t) - x_i(t)| < \varepsilon$$

pro

$$(2.9) \quad i = i_1, \dots, i_k,$$

kde indexy (2.9) tvoří podmnožinu indexů $\{1, \dots, n\}$, mluvíme o *stabilitě v Routhově smyslu*. Tato stabilita má smysl např. tehdy, kdy nás zajímají pouze určité fázové souřadnice sledovaného děje. V dalším se však stabilitou v Dirichletově ani v Routhově smyslu nebudeme zabývat.

Definice 2.2. Řešení $\mathbf{x}(t)$ soustavy (2.1') s počáteční podmínkou (2.2') se nazývá *asymptoticky stabilní* pro $t \rightarrow +\infty$, jestliže:

1. $\mathbf{x}(t)$ je stabilní v Ljapunovově smyslu;
2. ke každému $t_0 \in I_t$ existuje $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ takové, že každé řešení $\mathbf{y}(t)$, pro které

$$\|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}_0\| < \Delta,$$

splňuje vztah

$$(2.10) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0.$$

Asymptotická stabilita je tedy silnější požadavek než stabilita v Ljapunovově smyslu; poznamenejme, že u lineárních soustav, uvažovaných v první kapitole, šlo zpravidla o asymptotickou stabilitu.

Definice 2.3. Řešení soustavy (2.1'), (2.2'), které není stabilní v Ljapunovově smyslu (resp. asymptoticky stabilní), nazývá se *nestabilní* v Ljapunovově smyslu (resp. asymptoticky nestabilní).

Analogicky chápeme nestabilitu ve smyslu Dirichleta, Routha apod. jako opak stability. V rámci tohoto názvosloví je tedy indiferentní poloha v mechanice (hmotná koule na vodorovné desce) také nestabilní.

Definice 2.4. Necht funkce $f(t, \mathbf{x})$ je definována pro $t \in I_t$, $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}: \|\mathbf{x}\| < \infty\}$.^{*} Jestliže řešení $\mathbf{x}(t)$ úlohy (2.1'), (2.2') je asymptoticky stabilní a všechna řešení $\mathbf{y}(t)$ rovnice (2.1') s libovolnou počáteční podmínkou $\mathbf{y}(t_0)$, $t_0 \in I_t$, splňují vztah (2.10), říkáme, že řešení $\mathbf{x}(t)$ je *globálně asymptoticky stabilní*.

Nakonec si ještě všimněme prakticky nejčastějšího případu, kdy poruchy působí nejen na počátku (pro $t = t_0$), ale po celou dobu trvání procesu.

Uvažujme soustavu, popsanou vektorovou diferenciální rovnicí

$$(2.11) \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}) + \mathbf{r}(t, \mathbf{z})$$

s počáteční podmínkou

$$(2.12) \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0,$$

a předpokládejme, že funkce $\mathbf{r}(t, \mathbf{z})$ je spojitá v t a má spojitě první parciální derivace podle z_1, \dots, z_n spolu s $\mathbf{f}(t, \mathbf{z})$ v množině (2.5).

Definice 2.5. Řešení $\mathbf{x}(t)$ soustavy (2.1'), (2.2') se nazývá *stabilní vzhledem k poruše* $\mathbf{r}(t, \mathbf{x})$, jestliže ke každému $t_0 \in I_t$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ takové, že pro $\|\mathbf{r}(t, \mathbf{z})\| < \delta$ všechna řešení soustavy (2.11), (2.12), pro něž $\|\mathbf{z}_0 - \mathbf{x}_0\| < \delta$ existují na intervalu $\langle t_0, +\infty \rangle$, leží v oblasti D_x a splňují pro všechna $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ nerovnost

$$(2.13) \quad \|\mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon.$$

Později (ve třetí kapitole) ukážeme, že v řadě případů pro stabilitu při stále půso-

^{*} Symbolem $\{x: V(x)\}$ značíme množinu všech prvků x , jež mají vlastnost $V(x)$, např. $\langle a, b \rangle = \{x: a \leq x \leq b\}$.

bíci poruše (podle definice 2.5) stačí zaručit stabilitu v Ljapunovově smyslu. Proto se budeme nejprve zabývat pojetím stability ve smyslu definice 2.1 a 2.2.

2.2 Charakteristický exponent

V této kapitole budou vyloženy zejména podmínky stability lineárních soustav s proměnnými koeficienty, přičemž zde vyložené metody budou odlišné od metod, uvedených v první kapitole. Základním pojmem, jehož využití zde chceme demonstrovat, je A. M. Ljapunovem zavedený charakteristický exponent funkce.

Definice 2.6. *Charakteristickým exponentem* komplexní funkce $f(t)$ reálné proměnné t nazýváme číslo

$$(2.14) \quad \chi(f) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)|.$$

K objasnění tohoto pojmu, kterým charakterizujeme rychlost růstu funkce, stačí si uvědomit toto: Modul dané funkce můžeme vyjádřit ve tvaru

$$(2.15) \quad |f(t)| = e^{\alpha(t) \cdot t},$$

přičemž

$$(2.16) \quad \alpha(t) = \frac{1}{t} \ln |f(t)|.$$

Asymptotické chování této funkce $\alpha(t)$ pro $t \rightarrow +\infty$ je vyjádřeno právě výrazem (2.14). Zřejmě je pro reálné α

$$\chi(e^{\alpha t}) = \alpha.$$

Odvodíme nyní řadu základních vlastností charakteristického exponentu.

Lemma 2.1. *Nechť pro $m > 0$ a pro $t > t_0$ je*

$$|f(t)| \leq t^m.$$

Potom

$$\chi(f(t)) = 0.$$

Důkaz. Tvzení je přímým důsledkem vzorce (2.14).

Lemma 2.2. *Nechť $\varphi(t)$ je komplexní funkce, definovaná pro všechna $t > t_0$ a omezená,*

$$|\varphi(t)| \leq C.$$

Potom

$$\chi(e^{t \cdot \varphi(t)}) \leq C.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme elementární nerovnost

$$(2.17) \quad |e^z| \leq e^{|z|}$$

pro komplexní z . Skutečně, postupně je

$$|e^z| = |e^{z \cdot (\cos \xi + j \sin \xi)}| = |e^{z \cdot \cos \xi}| \cdot |e^{jz \cdot \sin \xi}| = e^{|z| \cos \xi} \cdot 1 \leq e^{|z|}.$$

Je tedy pro $t > \max(0, t_0)$

$$\frac{1}{t} \ln |e^{t \cdot \varphi(t)}| \leq \frac{1}{t} \ln e^{t|\varphi(t)|} \leq \ln e^c = C;$$

použili jsme zde toho, že logaritmus je rostoucí funkce. Odtud plyne okamžitě tvrzení lemmatu.

Lemma 2.3. *Nechť pro $t > t_0$ jsou definovány funkce $f(t)$, $g(t)$ a nechť pro tato t splňují nerovnost*

$$|f(t)| \leq |g(t)|.$$

Potom je

$$\chi(f) \leq \chi(g).$$

Důkaz. Tvrzení plyne ze vztorce (2.14), neboť logaritmus je rostoucí funkce reálné proměnné.

Lemma 2.4. *Nechť funkce $f(t)$ je definována pro $t > t_0$ a nechť c je komplexní číslo různé od nuly.*

Potom

$$\chi(|f|) = \chi(f)$$

a

$$\chi(cf) = \chi(f).$$

Důkaz. Prvé tvrzení plyne okamžitě z vztorce (2.14). Druhé tvrzení dokážeme postupným upravením výrazu (2.14) pro funkci $c \cdot f(t)$:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |cf(t)| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \ln |c| + \frac{1}{t} \ln |f(t)| \right) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \ln |f(t)| \right),$$

Q. E. D.

O tom, jak charakteristický exponent vystihuje asymptotické chování funkce, dokážeme ještě toto

Lemma 2.5. *Nechť $f(t)$ je definována pro $t > t_0$ a nechť její charakteristický exponent je konečný:*

$$(2.18) \quad \chi(f) = \alpha.$$

Potom pro každé $\varepsilon > 0$ platí tyto vztahy:

$$(2.19) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{(\alpha+\varepsilon)t}} = 0,$$

$$(2.20) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t}} = +\infty.$$

Jestliže naopak pro nějaké α platí pro funkci $f(t)$ rovnost (2.19) potom

$$(2.21) \quad \chi(f) \leq \alpha;$$

jestliže platí rovnost (2.20), potom

$$(2.22) \quad \chi(f) \geq \alpha.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme implikaci (2.18) \Rightarrow (2.19), (2.20). Zvolme číslo η , $0 < \eta < \varepsilon$. Z definice charakteristického exponentu je zřejmé, že pro dosti velká t ,

$$t > T_\eta,$$

je

$$\frac{1}{t} \ln |f(t)| < \alpha + \eta,$$

neboli

$$|f(t)| < e^{(\alpha+\eta)t}.$$

Je tedy pro $t > T_\eta$

$$\frac{|f(t)|}{e^{(\alpha+\varepsilon)t}} < e^{(\eta-\varepsilon)t};$$

protože $\eta - \varepsilon < 0$, konverguje pravá strana poslední nerovnosti k nule pro $t \rightarrow +\infty$, odtud plyne rovnost (2.19).

Z druhé strany vzhledem k definici charakteristického exponentu jakožto limes superior existuje nutně rostoucí posloupnost čísel $\{t_k\}$, $t_k \rightarrow +\infty$ taková, že pro $k > K_\eta$ je

$$|f(t_k)| > e^{(\alpha-\eta)t_k},$$

takže

$$\frac{|f(t_k)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t_k}} > e^{(\varepsilon-\eta)t_k};$$

protože $\varepsilon - \eta > 0$, konverguje pro $k \rightarrow +\infty$ (a tedy pro $t_k \rightarrow +\infty$) pravá strana k $+\infty$; odtud plyne vzorec (2.20).

Dokážeme ještě implikace (2.19) \Rightarrow (2.21) a (2.20) \Rightarrow (2.22). Z rovnosti (2.19) plyne okamžitě pro dostatečně velká t

$$\frac{1}{t} \ln |f(t)| < \frac{1}{t} \ln e^{(\alpha+\varepsilon)t} = \alpha + \varepsilon,$$

přechodem k $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ je

$$\chi(f) \leq \alpha + \varepsilon$$

a vzhledem k libovolnosti volby ε platí nerovnost (2.21). Podobně z rovnosti (2.20) vyplývá existence rostoucí shora neomezené posloupnosti $\{t_k\}$, $t_k \rightarrow +\infty$, takové, že

$$|f(t_k)| > e^{(\alpha - \varepsilon)t_k},$$

takže

$$\frac{1}{t_k} \ln |f(t_k)| > \alpha - \varepsilon,$$

odtud přechodem k limitě pro $k \rightarrow +\infty$ a vzhledem k libovolné volbě $\varepsilon > 0$ dostáváme okamžitě nerovnost (2.22), Q. E. D.

Ukážeme ještě, jaké vlastnosti má charakteristický exponent vzhledem k některým algebraickým a analytickým operacím.

Lemma 2.6. *Pro charakteristický exponent součtu konečného počtu funkcí $f_k(t)$, definovaných pro $t > t_0$, platí nerovnost*

$$(2.23) \quad \chi\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) \leq \max_{1 \leq k \leq n} \chi(f_k).$$

Jestliže všechny charakteristické exponenty jsou konečné a jestliže existuje index p , $1 \leq p \leq n$, takový, že

$$\chi(f_p) > \chi(f_k), \quad k \neq p, \quad 1 \leq k \leq n,$$

potom

$$(2.24) \quad \chi\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) = \chi(f_p).$$

Důkaz. K důkazu využijeme lemmatu 2.5. Označme

$$\max_{1 \leq k \leq n} \chi(f_k) = \alpha.$$

Podle lemmatu 2.5 je tedy pro každé $\varepsilon > 0$ (a zřejmě pro všechna $k = 1, \dots, n$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f_k(t)|}{e^{(\alpha + \varepsilon)t}} = 0$$

a tedy také

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n |f_k(t)|}{e^{(\alpha + \varepsilon)t}} = 0.$$

Podle známé nerovnosti pro absolutní hodnotu součtu také

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\sum_{k=1}^n f_k(t)|}{e^{(\alpha+\varepsilon)t}} = 0$$

a podle druhého tvrzení lemmatu 2.5 (implikace (2.19) \Rightarrow (2.21)) platí nerovnost (2.23).

Nechť nyní

$$\chi(f_p) = \alpha$$

a pro ostatní $k \neq p$ necht'

$$\chi(f_k) = \alpha_k < \alpha.$$

Podle lemmatu 2.5 existuje rostoucí posloupnost $\{t_q\}$,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} t_q = +\infty,$$

taková, že pro dané $\varepsilon > 0$ je

$$(2.25) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{|f_p(t_q)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t_q}} = +\infty.$$

Zřejmě platí tato nerovnost

$$(2.26) \quad \frac{|\sum_{k=1}^n f_k(t_q)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t_q}} \geq \frac{|f_p(t_q)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t_q}} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^n \frac{|f_k(t_q)|}{e^{(\alpha_k+\varepsilon)t_q}} \cdot \frac{1}{e^{(\alpha-\alpha_k-2\varepsilon)t_q}}.$$

Pro dostatečně malé ε je

$$\alpha - \alpha_k - 2\varepsilon > 0;$$

vzhledem k rovnosti (2.19) z lemmatu 2.5 konverguje tedy součet v pravé části nerovnosti (2.26) k nule, takže z (2.25) a (2.26) vyplývá

$$\lim_{t_q \rightarrow \infty} \frac{|\sum_{k=1}^n f_k(t_q)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t_q}} = +\infty.$$

Je tedy (opět podle lemmatu 2.5)

$$\chi\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) \geq \alpha;$$

podle již dokázané nerovnosti (2.23) odtud okamžitě vyplývá rovnost (2.24), Q. E. D.

Lemma 2.7. *Pro charakteristický exponent součiny konečného počtu funkcí $f_k(t)$, definovaných pro $t > t_0$, pokud mezi charakteristickými exponenty jednotlivých funkcí nejsou zároveň rovné $+\infty$ a $-\infty$, platí nerovnost*

$$(2.27) \quad \chi\left(\prod_{k=1}^n f_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \chi(f_k).$$

Důkaz. Nejprve dokážeme tuto nerovnost pro limes superior:

$$(2.28) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} (a(t) + b(t)) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) + \limsup_{t \rightarrow \infty} b(t).$$

Skutečně, pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ lze najít T_ε takové, že pro všechna $t > T_\varepsilon$ je

$$a(t) < \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) + \varepsilon$$

a zároveň

$$b(t) < \limsup_{t \rightarrow \infty} b(t) + \varepsilon.$$

Je tedy pro $t > T_\varepsilon$

$$a(t) + b(t) < \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) + \limsup_{t \rightarrow \infty} b(t)$$

a odtud okamžitě vyplývá nerovnost (2.28). Poznamenejme, že podobná nerovnost platí nejen pro $t \rightarrow +\infty$, ale i pro $t \rightarrow T \neq \pm\infty$. Indukcí lze snadno rozšířit nerovnost (2.28) na konečný počet n sčítanců.

Dokazovaná nerovnost (2.27) je nyní již snadným důsledkem vzorce (2.14); je totiž

$$\begin{aligned} \chi\left(\prod_{k=1}^n f_k\right) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \prod_{k=1}^n f_k(t) \right| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{t} \ln |f_k(t)| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f_k(t)| = \sum_{k=1}^n \chi(f_k). \end{aligned}$$

Q. E. D.

Lemma 2.8. *Nechť funkce $f_k(t)$ a $c_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, jsou definovány pro $t > t_0$ a nechť přitom funkce $c_k(t)$ jsou omezené. Potom pro charakteristický exponent lineární kombinace platí nerovnost*

$$(2.29) \quad \chi\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k\right) \leq \max_{1 \leq k \leq n} \chi(f_k).$$

Důkaz. Podle lemmat 2.6. a 2.7. je postupně

$$\chi\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k\right) \leq \max_{1 \leq k \leq n} \chi(c_k f_k) \leq \max_{1 \leq k \leq n} [\chi(c_k) + \chi(f_k)].$$

Avšak poslední výraz není větší než výraz na pravé straně nerovnosti (2.29), neboť, jak ukážeme, je

$$\chi(c_k) \leq 0.$$

Skutečně, podle vzorce (2.14) je

$$\chi(c_k) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |c_k(t)|$$

a stačí si již jen uvědomit, že z omezenosti funkce $c_k(t)$ vyplývá nerovnost

$$-\infty \leq \ln |c_k(t)| < \text{konst.}$$

Tím je lemma dokázáno.

Poznamenejme, že pokud jsou c_k konstantní a pokud existuje index p takový, že $\chi(f_p) > \chi(f_k)$ pro všechna $k \neq p$, $1 \leq k \leq n$, lze užitím lemmat 2.4, 2.6, a 2.7 dokázat obdobně rovnost

$$(2.30) \quad \chi\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k\right) = \chi(f_p).$$

Poznámka. Všimněme si ještě funkcí, u nichž existuje konečná limita

$$(2.31) \quad X(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)|.$$

Číslo $X(f)$ je v tomto případě samozřejmě rovné charakteristickému exponentu $\chi(f)$; budeme je nazývat *přesným charakteristickým exponentem*. Pro přesný charakteristický exponent $X(f)$ platí (po zřejmé úpravě formulace předpokladů) dosud dokázaná lemmata 2.1. až 2.8. V případě lemmatu 2.7. platí ovšem místo nerovnosti (2.27) rovnost

$$(2.32) \quad X\left(\prod_{k=1}^n f_k\right) = \sum_{k=1}^n X(f_k),$$

neboť v důkazu místo nerovnosti (2.28) užijeme poučky o limitě součtu.

V dalším ukážeme ještě souvislost charakteristického exponentu a primitivní funkce. K tomu cíli vybereme z nekonečné množiny primitivních funkcí jedinou podle této definice:

Definice 2.7. Nechť funkce $f(t)$ je definována a má konečný Newtonův integrál pro $t \geq t_0$; *primitivní funkcí* k $f(t)$ v *Ljapunovově smyslu* nazveme funkci $F(t)$, danou předpisem:

$$(2.33) \quad F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \quad \text{pro } \chi(f) \geq 0,$$

$$(2.34) \quad F(t) = \int_t^{+\infty} f(\tau) \, d\tau \quad \text{pro } \chi(f) < 0.$$

Lemma 2.9. *Charakteristický exponent funkce primitivní v Ljapunovově smyslu není větší než charakteristický exponent příslušné podintegrální funkce.*

Důkaz. Nechť nejprve charakteristický exponent

$$\chi(f) = \alpha$$

je konečný. Podle lemmat u 2.5 platí pro každé $\varepsilon > 0$ vztah (2.19); existuje tedy konstanta K taková, že

$$|f(t)| \leq K \cdot e^{(\alpha+\varepsilon)t}$$

pro všechna $t \geq t_0$.

Nechť $\alpha \geq 0$, potom v soulase s definicí 2.7 je

$$|F(t)| = \left| \int_0^t f(\tau) \, d\tau \right| \leq K \int_{t_0}^t e^{(\alpha+\varepsilon)\tau} \, d\tau < \frac{K}{\alpha + \varepsilon} e^{(\alpha+\varepsilon)t}.$$

Podle lemmat 2.3 a 2.4 je

$$\chi(F) \leq \alpha + \varepsilon;$$

protože však $\varepsilon > 0$ je libovolně malé, je též

$$\chi(F) \leq \alpha.$$

Nechť $\alpha < 0$, potom pro $0 < \varepsilon < |\alpha|$ je

$$|F(t)| = \left| \int_t^{+\infty} f(\tau) \, d\tau \right| \leq K \int_t^{+\infty} e^{(\alpha+\varepsilon)\tau} \, d\tau = \frac{K}{|\alpha + \varepsilon|} e^{(\alpha+\varepsilon)t}$$

a analogicky jako v předchozím případě dostáváme

$$\chi(F) \leq \alpha.$$

Je-li

$$\chi(f) = +\infty,$$

lemma zřejmě platí. Nechť nakonec je

$$\chi(f) = -\infty,$$

potom

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)| = -\infty,$$

0, 1, 10, 20

22 07 2011

tzn. pro všechna $t > T_K$ je

$$\frac{1}{t} \ln |f(t)| < K < 0,$$

neboli

$$|f(t)| < e^{Kt}.$$

Je tedy

$$\left| \int_t^{+\infty} f(\tau) d\tau \right| \leq \int_t^{+\infty} |f(\tau)| d\tau < \frac{1}{|K|} e^{Kt},$$

takže pro všechna (záporná) K platí nerovnost

$$\chi(F) < K$$

a odtud okamžitě plyne dokazované tvrzení.

Při vyšetřování lineárních soustav diferenciálních rovnic je výhodné vyjádřit řešení v maticovém tvaru. Proto rozšíříme ještě pojem charakteristického exponentu na funkční matice:

Definice 2.8. Charakteristickým exponentem matice funkcí definovaných pro $t \geq t_0$

$$(2.35) \quad \mathbf{F}(t) = (f_{ij}(t))_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$$

nazveme číslo (resp. symbol $+\infty$ nebo $-\infty$)

$$(2.36) \quad \chi(\mathbf{F}) = \max_{i,j} [\chi(f_{ij})].$$

V maticovém počtu se zavádí pojem normy matice; připomeňme zde tři obvyklé definiční vztahy pro normu matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$:

$$(2.37) \quad \|\mathbf{A}\|_I = \max_i \sum_j |a_{ij}|,$$

$$(2.38) \quad \|\mathbf{A}\|_{II} = \max_j \sum_i |a_{ij}|,$$

$$(2.39) \quad \|\mathbf{A}\|_{III} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}.$$

Dokážeme toto

Lemma 2.10. Charakteristický exponent matice funkcí $\mathbf{F}(t)$ je roven charakteristickému exponentu její normy a to pro libovolnou z norem (2.37)–(2.39).

Důkaz. Je vidět, že pro libovolnou z norem (2.37)–(2.39) platí

$$|f_{ij}(t)| \leq \|\mathbf{F}(t)\|.$$

Zde i v dalším textu symbolem $\|\mathbf{F}(t)\|$ označujeme některou z norem (2.37)–(2.39), indexu I–III uijeme jen tehdy, když je třeba specifikovat, pro kterou konkrétní normu jsme se rozhodli.

Podle lemmatu 2.3 je tedy

$$\chi|f_{ij}| \leq \chi(\|\mathbf{F}\|)$$

a podle definice 2.8 také

$$\chi(\mathbf{F}) \leq \chi(\|\mathbf{F}\|).$$

K důkazu opačné nerovnosti uijeme lemmatu 2.6. Je totiž pro kteroukoliv z výše definovaných norem matice

$$\|\mathbf{F}(t)\| \leq \sum_i \sum_j |f_{ij}(t)|,$$

takže

$$\chi(\|\mathbf{F}\|) \leq \max_{i,j} (\chi|f_{ij}|) = \chi(\mathbf{F}),$$

Q.E.D.

Obdobou lemmatu 2.6 pro matice je

Lemma 2.11. *Pro charakteristický exponent součtu konečného počtu matic $\mathbf{F}_k(t)$ stejného typu, definovaných pro $t \geq t_0$, platí nerovnost*

$$(2.40) \quad \chi\left(\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k\right) \leq \max_{k=1, \dots, N} [\chi(\mathbf{F}_k)].$$

Jestliže všechny charakteristické exponenty jsou konečné a jestliže existuje index p , $1 \leq p \leq N$, takový, že

$$\chi(\mathbf{F}_p) > \chi(\mathbf{F}_k) \quad \text{pro } k \neq p, 1 \leq k \leq N,$$

potom

$$(2.41) \quad \chi\left(\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k\right) = \chi(\mathbf{F}_p).$$

Důkaz. Nerovnost (2.40) odvodíme postupně takto:

$$\chi\left(\sum_k \mathbf{F}_k\right) = \chi(\|\sum_k \mathbf{F}_k\|) \leq \chi(\sum_k \|\mathbf{F}_k\|) = \max_k \chi(\|\mathbf{F}_k\|) = \max_k \chi(\mathbf{F}_k).$$

Nechť je dále pro $p \neq k$, $1 \leq k \leq N$,

$$\chi(\mathbf{F}_p) > \chi(\mathbf{F}_k).$$

Podle definice 2.8 nutně existuje dvojice indexů s, t taková, že

$$\chi(\mathbf{F}_p) = \chi(f_{p,s,t});$$

index p u $f_{p,s,t}$ značí příslušnost k matici F_p . Podle lemmatu 2.6 je

$$\chi(\sum_k f_{k,s,t}) = \chi(f_{p,s,t})$$

a dále zřejmě

$$\chi(\sum_k F_k) = \max_{i,j} \chi(\sum_k f_{k,i,j}) \geq \chi(\sum_k f_{k,s,t});$$

je tedy

$$\chi(\sum_k F_k) \geq \chi(F_p).$$

Vzhledem k nerovnosti (2.40) je tím dokázána platnost vztahu (2.41), Q.E.D.

Obdobou k lemmatu 2.7 pro matice je

Lemma 2.12. *Pro charakteristický exponent součiny konečného počtu matic $F_k(t)$, definovaných pro $t \geq t_0$, pokud mezi charakteristickými exponenty jednoilivých matic nejsou zároveň rovné $+\infty$ a $-\infty$, platí nerovnost*

$$(2.42) \quad \chi(F_1 \dots F_N) \leq \sum_{k=1}^N \chi(F_k)$$

Důkaz. K důkazu využijeme výše dokázanou souvislost normy matice a charakteristického exponentu; nejprve připomeňme známou vlastnost normy

$$\|F_1 \dots F_N\| \leq \prod_{k=1}^N \|F_k\|,$$

dále je postupně s užitím lemmat 2.3, 2.7 a 2.10

$$\chi(F_1 \dots F_N) = \chi(\|F_1 \dots F_N\|) \leq \chi(\prod_{k=1}^N \|F_k\|) \leq \sum_{k=1}^N \chi(\|F_k\|) = \sum_{k=1}^N \chi(F_k),$$

Q.E.D.

Z lemmat 2.4, 2.11 a 2.12 okamžitě vyplývá následující

Lemma 2.13. *Nechť pro $k = 1, \dots, M$ jsou $c_k \neq 0$ komplexní čísla a $F_k(t)$ matice navzájem téhož typu, definované pro $t \geq t_0$, jejichž charakteristické exponenty jsou vesměs konečné. Potom platí nerovnost*

$$(2.43) \quad \chi(\sum_{k=1}^M c_k F_k) \leq \max_k \chi(F_k).$$

Pokud má maximální charakteristický exponent právě jedna z matic $F_k(t)$, nastává ve vztahu (2.43) rovnost.

Poznámka. Pokud mezi charakteristickými exponenty matic $F_k(t)$ jsou symboly $+\infty$ nebo $-\infty$, je třeba vhodným způsobem upravit formulaci tvrzení lemmatu, neboť pak např. pro reálné koeficienty hrají roli znaménka koeficientů u těchto matic. Detailnější analýzu těchto případů lze přenechat čtenáři.

2.3. Asymptotické vlastnosti řešení lineárních soustav s proměnnými koeficienty

Budeme uvažovat homogenní lineární vektorovou diferenciální rovnici (neboli homogenní lineární systém diferenciálních rovnic) tvaru

$$(2.44) \quad \frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x(t),$$

kde jednotlivé prvky matice

$$(2.45) \quad A(t) = (a_{ij}(t))$$

jsou spojité funkce na intervalu $(a, +\infty)$. Níže uvedeme větu o charakteristických exponentech řešení soustavy (2.44), nalezenou A. M. Ljapunovem, dříve však odvodíme dvě integrální nerovnosti, které budeme v důkazu potřebovat.

Lemma 2.14. (R. Bellman, T. H. Grownall). *Nechť $f(t)$, $g(t)$ jsou nezáporné spojité funkce na intervalu $\langle t_0, +\infty \rangle$, C necht' je nezáporná konstanta. Jestliže pro $t \geq t_0$ platí nerovnost*

$$(2.46) \quad f(t) \leq C + \int_{t_0}^t f(\tau)g(\tau) d\tau,$$

potom také pro $t \geq t_0$ je

$$(2.47) \quad f(t) \leq C \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau\right).$$

Důkaz. Necht' nejprve $C > 0$. Potom je kladná také pravá strana nerovnosti (2.46) a z této nerovnosti vyplývá (pro $t \geq t_0$)

$$\frac{f(t)g(t)}{C + \int_{t_0}^t f(\tau)g(\tau) d\tau} \leq g(t);$$

integrací v mezích t_0, t odtud obdržíme nerovnost

$$\ln \left[C + \int_{t_0}^t (f\tau) g(\tau) d\tau \right] - \ln C \leq \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau,$$

ekvivalentní dokazované nerovnosti (2.47).

Necht' $C = 0$. Jestliže v tomto případě je pravá strana v (2.46) identicky rovna nule, je nutně $f(t) \equiv 0$ a (2.47) platí. Necht' tedy existují t , pro něž

$$(2.48) \quad \int_{t_0}^t f\tau(\tau) g(\tau) d\tau \neq 0;$$

označme infimum těchto t jako $t_1 \geq t_0$. Vzhledem k spojitosti a nezápornosti funkcí f a g platí potom nerovnost (2.48) pro všechna $t > t_1$ a její levá strana je rovna 0 pro všechna $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$. Pro $t > t_1$ je tedy

$$\frac{f(t)g(t)}{\int_{t_0}^t f(\tau)g(\tau) d\tau} \leq g(t);$$

integraci v mezích t_2, t_1 , kde $t_2 > t_1$, obdržíme

$$\ln \left[\int_{t_0}^{t_1} f(\tau)g(\tau) d\tau \right] \leq \ln \left[\int_{t_0}^{t_2} f(\tau)g(\tau) d\tau \right] + \int_{t_2}^{t_1} g(\tau) d\tau.$$

Protože pro $t_2 \rightarrow t_1$ nabývá pravá strana poslední nerovnosti záporných v absolutní hodnotě libovolně velkých hodnot, je nutně

$$\int_{t_0}^{t_1} f(\tau)g(\tau) d\tau = 0,$$

což je ve sporu s nerovností (2.48). Je tedy (vzhledem k (2.46)) $f(t) \equiv 0$ a nerovnost (2.47) platí, Q.E.D.

Lemma 2.15. (R. Bellman, T. H. Gronwall). *Nechť $f(t)$ je kladná a $g(t)$ nezáporná funkce na intervalu (a, b) , necht' obě funkce jsou na (a, b) spojitě a pro libovolná $t_1, t_2 \in (a, b)$ necht' platí*

$$(2.49) \quad f(t_2) \leq f(t_1) + \left| \int_{t_1}^{t_2} f(\tau)g(\tau) d\tau \right|.$$

Potom pro $a < t_0 \leq t < b$ je splněna nerovnost

$$(2.50) \quad f(t_0) \exp \left[- \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \right] \leq f(t) \leq f(t_0) \exp \left[\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \right].$$

Důkaz. Necht' je $t_1 \leq t_2$, potom nerovnost (2.49) lze přepsat

$$f(t_2) \leq f(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(\tau)g(\tau) d\tau$$

a podle lemmatu 2.14 je

$$(2.51) \quad f(t_2) \leq f(t_1) \exp \left[\int_{t_1}^{t_2} g(\tau) d\tau \right].$$

Nechť je $t_1 \geq t_2$, potom nerovnost (2.49) lze přepsat

$$(2.52) \quad f(t_2) \leq f(t_1) + \int_{t_2}^{t_1} f(\tau) g(\tau) d\tau,$$

kde pravá strana je kladné číslo, neboť $f(t) > 0$ a $g(\tau) \geq 0$. Platí tedy také nerovnost

$$\frac{-f(t_2) g(t_2)}{f(t_1) + \int_{t_2}^{t_1} f(\tau) g(\tau) d\tau} \geq -g(t_2)$$

pro libovolné $t_2 \in (a, b)$; $t_2 \leq t_1$. Integrací poslední nerovnosti dostáváme

$$\ln f(t_1) - \ln \left[f(t_1) + \int_{t_2}^{t_1} f(\tau) g(\tau) d\tau \right] \geq - \int_{t_2}^{t_1} g(\tau) d\tau,$$

a po úpravě

$$f(t_1) + \int_{t_2}^{t_1} f(\tau) g(\tau) d\tau \leq f(t_1) \exp \left[\int_{t_2}^{t_1} g(\tau) d\tau \right].$$

Odtud vzhledem k nerovnosti (2.52) je

$$(2.53) \quad f(t_1) \geq f(t_2) \exp \left[- \int_{t_2}^{t_1} g(\tau) d\tau \right].$$

Jestliže v nerovnosti (2.51) položíme $t_1 = t_0$, $t_2 = t$ a v nerovnosti (2.53) $t_2 = t_0$, $t_1 = t$, dostáváme okamžitě nerovnost (2.50), Q.E.D.

Nyní přejdeme k vyšetřování stability soustav popsaných rovnicí (2.44). Přitom charakteristické exponenty budou hrát v jistém smyslu obdobnou roli, jako kořeny charakteristické rovnice u soustav s konstantními koeficienty. Nejprve ještě odvodíme dvě věty o stabilitě, jež pojmu charakteristického exponentu nevyužívají.

Věta 2.1. *Lineární soustava popsaná rovnicí (2.44) je stabilní v Ljapunovově smyslu na intervalu $\langle t_0, +\infty \rangle$, právě když všechna řešení této rovnice jsou omezené funkce na $\langle t_0, +\infty \rangle$.*

Důkaz. Je-li každé řešení omezené, je také omezená každá fundamentální matice $\mathbf{X}(t)$:

$$\|\mathbf{X}(t)\| \leq K < +\infty.$$

Je tedy pro každé řešení $\mathbf{x}(t)$:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{X}(t)\| \cdot \|\mathbf{x}(t_0)\| \leq K \cdot \|\mathbf{x}(t_0)\|.$$

Volbou dostatečně malých počátečních podmínek lze tedy dosáhnout řešení, jež je v normě menší než předem dané číslo a stabilita je dokázána.

Nechť naopak existuje řešení $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y}(t_0) \neq 0$, které není na $\langle t_0, +\infty \rangle$ omezené. Uvažujme řešení

$$\mathbf{x}(t) = \delta \cdot \frac{\mathbf{y}(t)}{\|\mathbf{y}(t_0)\|}.$$

Toto řešení splňuje počáteční podmínku

$$\mathbf{x}(t_0) = \delta \cdot \mathbf{e}, \quad \|\mathbf{e}\| = 1,$$

jež podle volby $\delta > 0$ je v normě libovolně malá, přičemž $\mathbf{x}(t)$ není omezené. Řešení $\mathbf{z}(t) \equiv 0$ není tedy stabilní a tím je nestabilita pro rovnici (2.44) dokázána.

Zajímavou aplikací Bellmannovy-Gronwallovy nerovnosti (z lemmatu 2.14) je důkaz následující věty o stabilitě soustavy s maticí „málo“ odlišnou od konstantní.

Věta 2.2 (R. Bellman). *Nechť všechna řešení vektorové diferenciální rovnice*

$$(2.54) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$$

s konstantní maticí typu $n \times n$ jsou stabilní v Ljapunovově smyslu, neboli necht všechny kořeny rovnice $\det \mathbf{A} = 0$ mají záporné reálné části. Necht $\mathbf{B}(t)$ je proměnná matice typu $n \times n$, jejíž všechny prvky jsou spojité funkce na intervalu $\langle t_0, +\infty \rangle$ a necht integrál

$$(2.55) \quad \int_{t_0}^{+\infty} \|\mathbf{B}(\tau)\| d\tau < +\infty.$$

Potom všechna řešení rovnice

$$(2.56) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = [\mathbf{A} + \mathbf{B}(t)] \cdot \mathbf{y}(t).$$

jsou stabilní na $\langle t_0, +\infty \rangle$ v Ljapunovově smyslu.

Důkaz. Označme jako $\mathbf{X}_1(t)$ fundamentální maticí rovnice (2.54), pro níž je

$$\mathbf{X}_1(t_0) = \mathbf{E}$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice typu $n \times n$.

Z rovnice (2.56) vyplývá tato integrální rovnice pro $t \geq t_0$:

$$(2.57) \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{X}(t - \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{y}(\tau) d\tau.$$

Pro normu $\mathbf{y}(t)$ platí tedy odhad

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq \|\mathbf{X}(t)\| \|\mathbf{y}(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|\mathbf{X}(t - \tau)\| \|\mathbf{B}(\tau)\| \|\mathbf{y}(\tau)\| d\tau,$$

jelikož všechna řešení rovnice (2.54) jsou stabilní v Ljapunovově smyslu, existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro $t \geq t_0$ je

$$\|\mathbf{X}(t)\| \leq C.$$

To však znamená, že

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq C \|\mathbf{y}(t_0)\| + \int_{t_0}^t C \|\mathbf{B}(\tau)\| \|\mathbf{y}(\tau)\| d\tau,$$

a podle lemmatu 2.14 je

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq C \|\mathbf{y}(t_0)\| \exp \left[\int_{t_0}^t C \cdot \|\mathbf{B}(\tau)\| d\tau \right].$$

Vzhledem k předpokladu (2.55) to znamená, že každé řešení $\mathbf{y}(t)$ je omezené, a podle věty 2.1. odtud vyplývá stabilita, Q.E.D.

Nyní již můžeme přejít k vyšetřování stability s využitím pojmu *charakteristický exponent*.

Věta 2.3 (A. M. Ljapunov). *Jestliže matice (2.45) v rovnici (2.44) je v normě (tzn. v libovolné z norem (2.37)–(2.39)) omezená,*

$$(2.58) \quad \|\mathbf{A}(t)\| \leq C < +\infty,$$

potom každé nenulové řešení $\mathbf{x}(t)$ má konečný charakteristický exponent.

Důkaz. Integrací rovnice (2.44) dostáváme

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau,$$

takže

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|\mathbf{A}(\tau)\| \|\mathbf{x}(\tau)\| d\tau,$$

a podle druhé Bellmanovy-Gronwallovy nerovnosti (lemma 2.15) je pro $t \geq t_0$ i

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \exp \left[- \int_{t_0}^t \|\mathbf{A}(\tau)\| d\tau \right] \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}(t_0)\| \exp \left[\int_{t_0}^t \|\mathbf{A}(\tau)\| d\tau \right].$$

Odtud vyplývá nerovnost pro charakteristické exponenty (užili jsme lemmat 2.3 a 2.4)

$$\chi \left\{ \exp \left[- \int_{t_0}^t \| \mathbf{A}(\tau) \| d\tau \right] \right\} \leq \chi[\mathbf{x}(t)] \leq \chi \left\{ \exp \left[\int_{t_0}^t \| \mathbf{A}(\tau) \| d\tau \right] \right\},$$

a z ní, jak lze snadno nahlédnout, nerovnost

$$|\chi[\mathbf{x}(t)]| \leq C,$$

Q.E.D.

Všimněme si nyní blíže množiny charakteristických exponentů řešení lineární soustavy popsané rovnicí (2.44) s omezenou maticí (2.45). Dokážeme nejprve toto

Lemma 2.16. *Nenulové vektorové funkce $\mathbf{x}_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, definované na intervalu $\langle t_0, +\infty \rangle$, jež mají navzájem různé charakteristické exponenty, jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Lemma dokážeme sporem. Nechť existují konstanty C_i , ne všechny rovné nule, takové, že

$$\sum_{i=1}^m C_i \mathbf{x}_i(t) = 0.$$

Mezi funkcemi, jež mají v tomto součtu nenulový koeficient, najdeme funkci s největším charakteristickým exponentem; nechť je to $\mathbf{x}_p(t)$. Je tedy

$$\mathbf{x}_p(t) = - \frac{1}{C_p} \sum_{i \neq p} C_i \mathbf{x}_i(t),$$

takže z vlastností charakteristického exponentu plyne nerovnost

$$\chi[\mathbf{x}_p(t)] \leq \max_{j \in J} \chi[\mathbf{x}_j(t)],$$

kde množina indexů

$$J = \{j : 1 \leq j \leq m, j \neq p, c_j \neq 0\}.$$

To je však ve sporu s volbou $\mathbf{x}_p(t)$, Q.E.D.

Definice 2.9. Množinu všech konečných charakteristických exponentů řešení soustavy diferenciálních rovnic (obecně nelineárních) nazýváme *spektr*em této soustavy.

Uvažujme nejprve soustavu lineárních rovnic prvního řádu s konstantní maticí

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t).$$

Pro tuto soustavu lze každou složku řešení obecně vyjádřit ve tvaru lineární kombinace

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^m c_{ij} \cdot P_i(t) \cdot e^{\lambda_i t},$$

kde $P_i(t)$ jsou polynomy v t a λ_i jsou charakteristická čísla matice \mathbf{A} , neboli kořeny rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0.$$

Je nejprve

$$\chi[P(t) e^{\lambda t}] = \operatorname{Re} \lambda$$

a charakteristický exponent řešení $\mathbf{x}(t)$ je tedy roven reálné části některého z charakteristických čísel matice \mathbf{A} . Spektrum ve smyslu definice 2.9 je tedy totožné s množinou reálných částí charakteristických čísel matice \mathbf{A} .

Případ, kdy matice (2.45) je proměnná, je popsán v následující větě:

Věta 2.4. *Spektrum soustavy lineárních homogenních diferenciálních rovnic (2.44) řádu n je konečná množina čísel*

$$(2.59) \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m,$$

kde $m \leq n$.

Důkaz. Soustava (2.44) má, jak známo, nejvýš n lineárně nezávislých řešení. Podle lemmatu 2.16 může tedy existovat nejvýše n různých charakteristických exponentů řešení této soustavy, Q.E.D.

Poznamenejme ještě, že u nelineárních soustav může spektrum být rovné např. množině všech reálných čísel, např. rovnice

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} x(t) \ln [x(t)]$$

má obecné řešení

$$x(t) = e^{ct},$$

kde $c \in (-\infty, +\infty)$.

Pro asymptotickou stabilitu řešení soustavy s konstantní maticí bylo nutnou a postačující podmínkou, aby kořeny charakteristické rovnice měly záporné reálné části. Podobně pro soustavu s proměnnou maticí platí tato

Věta 2.5. *Pro asymptotickou stabilitu (v Ljapunovově smyslu) lineární homogenní soustavy popsané vektorovou rovnicí (2.44) stačí, aby její maximální charakteristický exponent byl záporný.*

Důkaz. Nechť maximální prvek spektra matice $\mathbf{A}(t)$ ve smyslu definice 2.9 je $\alpha < 0$. Vzhledem k tomu, že jde o lineární soustavu, stačí dokázat, že pro každé její

řešení platí

$$(2.60) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0.$$

Vezměme číslo β takové, že

$$\alpha < \beta < 0,$$

potom z nerovnosti

$$\chi(\mathbf{x}) < \beta$$

vyplývá

$$\|\mathbf{x}(t)\| = o(e^{\beta t}),$$

takže skutečně platí (2.60), Q.E.D.

Užitím charakteristických exponentů můžeme charakterizovat množinu řešení lineární homogenní soustavy také takto: Nechť

$$(2.61) \quad \{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)\}$$

je fundamentální soustava řešení rovnice (2.44), nechť

$$(2.62) \quad \chi(\mathbf{x}_j) = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

(Poznamenejme pro úplnost, že čísla (2.62) nemusí zde být navzájem různá.)

Označme

$$(2.63) \quad \mathbf{x}_j(t) = e^{\alpha_j t} \cdot \xi_j(t);$$

z předchozího snadno vyplývá, že přitom

$$(2.64) \quad \chi(\xi_j) = 0.$$

Obecné řešení soustavy (2.44) je tedy tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n c_j \xi_j(t) e^{\alpha_j t},$$

kde c_j jsou konstanty, $\xi_j(t) e^{\alpha_j t}$ lineární nezávislá řešení (2.61), α_j jsou prvky spektra matice (2.45) a $\xi_j(t)$ mají vlastnost (2.64).

Nechť nyní všechna čísla (2.62) jsou konečná a nechť n -tice (2.62) je tvořena navzájem různými čísly α_k , $k = 1, \dots, m$, kde samozřejmě $m \leq n$. Nechť v_k je počet řešení v (2.61), jež mají charakteristický exponent α_k . V závislosti na zvolené fundamentální matici (2.61), označme ji zde \mathbf{X} , lze utvořit číslo

$$(2.65) \quad s(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^m v_k \cdot \alpha_k.$$

Poznamenejme, že fundamentální soustavy s minimálním $s(\mathbf{X})$ se nazývají někdy *normální*. Odvodíme nyní dolní odhad čísla (2.65), náležející A. M. Ljapunovovi:

Lemma 2.17. *Nechť je dána soustava (2.44), jejíž spektrum (2.59) obsahuje pouze konečná čísla a nechť $\mathbf{X}(t)$ je její fundamentální matice. Potom číslo (2.65) vyhovuje nerovnosti*

$$(2.66) \quad s(\mathbf{X}) \geq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \text{sp } \mathbf{A}(\tau) \, d\tau,$$

kde symbolem $\text{sp } \mathbf{A}$ značíme stopu matice \mathbf{A} , tzn. součet prvků na hlavní diagonále.

Důkaz. Nechť fundamentální matice soustavy (2.44) je

$$\mathbf{X}(t) = (x_{ij}(t));$$

označme

$$(2.67) \quad W(t) = \det \mathbf{X}(t)$$

příslušný Wronského determinant. Podle pravidla o derivování determinantu máme

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_{11}(t), & \dots, & x_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{dx_{k1}(t)}{dt}, & \dots, & \frac{dx_{kn}(t)}{dt} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t), & \dots, & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Dosadíme-li za derivace pravé strany dif. rovnic v rozepsané soustavě (2.44), dostáváme po snadné úpravě

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl}(t) \delta_{kl} W(t),$$

neboli

$$\frac{dW}{dt} = \text{sp } \mathbf{A}(t) W(t).$$

Integrací poslední rovnice v mezích t_0, t dospíváme k vyjádření

$$(2.68) \quad W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{sp } \mathbf{A}(\tau) \, d\tau.$$

Je tedy podle definice charakteristického exponentu

$$\chi(W(t)) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |W(t)|,$$

neboli s užitím vztahu (2.68)

$$\begin{aligned}\chi(W(t)) &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{sp} \mathbf{A}(\tau) \, d\tau = \\ &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \operatorname{sp} \mathbf{A}(\tau) \, d\tau.\end{aligned}$$

S druhé strany, z definice determinantu a z dříve dokázaných vlastností charakteristického exponentu lineární kombinace funkcí vyplývá nerovnost

$$\chi(W(t)) \leq s(\mathbf{X}),$$

Q.E.D.

Při zkoumání stability řešení homogenních lineárních soustav tvaru (2.44) lze, jak uvidíme níže, v některých případech nalézt lineární transformaci

$$(2.69) \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{L}(t) \mathbf{x}(t),$$

kteřá převádí soustavu (2.44) s maticí $\mathbf{A}(t)$ na soustavu

$$(2.70) \quad \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{B} \mathbf{y}(t)$$

s konstantní maticí. Pokud se při této transformaci nezmění charakteristické exponenty, je možné problém stability soustavy (2.44) převést na případy řešené v první kapitole.

Definice 2.10. Matice $\mathbf{L}(t)$, jejíž prvky mají spojité první derivace na intervalu $\langle t_0, +\infty \rangle$, se nazývá *Ljapunovovou maticí*, jestliže

a) $\sup_{t \in \langle t_0, +\infty \rangle} \|\mathbf{L}(t)\|$ a $\sup_{t \in \langle t_0, +\infty \rangle} \left\| \frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} \right\|$ jsou konečná čísla.

b) $|\det \mathbf{L}(t)| \geq k > 0$ pro všechna $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$.

Odpovídající transformace (2.69) se pak nazývá *Ljapunovovou transformací*.

Lemma 2.18. Transformace (2.69), v níž matice $\mathbf{L}(t)$ je Ljapunovovou maticí ve smyslu definice 2.10, nemění charakteristický exponent, tzn.

$$(2.71) \quad \chi(\mathbf{y}) = \chi(\mathbf{x}).$$

Důkaz. Jelikož

$$\mathbf{L}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} L_{1j}(t) \\ \det \mathbf{L}(t) \end{pmatrix},$$

kde L_{ij} je algebraický doplněk prvku l_{ij} matice \mathbf{L} , vyplývá z vlastností Ljapunovovy matice, že také

$$(2.72) \quad \sup_{t \in (t_0, +\infty)} \|\mathbf{L}^{-1}(t)\| < +\infty.$$

Dále jest

$$\|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{L}(t)\| \|\mathbf{x}\|,$$

takže

$$\chi(\mathbf{y}) = \chi(\|\mathbf{y}\|) \leq \chi(\|\mathbf{L}(t)\| + \|\mathbf{x}\|) = \chi(\|\mathbf{x}\|) = \chi(\mathbf{x}),$$

tedy

$$(2.73) \quad \chi(\mathbf{y}) \leq \chi(\mathbf{x});$$

z nerovnosti

$$\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{L}^{-1}(t)\| \|\mathbf{x}\|$$

obdobně vzhledem k nerovnosti (2.72) je

$$(2.74) \quad \chi(\mathbf{x}) \leq \chi(\mathbf{y});$$

z obou nerovností (2.73) a (2.74) vyplývá dokazovaná rovnost (2.71), Q.E.D.

Důležitý výsledek v otázce transformovatelnosti na soustavu s konstantní maticí při zachování spektra publikoval v r. 1946 profesor Leningradské university N. P. Jerugin. Platí tato

Věta 2.6. *Lineární soustavu, popsanou rovnicí (2.44), lze převést Ljapunovovou transformací s maticí $\mathbf{L}(t)$ na soustavu s konstantní maticí \mathbf{B} , právě když aspoň jednu její fundamentální maticí $\mathbf{X}(t)$ lze vyjádřit ve tvaru*

$$(2.75) \quad \mathbf{X}(t) = \mathbf{L}(t) \exp(\mathbf{B} \cdot t)$$

Důkaz. Nechť nejprve soustavu (2.44) lze převést Ljapunovovou transformací (2.69) na soustavu s konstantní maticí tvaru (2.70). Matice $\exp(\mathbf{B} \cdot t)$ je zřejmě fundamentální maticí rovnice (2.70) a odtud snadno nahlédneme, že pravá strana rovnosti (2.75) je fundamentální maticí rovnice (2.44).

Nechť naopak některá fundamentální matice soustavy (2.44) je tvaru (2.75), kde $\mathbf{L}(t)$ je Ljapunovova matice. Z rovnosti (2.75) plyne, že

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{B} \cdot t);$$

jak vyplývá z důkazu předchozího lemmatu (vztah 2.72), je také $\mathbf{L}^{-1}(t)$ Ljapunovovou transformací. Tuto transformaci, totiž

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{B} \cdot t) \mathbf{y},$$

užijeme na rovnici (2.44). Dostáváme nejprve

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} \exp(-\mathbf{B} \cdot t) \mathbf{y} - \mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{B} \cdot t) \mathbf{B} \mathbf{y} + \mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{B} \cdot t) \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \\ = \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{B} \cdot t) \mathbf{y} \end{aligned}$$

a jelikož

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t),$$

vyplývá odtud rovnost (2.70), Q.E.D.

Ukážeme nyní ještě jeden odlišný způsob převedení problému asymptotické stability soustavy s časově proměnnou maticí na problém stability soustavy s konstantní maticí. K tomu cíli nejprve vyslovíme tuto definici:

Definice 2.11. Dvě soustavy, popsané vektorovými diferenciálními rovnicemi

$$(2.76) \quad \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{f}_i(t, \mathbf{x}_i), \quad (i = \overset{r}{\underset{n}{1}}, 2),$$

nazýváme *asymptoticky ekvivalentní*, jestliže každému řešení \mathbf{x}_k kterékoliv z obou soustav odpovídá řešení x_i druhé soustavy tak, že

$$(2.77) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_i(t)) = 0.$$

Jednoduché kritérium asymptotické ekvivalentnosti se soustavou s konstantní maticí nalezl v r. 1946 americký matematik Norman Levinson. Platí tato věta, jejíž důkaz pro jeho poměrnou obšírnost vynecháváme:

Věta 2.7. *Jestliže všechna řešení soustavy (2.70) s konstantní maticí jsou omezená na intervalu $\langle t_0, +\infty \rangle$ a jestliže matice $\mathbf{C}(t)$, jejímiž prvky jsou funkce spojitě na $\langle t_0, +\infty \rangle$, vyhovuje nerovnosti*

$$(2.78) \quad \int_{t_0}^{+\infty} \|\mathbf{C}(\tau)\| d\tau < +\infty,$$

potom soustava

$$(2.79) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{B} + \mathbf{C}(t)) \mathbf{x}(t)$$

je asymptoticky ekvivalentní soustavě (2.70).

Zajímavým důsledkem této Levinsonovy věty je asymptotické chování řešení

soustavy

$$(2.80) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{C}(t) \mathbf{x},$$

kde matice $\mathbf{C}(t)$ splňuje nerovnost (2.78). Tato soustava je totiž asymptoticky ekvivalentní soustavě

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = 0$$

a každá složka vektoru řešení $\mathbf{x}(t)$ soustavy (2.80) konverguje tedy pro $t \rightarrow +\infty$ k nějaké konstantě; naopak pro libovolný konstantní vektor $\mathbf{c} \in E_n$ existuje řešení $\mathbf{x}(t)$ soustavy (2.80) takové, že

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}.$$

3. DRUHÁ LJAPUNOVOVA METODA

Přejdeme nyní k vyšetřování obecně nelineárních soustav diferenciálních rovnic. Efektivní metodu řešení problému stability našel A. M. Ljapunov a poprvé ji uvedl ve své doktorské disertaci v r. 1892. Ljapunovova práce se stala základem pro mohutný rozvoj teorie stability nelineárních systémů a přispěla k řešení velkého množství teoretických i praktických problémů v nejrůznějších technických oborech.

3.1. Pozitivně a negativně definitivní funkce

Důležitý aparát při vyšetřování stability druhou Ljapunovovou metodou tvoří funkce, jejichž znaménko se v nějaké dané oblasti nemění.

Definice 3.1. Reálná spojitá skalární funkce $V(t, \mathbf{x})$ proměnných t a $\mathbf{x} \in E_n$ se nazývá *pozitivně definitivní* v oblasti

$$(3.1) \quad \Omega = \{(t, \mathbf{x}) : t_0 < t < +\infty, \|\mathbf{x}\| < h\},$$

jestliže pro všechna $(t, \mathbf{x}) \in \Omega$ platí nerovnost

$$(3.2) \quad V(t, \mathbf{x}) \geq \varphi(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{pro} \quad \|\mathbf{x}\| \neq 0$$

a dále rovnost

$$V(t, \mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{0}) = 0,$$

kde $\varphi(\mathbf{x})$ je nějaká spojitá funkce (pro $\|\mathbf{x}\| < h$).

Funkce $W(t, \mathbf{x})$ se nazývá *negativně definitivní* na Ω , jestliže funkce $-W(t, \mathbf{x})$ je na Ω pozitivně definitivní.

Definice 3.2. Reálná spojitá skalární funkce $V(t, \mathbf{x})$ se nazývá *pozitivně semidefinitní* na oblasti (3.1), jestliže pro všechna $(t, \mathbf{x}) \in \Omega$ platí

$$(3.3) \quad V(t, \mathbf{x}) \geq 0.$$

Funkce $W(t, \mathbf{x})$ se nazývá *negativně semidefinitní* na Ω , jestliže funkce $-W(t, \mathbf{x})$ je pozitivně semidefinitní na Ω .

Definice 3.3. Reálná spojitá funkce $V(t, \mathbf{x})$, která není ani pozitivně ani negativně semidefinitní, nazývá se *indefinitní* v příslušné oblasti (3.1).

Dobrou ilustraci právě zavedených pojmů, pokud $V(t, \mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$ nezávisí na t , představují různé typy kvadratických forem, známé pravděpodobně čtenáři v souvislosti s vyšetřováním kuželoseček nebo s klasifikací parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Určit u obecné funkce, k jakému typu náleží, může znamenat obtížně řešitelný problém. Všimneme si nyní blíže tzv. algebraických forem, u nichž lze uvést jednoduchá kritéria definitnosti.

Definice 3.4. Algebraický výraz tvaru

$$(3.4) \quad V(\mathbf{x}) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = m} c_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, \quad (i_k \geq 0 \text{ celá}),$$

nazýváme (algebraickou) *formou* m -tého stupně.

Poznamenejme, že formy mají tuto zřejmou vlastnost

$$(3.5) \quad V(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m V(x_1, \dots, x_n).$$

Dále je zřejmé, že formy lichého stupně jsou indefinitní v libovolně malém okolí počátku souřadnic. V případě kvadratické formy, tzn. pro $m = 2$, platí známá *Silvestrova věta*, že totiž kvadratická forma (srov. (3.4) pro $m = 2$) je pozitivně definitní pro všechna \mathbf{x} , právě když následující hlavní minory její matice

$$(3.6) \quad c_{11}, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

jsou kladná čísla. Uvedeme nyní dvě pomocné věty, které umožňují v řadě případů vyřešit otázku definitnosti forem vyššího stupně.

Lemma 3.1. *Nechť $V(\mathbf{x})$ je pozitivně (resp. negativně) definitní forma stupně m . Potom existuje kladné číslo k takové, že pro libovolnou funkci $\varphi(\mathbf{x})$, která vyhovuje požadavkům*

$$(3.7) \quad |\varphi(\mathbf{x})| < k \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^m \quad \text{pro} \quad 0 \leq \|\mathbf{x}\| \leq h$$

a

$$(3.8) \quad \varphi(\mathbf{0}) = 0$$

je také funkce

$$(3.9) \quad \psi(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x})$$

pozitivně (resp. negativně) definitní v oblasti $\|\mathbf{x}\| < h$.

Jestliže forma $V(\mathbf{x})$ je pro $\|\mathbf{x}\| < h$ indefinitní, potom existuje kladné k takové, že za předpokladů (3.7) a (3.8) je funkce (3.9) indefinitní v oblasti $\|\mathbf{x}\| < h$.

Důkaz. Ke každému vektoru $\mathbf{x} \in E_n$ existuje právě jeden vektor \mathbf{j} jednotkové délky takový, že platí

$$(3.10) \quad \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \mathbf{j}.$$

Dále zřejmě za předpokladů (3.7) a (3.8)

$$V(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}) \geq V(\mathbf{x}) - |\varphi(\mathbf{x})| > V(\mathbf{x}) - k \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^m.$$

S využitím vlastností (3.5) je tedy

$$(3.11) \quad \psi(\mathbf{x}) > \|\mathbf{x}\|^m [V(\mathbf{j}) - k];$$

obdobně platí také nerovnost

$$(3.12) \quad \psi(\mathbf{x}) < \|\mathbf{x}\|^m [V(\mathbf{j}) + k].$$

Povrch jednotkové koule se středem v počátku tvoří kompaktní množinu v E_n a spojitá funkce $V(\mathbf{j})$ na ní tedy nabývá svého maxima a minima; označme tyto hodnoty jako W a w .

Je-li nejprve $V(\mathbf{x})$ pozitivně definitní, vezměme $k < w$; funkce $\psi(\mathbf{x})$ je pak pozitivně definitní v důsledku nerovnosti (3.11).

Je-li $V(\mathbf{x})$ negativně definitní, je $W < 0$ a vezměme $k < -W$; funkce $\psi(\mathbf{x})$ je pak negativně definitní v důsledku nerovnosti (3.12).

Je-li konečně $V(\mathbf{x})$ indefinitní, je zřejmě

$$w < 0 < W.$$

Zvolme

$$k < \min(|w|, |W|).$$

Potom existují \mathbf{x} , pro něž je podle nerovnosti (3.11) $\psi(\mathbf{x})$ kladné a s druhé strany taková \mathbf{x} , pro něž je podle nerovnosti (3.12) $\psi(\mathbf{x})$ záporné. Q.E.D.

Poznámka. Za funkci $\varphi(\mathbf{x})$ v právě dokázaném lemmatu lze speciálně volit opět formu; požadavek (3.7) lze formulovat tak, že koeficienty této formy $\varphi(\mathbf{x})$ jsou v absolutní hodnotě do-

statečně malé. Jinými slovy definitnost nebo indefinitnost formy se nezmění, přičteme-li k ní formu s dostatečně malými koeficienty.

Lemma 3.2. *Nechť $\psi(\mathbf{x})$ je analytická funkce pro $\|\mathbf{x}\| < R$, kde $R > 0$. Nechť přitom její Taylorův rozvoj v okolí počátku je tvaru*

$$(3.13) \quad \psi(\mathbf{x}) = V_m(\mathbf{x}) + \varrho(\mathbf{x})$$

kde $V_m(\mathbf{x})$ je forma m -tého stupně, $m \geq 1$ a $\varrho(\mathbf{x})$ nechť je zbytek, obsahující pouze členy stupně vyššího než m .

Jestliže $V_m(\mathbf{x})$ je pro $\|\mathbf{x}\| < R$ (pozitivně, negativně) definitní resp. indefinitní, potom také $\psi(\mathbf{x})$ je (pozitivně, negativně) definitní resp. indefinitní.

Důkaz. Tvrzení vyplývá bezprostředně z lemmatu 3.1, Q.E.D.

3.2. Ljapunovovy věty

Naším cílem nyní bude vyšetřování stability (v Ljapunovově smyslu) pro nelineární soustavu tvaru

$$(3.14) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

kde složky vektoru jsou spojité funkce t , jež mají spojité parciální derivace podle proměnných x_i ($i = 1, \dots, n$) na nějaké oblasti

$$(3.15) \quad \Omega = (a, +\infty) \times G, \quad G \subset E_n.$$

Na Ω jsou tedy splněny předpoklady lokální věty o existenci a jednoznačnosti reálného řešení rovnice (3.14).

Pro posouzení stability, jak již bylo podrobně uvedeno v odst. 2.1, srovnáváme řešení $\mathbf{x}(t)$ s jiným řešením $\mathbf{y}(t)$ téže rovnice při změněné počáteční podmínce. Označme

$$(3.16) \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t),$$

je tedy

$$(3.17) \quad \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t) + \mathbf{z}(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)).$$

Tuto poslední rovnost zapíšeme symbolicky ve tvaru

$$(3.18) \quad \dot{\mathbf{z}}(t) = \varphi(t, \mathbf{z}(t)),$$

přičemž ze vztahu (3.17) vyplývá

$$\varphi(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Jestliže $\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$, má rovnice (3.18) jediné řešení $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Toto řešení odpovídá ideálnímu případu, kdy z rovnosti $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}(0)$ vyplývá $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$. Tím jsme problém

stability řešení rovnice (3.14) převedli na problém stability triviálního (nulového) řešení rovnice (3.18) a dále se budeme zabývat tímto problémem. V dalším ještě změníme označení proměnných, takže budeme vyšetřovat stabilitu triviálního řešení rovnice (3.14) za předpokladu

$$(3.19) \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Dále budeme předpokládat, že oblast G obsahuje množinu

$$(3.20) \quad K_H = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < H\},$$

obdobně ještě označme (pro $0 < h < H$)

$$(3.21) \quad \bar{K}_h = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq h\}.$$

Uvažujme pomocnou funkci $V(t, \mathbf{x})$, jež má spojité derivace podle všech svých proměnných na množině

$$(3.22) \quad \Omega_h = (a, +\infty) \times \bar{K}_h.$$

Jestliže $\mathbf{x}(t)$ je řešením rovnice (3.14) na Ω , je derivace podle času rovna

$$(3.23) \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, \mathbf{x}).$$

Pravou stranu v rovnosti (3.23) nazveme *časovou derivací funkce* $(V(t, \mathbf{x}))$ v důsledku rovnice (3.14).

Vyslovíme nyní a dokážeme několik fundamentálních vět, na nichž je vybudován celý rozsáhlý aparát druhé Ljapunovy metody pro určování stability. Upozorňujeme předem čtenáře, že v literatuře se dosti často, jednak z tradice a jednak s ohledem na jednodušší formulaci, uvádějí tyto věty pro tzv. autonomní soustavy, tzn. soustavy popsané rovnicí

$$(3.14a) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

jejíž pravá strana závisí na čase pouze prostřednictvím funkcí $x_i(t)$ a nikoliv explicitně. Vzhledem k tomu, že důkaz v obou případech probíhá shodně, uvádíme zde obecnější formulaci pro soustavu neautonomní.

Věta 3.1 (První Ljapunova věta). *Nechť je dána soustava popsaná vektorovou diferenciální rovnicí (3.14) na množině*

$$(3.24) \quad \Omega_H = (a, +\infty) \times K_H,$$

kde K_H je definováno (pro $H > 0$) vztahem (3.20). *Nechť pravá strana rovnice (3.14) je na Ω_H spojitá v t a má spojité první derivace podle proměnných x_i , $i = 1, \dots, n$,*

a nechť má vlastnost (3.19). Jestliže existuje pozitivně definitní funkce $V(t, \mathbf{x})$, jež má spojité první parciální derivace podle všech svých proměnných na množině $\hat{\omega}_h$ (srov. vztah (3.22)), přičemž $0 < h < H$, a jestliže časová derivace dV/dt v důsledku rovnice (3.14) je negativně semidefinitní, pak triviální řešení soustavy (3.14) je pro $t \rightarrow +\infty$ stabilní v Ljapunovově smyslu (podle definice 2.1).

Poznámka. Formulaci věty lze pozměnit tak, že předpokládáme funkci $V(t, \mathbf{x})$ negativně definitní a dV/dt pozitivně semidefinitní. Jak čtenář dále snadno nahlédne, dokáže se takto pozměněná věta analogicky jako věta 3.1.

Důkaz. Zvolíme libovolné $\varepsilon > 0$, s tím, že

$$0 < \varepsilon \leq h < H,$$

a najdeme k němu δ , $0 < \delta < \varepsilon$ takové, aby platila implikace

$$(3.25) \quad \|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } t \geq t_0.$$

Větu dokážeme sporem; předpokládejme tedy, že (pro jakékoliv $\delta > 0$) vždy lze nalézt t_1 takové, že $t_1 > t_0$ a že

$$(3.26) \quad \|\mathbf{x}(t_1)\| = \varepsilon;$$

nechť $t_1 > t_0$ je nejmenší číslo s vlastností (3.26). Podél řešení $\mathbf{x}(t)$ je funkce času $V(t, \mathbf{x}(t))$ nerostoucí, neboť podle předpokladu věty její derivace

$$\frac{dV}{dt} \leq 0.$$

To znamená, že

$$(3.27) \quad V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) \geq V(t_1, \mathbf{x}(t_1)).$$

Nyní využijeme pozitivní definitnosti funkce $V(t, \mathbf{x})$; podle definice 3.1 existuje na čase nezávislá spojitá funkce $\varphi(\mathbf{x})$ taková, že pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$V(t, \mathbf{x}) \geq \varphi(\mathbf{x}) > 0.$$

Na kompaktní množině $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = \varepsilon\}$ tato funkce nabývá svého kladného minima $m > 0$. S druhé strany $V(t_0, \mathbf{x})$ je spojitá a $V(t_0, \mathbf{0}) = 0$; lze tedy při dostatečně malém $\delta > 0$ zaručit, že

$$(3.28) \quad V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) < m.$$

Jelikož $\|\mathbf{x}(t_1)\| = \varepsilon$, je

$$(3.29) \quad V(t_1, \mathbf{x}(t_1)) \geq m$$

a spojením nerovností (3.27), (3.28), (3.29) docházíme k nesprávné nerovnosti

$$m > m .$$

Tímto sporem je prokázána platnost implikace (3.25) a tím i věty 3.1, Q.E.D.

Věta 3.2 (Druhá Ljapunovova věta). *Nechť je dána soustava popsaná vektorovou diferenciální rovnicí (3.14) na množině (3.24), kde K_H je definována vztahem (3.20). Nechť pravá strana rovnice (3.14) je na množině (3.24) spojitá v t a má spojitě prvé derivace podle proměnných x_i , $i = 1, \dots, n$, a nechť má vlastnost (3.19). Jestliže existuje pozitivně definitní funkce $V(t, \mathbf{x})$, jež má spojitě prvé parciální derivace podle všech svých proměnných na množině $\hat{\omega}_h$ (srov. vztah (3.22)), přičemž $0 < h < < H$, jestliže dále časová derivace dV/dt v důsledku rovnice (3.14) je negativně definitní a jestliže pro $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ konverguje $V(t, \mathbf{x})$ k nule stejnoměrně vzhledem k t pro $a < t_0 \leq t < +\infty$, pak triviální řešení soustavy (3.14) je pro $t \rightarrow +\infty$ asymptoticky stabilní v Ljapunovově smyslu (podle definice 2.2).*

Poznámka. Analogicky lze vyslovit větu pro negativně definitní funkci $V(t, \mathbf{x})$ s pozitivně semidefinitní časovou derivací.

Důkaz. Jelikož v předpokladech věty 3.2 jsou obsaženy veškeré předpoklady věty 3.1, je triviální řešení soustavy (3.14) stabilní. Zbývá ukázat, že každé netriviální řešení, jehož počáteční hodnota

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq h$$

při dostatečně malém h , splňuje požadavek

$$(3.30) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} .$$

Jelikož časová derivace funkce $V(t, \mathbf{x})$ je podle předpokladu negativně definitní, je

$$(3.31) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t, \mathbf{x}(t)) = \inf_{t \geq t_0} V(t, \mathbf{x}(t)) = \alpha \geq 0 .$$

Ukážeme nejdříve, že toto $\alpha = 0$. V opačném případě, tzn. je-li $\alpha > 0$, existuje kladné β takové, že

$$(3.32) \quad \|\mathbf{x}(t)\| \geq \beta > 0 \quad \text{pro } t \in \langle t_0, +\infty \rangle ,$$

jak vyplývá ze spojitosti funkce $V(t, \mathbf{x}(t))$. Dále lze vzhledem k stabilitě triviálního řešení předpokládat, že uvažované $\mathbf{x}(t)$ vyhovuje navíc nerovnosti

$$(3.33) \quad \|\mathbf{x}(t)\| \leq h .$$

Funkce dV/dt je negativně definitní, existuje tedy pozitivně definitní funkce $\psi(\mathbf{x})$

taková, že

$$(3.34) \quad \frac{dV(t, \mathbf{x}(t))}{dt} \leq -\psi(\mathbf{x}(t)).$$

Označme

$$\gamma = \inf_{\beta \leq \|\mathbf{x}\| \leq h} \psi(\mathbf{x}) > 0.$$

Při tomto označení vyplývá z nerovnosti (3.34) integrací v mezích t_0, t , uvážíme-li zároveň vztahy (3.32) a (3.33), nerovnost

$$V(t, \mathbf{x}(t)) \leq V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) - \gamma(t - t_0).$$

Pro dostatečně velké t je tedy $V(t, \mathbf{x}(t)) < 0$, což je spor. Tím jsme dokázali, že nutně $\alpha = 0$. Zbývá ukázat, že platí rovnost (3.30). Ukážeme, že k $\varepsilon > 0$ existuje $T > t_0$ takové, že pro $t \geq T$ je

$$(3.35) \quad \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon.$$

Zvolme $\varepsilon < h$. Potom existuje pro $\varepsilon \leq \|\mathbf{x}\| \leq h$ kladné infimum pozitivně definitní funkce $\varphi(\mathbf{x})$, jež zdola omezuje funkci $V(t, \mathbf{x})$ ve smyslu definice 3.1:

$$(3.36) \quad 0 < \eta = \inf_{\varepsilon \leq \|\mathbf{x}\| \leq h} \varphi(\mathbf{x}).$$

Protože levá strana rovnosti (3.31) je, jak jsme ukázali, rovná 0, existuje $T > t_0$ takové, že

$$V(T, \mathbf{x}(T)) < \eta;$$

jelikož časová derivace funkce $V(t, \mathbf{x}(t))$ je záporná, je tato funkce klesající a pro všechna $t \geq T$ platí obdobně

$$V(t, \mathbf{x}(t)) < \eta.$$

To však, vzhledem k definici (3.36) čísla η znamená, že nutně $\|\mathbf{x}(t)\| \notin \langle \varepsilon, h \rangle$; jelikož zároveň platí předpoklad (3.33), je dokázána nerovnost (3.35) a tím i tvrzení věty, Q.E.D.

Věta 3.3 (Třetí Ljapunova věta). *Nechť je dána soustava popsána vektorovou diferenciální rovnicí (3.14) na množině (3.24), kde K_H je definováno vztahem (3.20). Nechť existuje funkce $V(t, \mathbf{x})$, jež má spojitě první parciální derivace podle všech svých proměnných na množině ω_H (srov. vztah (3.22)), která dále má (pozitivně nebo negativně) definitní časovou derivaci dV/dt v důsledku rovnice (3.14) a která pro $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ konverguje vzhledem k t stejnoměrně k nule na intervalu $a < t_1 \leq t < +\infty$. Jestliže pro některé $t_0 > a$ a pro každé Δ , kde $0 < \Delta \leq h < H$ existuje \mathbf{x}_0 takové, že $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$ a že*

$$(3.37) \quad V(t_0, \mathbf{x}_0) \frac{dV(t, \mathbf{x}_0)}{dt} > 0,$$

potom triviální řešení rovnice (3.14) je pro $t \rightarrow +\infty$ nestabilní v Ljapunovově smyslu (podle definice 2.3).

Důkaz. Bez omezení obecnosti lze předpokládat, že dV/dt je pozitivně definitní; v opačném případě by stačilo přejít k funkci $-V$. Existuje tedy spojitá na t explicitně nezávislá pozitivně definitní skalární funkce $\psi(\mathbf{x})$ taková, že

$$(3.38) \quad \frac{dV(t, \mathbf{x})}{dt} \geq \psi(\mathbf{x}) > 0$$

pro $t_0 \leq t < +\infty$ a $0 \leq \|\mathbf{x}\| < h$. Vzhledem k předpokladu o stejnoměrné konvergenci $V(t, \mathbf{x})$ k nule existují zřejmě čísla C a η taková, že platí implikace

$$(3.39) \quad (t_0 \leq t < +\infty, \|\mathbf{x}\| \leq \eta < h) \Rightarrow |V(t, \mathbf{x}(t))| \leq C.$$

Vezmeme libovolně malé číslo δ , $0 < \delta \leq \eta$. Ve větě je předpokládána existence bodu (t_0, \mathbf{x}_0) takového, že

$$(3.40) \quad V(t_0, \mathbf{x}_0) > 0, \quad 0 < \|\mathbf{x}_0\| < \delta.$$

Uvažujme řešení $\mathbf{x}(t)$ rovnice (3.14) s počáteční podmínkou

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Podle nerovnosti (3.38) je funkce $V(t, \mathbf{x}(t))$ v čase rostoucí, takže pro $t \geq t_0$ je

$$(3.41) \quad V(t, \mathbf{x}(t)) \geq V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) > 0.$$

Ukážeme nyní, že existuje $t_1 > t_0$ takové, že

$$(3.42) \quad \|\mathbf{x}(t_1)\| > \eta.$$

Tím bude věta dokázána, neboť pak existuje pevné číslo $\varepsilon = \eta$ takové, že pro žádné $\delta > 0$ nelze dosáhnout nerovnosti

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \eta.$$

pro všechna $t \geq t_0$. Vraťme se tedy k nerovnosti (3.42). Předpokládejme opak, totiž že platí pro $t \geq t_0$ nerovnost (3.43). Z nerovnosti (3.41) vyplývá, uvažíme-li spojitost a stejnoměrnou konvergenci $V(t, \mathbf{x})$ k nule pro $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$, že existuje β takové, že pro $t \geq t_0$

$$(3.44) \quad \|\mathbf{x}(t)\| \geq \beta > 0.$$

Označme

$$\gamma = \inf_{\beta \leq \|\mathbf{x}\| \leq \eta} \psi(\mathbf{x}) > 0;$$

jelikož platí obě nerovnosti (3.43) a (3.44), je tedy

$$(3.45) \quad \frac{dV(t, \mathbf{x}(t))}{dt} \geq \gamma \quad \text{pro } t \geq t_0.$$

Integrací odtud obdržíme následující vztahy

$$(3.46) \quad \begin{aligned} V(t, \mathbf{x}(t)) &= V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^t \frac{dV(\tau, \mathbf{x}(\tau))}{d\tau} d\tau \geq \\ &\geq V(t_0, \mathbf{x}_0) + \gamma(t - t_0), \end{aligned}$$

což je ve sporu s tvrzením o omezenosti funkce $V(t, \mathbf{x}(t))$ v implikaci (3.39), Q.E.D.

Definice 3.5. Funkce $V(t, \mathbf{x})$, která vyhovuje předpokladům prvé (resp. druhé resp. třetí) Ljapunovovy věty, se nazývá *Ljapunovovou funkcí prvního (resp. druhého, resp. třetího) druhu*.

Praktický význam uvedených kritérií stability je samozřejmě podmíněn možností konstruovat příslušné Ljapunovovy funkce. Touto obecně obtížnou otázkou se budeme zabývat níže. Pro názorné zapamatování podstaty prvních dvou Ljapunovových vět lze uvést tuto geometrickou interpretaci v případě autonomní soustavy. Uvažujme n -rozměrné nadplochy

$$(3.47) \quad \{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) = c\}.$$

Tyto nadplochy jsou uzavřené a tvoří hranice těles

$$(3.48) \quad T(c) = \{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) \leq c\},$$

příčemž pro $c > 0$

$$\mathbf{0} \in T(c)$$

a

$$c_2 < c_1 \Rightarrow T(c_2) \subset T(c_1).$$

Každá integrální křivka, jež vychází z bodu dostatečně blízkého k počátku $\mathbf{0}$, protíná nadplochy (3.47) tak, že je-li $V(\mathbf{x}(t_1)) = c$, pak pro $t > t_1$ je $V(\mathbf{x}(t)) \in T(c)$; názorně řečeno: trajektorie $\mathbf{x}(t)$ protíná nadplochy (3.47) z vnějšku dovnitř. Tento fakt je snadným důsledkem předpokladu $[dV(\mathbf{x})/dt] \leq 0$. Trajektorie, která v určitém momentě byla uvnitř některého tělesa (3.48), zůstane tedy v něm i nadále, což znamená stabilitu nulového řešení, uvedou v první Ljapunovově větě.

Jestliže však je $[dV(\mathbf{x})/dt] < 0$, potom trajektorie $\mathbf{x}(t)$ protíná postupně nadplochy (3.47) se stále klesajícím $c \rightarrow 0$ a bez omezení se blíží bodu $\mathbf{0}$, ve shodě s tvrzením druhé Ljapunovovy věty.

Předpoklady třetí Ljapunovovy věty lze ještě oslabit, jednu z možností ukazuje následující věta, náležející sovětskému matematikovi N. G. Četajevovi:

Věta 3.4. (Četajevova věta). *Nechť je dána soustava popsaná vektorovou diferenciální rovnicí (3.14) na množině (3.24), kde K_H je definováno vztahem (3.20). Nechť existuje funkce $V(t, \mathbf{x}(t))$, jež má spojité první parciální derivace podle všech svých proměnných na množině $\hat{\omega}_h$ (srov. vztah (3.22)). Označme*

$$(3.49) \quad P = \{(t, \mathbf{x}) : (t, \mathbf{x}) \in \hat{\omega}_h, V(t, \mathbf{x}) > 0\},$$

potom nechť pro každé $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ je řez

$$(3.50) \quad D_t = \{\mathbf{x} : (t, \mathbf{x}) \in P\}$$

neprázdná otevřená množina, jejímž hraničním bodem je bod $\mathbf{0}$, a nechť na části hranice množiny P , která leží uvnitř $\hat{\omega}_h$, platí

$$V(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Jestliže funkce $V(t, \mathbf{x})$ je omezená v oblasti P , jestliže má v P kladnou časovou derivaci v důsledku rovnice (3.14) a jestliže v každé podoblasti

$$(3.51) \quad P_\alpha = \{(t, \mathbf{x}) : (t, \mathbf{x}) \in \hat{\omega}_h, V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha > 0\}$$

je splněna nerovnost

$$(3.52) \quad \frac{dV(t, \mathbf{x}(t))}{dt} \geq \beta(\alpha) > 0,$$

pak triviální řešení rovnice (3.14) je nestabilní v Ljapunovově smyslu pro $t \rightarrow +\infty$.

Důkaz. *Vezměme libovolně malé $\delta > 0$.*

Jelikož bod $\mathbf{0}$ je hraničním bodem otevřeného řezu D_{t_0} , existuje v tomto řezu bod $\mathbf{x}_0 \in D_{t_0}$ takový, že

$$(3.53) \quad 0 < \|\mathbf{x}_0\| < \delta < h,$$

přičemž označíme

$$(3.54) \quad V(t, \mathbf{x}_0) = \alpha > 0.$$

Ukážeme, že řešení $\mathbf{x}(t)$ rovnice (3.14), jež splňuje počáteční podmínku $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$, bude pro některé $t > t_0$ v normě větší než h , čímž bude věta dokázána. Odvodíme tedy spor z předpokladu, že pro všechna $t > t_0$ platí nerovnost

$$\|\mathbf{x}(t)\| < h.$$

Jelikož podle předpokladů věty je

$$V(t, \mathbf{x}) > 0 \Rightarrow \frac{dV(t, \mathbf{x})}{dt} > 0,$$

je pro $t \geq t_0$

$$(3.55) \quad V(t, \mathbf{x}(t)) \geq V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) = \alpha,$$

pokud

$$(3.56) \quad V(t, \mathbf{x}(t)) > 0.$$

Dokážeme nejprve, že nerovnost (3.56) platí pro všechna $t > t_0$. V opačném případě by existovalo nejmenší t_1 , $t_1 > t_0$ takové, že

$$V(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0,$$

přičemž pro $t < t_1$ platí nerovnost (3.55); limitní přechod pro $t \rightarrow t_1^-$ vede ke sporu se spojitostí $V(t, \mathbf{x}(t))$, neboť by muselo být

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} V(t, \mathbf{x}(t)) \geq \alpha > 0.$$

Nerovnost (3.56) tedy platí pro všechna $t > t_0$. Řešení $\mathbf{x}(t)$ leží tedy celé v podoblasti

$$\{(t, \mathbf{x}) : V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha > 0\} \subset P.$$

Podle předpokladu věty platí potom nerovnost (3.52) a integraci z ní dostaneme

$$V(t, \mathbf{x}(t)) \geq V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \beta(t - t_0).$$

Tato poslední nerovnost odporuje předpokladu věty, že funkce $V(t, \mathbf{x}(t))$ je v P omezená, Q.E.D.

Poznámka. Ve třetí Ljapunově větě se předpokládá, že derivace dV/dt je pozitivně definitní v jistém okolí počátku souřadnic, zatímco v Četajevově větě se uvažuje pouze určitá výše tohoto okolí.

Zavedeme nyní ještě jeden pojem stability, užitečný pro posouzení kvality řešení.

Definice 3.6. Nulové řešení soustavy (3.14), jejíž pravá strana vyhovuje vztahu (3.19) se nazývá *exponenciálně stabilní* pro $t \rightarrow +\infty$, jestliže každé řešení $\mathbf{x}(t)$ při dostatečně malé počáteční podmínce

$$(3.57) \quad \|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta,$$

vyhovuje pro $t \geq t_0$ nerovnosti

$$(3.58) \quad \|\mathbf{x}(t)\| \leq C \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)},$$

kde C a α jsou kladné konstanty, nezávislé na $\mathbf{x}(t)$.

Z exponenciální stability nulového řešení vyplývá zřejmě asymptotická stabilita

každého řešení s dostatečně malou (v normě) počáteční podmínkou. Dále je patrné, že tato řešení mají charakteristické exponenty

$$\lambda(\mathbf{x}) \leq -\alpha.$$

Dokážeme nyní jakožto analogii k Ljapunovovým větám tuto postačující podmínku exponenciální stability triviálního, tzn. nulového řešení.

Věta 3.5. (N. N. Krasovskij). *Nechť je dána soustava popsána vektorovou diferenciální rovnicí (3.14) na množině (3.24), kde K_H je definováno vztahem (3.20). Nechť je splněna podmínka (3.19). Nechť dále existuje pozitivně definitní kvadratická forma*

$$(3.59) \quad V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x},$$

jejíž časová derivace dV/dt v důsledku rovnice (3.14) vyhovuje pro $t \geq t_0$, $\|\mathbf{x}\| \leq \delta < H$ nerovnosti

$$(3.60) \quad \frac{dV}{dt} \leq -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x},$$

kde $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ je pozitivně definitní kvadratická forma; matice \mathbf{K} a \mathbf{Q} jsou konstantní symetrické matice. Potom triviální řešení soustavy (3.14) je exponenciálně stabilní pro $t \rightarrow +\infty$.

Důkaz. Označme minimální a maximální vlastní čísla postupně matic \mathbf{K} a \mathbf{Q} jako l_K , L_K , l_Q , L_Q . Tato čísla jsou vesměs kladná. Podle známých vlastností vlastních čísel je zřejmé (pro eukleidovskou normu vektorů)

$$l_K \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq L_K \|\mathbf{x}\|^2,$$

$$l_Q \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \leq L_Q \|\mathbf{x}\|^2$$

a vzhledem k předpokladu (3.60) je

$$\frac{dV}{dt} \leq -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \leq -l_Q \|\mathbf{x}\|^2 \leq -\frac{l_Q}{L_K} V(\mathbf{x}).$$

Odtud integrováním v mezích t_0 , t obdržíme

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(t_0)) e^{-(l_Q/L_K)(t-t_0)}.$$

Odnadneme nyní normu řešení $\mathbf{x}(t)$

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq \frac{1}{l_K} V(\mathbf{x}(t)) \leq \frac{1}{l_K} V(\mathbf{x}(t_0)) e^{-(l_Q/L_K)(t-t_0)},$$

neboli platí nerovnost

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq \frac{L_K}{l_K} \|\mathbf{x}(t_0)\|^2 e^{-(l_K/l_K)(t-t_0)},$$

jež vyjadřuje exponenciální stabilitu, Q.E.D.

3.3. Existence Ljapunovových funkcí

Ljapunovy a jim podobné věty o stabilitě obsahují postačující podmínku stability (resp. nestability). Tato podmínka obsahuje předpoklad o existenci funkce s jistými vlastnostmi. Vzniká zde problém, jak takovou funkci konstruovat, který, jak uvidíme později, nelze vždy snadno a úspěšně vyřešit. Především však je nutné zkoumat otázku samotné existence takových funkcí. Tento problém byl řešen řadou autorů a byl zpracován později jednotným způsobem v monografii N. N. Krasovského [19], k níž odkazujeme čtenáře. Zde uvedeme pro ilustraci dva starší výsledky, jež zaručují existenci Ljapunovy funkce v první a druhé Ljapunově větě.

Věta 3.6 (K. P. Persidskij). *Nechť soustava (3.14), jejíž pravá strana vyhovuje podmínce (3.19), má triviální řešení stabilní v Ljapunově smyslu pro $t \rightarrow +\infty$. Nechť vektorová funkce $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ má spojité prvě parciální derivace podle všech svých proměnných na množině*

$$(3.61) \quad \Omega(H) = \langle t_0, +\infty \rangle \times \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < H < +\infty\}.$$

Potom pro soustavu (3.14) v množině

$$(3.62) \quad \Omega(h) = \langle t_0, +\infty \rangle \times \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < h < H\}$$

existuje Ljapunova funkce $V(t, \mathbf{x})$ prvního druhu (srov. def. 3.5), jež tam má spojité prvě parciální derivace podle všech svých proměnných. Přitom číslo h je zvoleno tak, aby řešení s počáteční podmínkou v množině (3.62) leželo celé v množině (3.61).

Důkaz. Označme jako $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ funkci proměnné t , která vyhovuje podmínce

$$(3.63) \quad \mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0.$$

Dále zavědeme funkci $\varphi(\mathbf{x})$, jež má spojité prvě parciální derivace na E_n a takovou, že

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= 1 & \text{pro} & \quad \|\mathbf{x}\| \leq h, \\ \varphi(\mathbf{x}) &\in \langle 0, 1 \rangle & \text{pro} & \quad h < \|\mathbf{x}\| < H, \\ \varphi(\mathbf{x}) &= 0 & \text{pro} & \quad \|\mathbf{x}\| \geq H; \end{aligned}$$

normou zde rozumíme Eukleidovu normu v E_n . Nechť $\mathbf{y}(t)$ je řešení soustavy

$$(3.64) \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y})$$

pro $t \geq t_0$. V souhlasu s výše zavedeným označením rozumíme symbolem $\mathbf{y}(t_0; t, \mathbf{x})$ hodnotu pro t_0 takového řešení soustavy (3.64), jež v čase t je rovná $\mathbf{x}(t)$. Ukážeme, že potom pro $t \geq t_0$, $\|\mathbf{x}\| < H$ je funkce

$$(3.65) \quad V(t, \mathbf{x}) = (1 + e^{-t}) \|\mathbf{y}(t_0; t, \mathbf{x}(t))\|$$

hledaná Ljapunovova funkce prvního druhu.

Pro $\|\mathbf{x}\| \leq h$ jsou obě soustavy (3.14) a (3.64) stejné. Uvažujme časovou derivaci

$$\frac{dV(t, \mathbf{x})}{dt} = \left\{ \frac{d}{d\tau} [(1 + e^{-\tau}) \|\mathbf{y}(t_0; \tau, \mathbf{x}(\tau))\|^2] \right\}_{\tau=t}.$$

Vzhledem k jednoznačnosti trajektorie je však pro $\tau \in \langle t_0, t \rangle$

$$\mathbf{y}(t_0; \tau, \mathbf{x}(\tau)) = \mathbf{y}(t_0; t, \mathbf{x}(t)),$$

takže po snadné úpravě

$$(3.66) \quad \frac{dV(t, \mathbf{x})}{dt} = -e^{-t} \|\mathbf{y}(t_0; t, \mathbf{x}(t))\|^2.$$

Výraz (3.66) je tedy pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ záporný, pro $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je, opět díky jednoznačnosti řešení (3.64), nulový. Časová derivace $dV(t, \mathbf{x})/dt$ vzhledem k soustavě (3.14) je tedy negativně definitní.

Dále ukážeme, že sama funkce $V(t, \mathbf{x})$ je v oblasti (3.62) pozitivně definitní. Zvolme $\varepsilon \in (0, h)$; vzhledem k předpokládané stabilitě triviálního řešení k němu existuje $\delta \in (0, \varepsilon)$ takové, že pro $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ platí implikace

$$(3.67) \quad \|\mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

Navíc platí ještě tato implikace pro $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$

$$(3.68) \quad \|\mathbf{x}_0\| \in \langle \varepsilon, h \rangle \Rightarrow \|\mathbf{y}(t_0; t, \mathbf{x}_0)\| \geq \delta.$$

Tuto implikaci dokážeme sporem. Kdyby pro nějaké $\tau \geq t_0$ bylo

$$\|\mathbf{y}(t_0; \tau, \mathbf{x}_0)\| < \delta,$$

potom by vzhledem k implikaci (3.67) a vzhledem k nerovnosti $\delta > \varepsilon$ bylo také

$$\|\mathbf{y}(\tau; t, \mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{x}_0\| < \varepsilon,$$

což je hledaný spor. Implikace (3.68) tedy platí.

S druhé strany je pro $\|\mathbf{x}_0\| < h$

$$(3.69) \quad \|\mathbf{y}(t_0; t, \mathbf{x}_0)\| < H,$$

což plyne snadno ze srovnání řešení soustav (3.14) a (3.64) a z volby čísla h .

Nechť nyní $\|\mathbf{x}_0\| \in \langle \varepsilon, h \rangle$. Potom zřejmě podle implikace (3.68) a vzhledem k rovnosti (3.65) je

$$V(t, \mathbf{x}_0) > \delta^2.$$

Utvořme posloupnost čísel

$$\varepsilon_n = \frac{h}{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

k této posloupnosti existuje posloupnost odpovídajících

$$\delta_n^2 = \eta_n,$$

přičemž posloupnost $\{\eta_n\}$ lze utvořit jako klesající. Funkce $W(\mathbf{x})$, jež je rovna

$$(3.70) \quad W(\mathbf{x}) = \eta_{n+1} + \frac{n(n-1)}{h} (\eta_n - \eta_{n+1}) \left(\|\mathbf{x}\| - \frac{h}{n+1} \right)$$

pro

$$(3.71) \quad \|\mathbf{x}\| \in \left\langle \frac{h}{n+1}, \frac{h}{n} \right\rangle, \quad n = 1, 2, \dots,$$

je zřejmě pozitivně definitní, přičemž

$$V(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x}) > 0,$$

takže $V(t, \mathbf{x})$ je také pozitivně definitní.

Z vět o spojitě závislosti řešení a jeho derivací na počátečních podmínkách snadno vyplývá, že funkce $V(t, \mathbf{x})$ má spojitě první parciální derivace podle všech svých proměnných, přičemž

$$(3.72) \quad \frac{dV(t, \mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(t, \mathbf{x}) < 0$$

pro $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ a $\|\mathbf{x}\| < h$.

Má tedy funkce (3.65) všechny požadované vlastnosti Ljapunovovy funkce 1. druhu, Q. E. D.

Věta 3.7 (J. L. Massera). *Nechť soustava (3.14), jejíž pravá strana vyhovuje podmínce (3.19), má triviální řešení asymptoticky stabilní v Ljapunovově smyslu pro $t \rightarrow +\infty$. Nechť vektorová funkce $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ má spojitě první parciální derivace podle všech svých proměnných na množině (3.61) a nechť je periodickou funkcí t s periodou ω . Potom existuje na množině (3.62) Ljapunovova funkce $V(t, \mathbf{x})$ druhého druhu, jež je periodickou funkcí t s periodou ω . Pokud funkce $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ nezávisí explicitně na t , má tuto vlastnost i funkce $V(t, \mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$.*

Důkaz. Označme

$$(3.73) \quad \zeta(t) = \sup \|x(t; t_0, x_0)\|^2,$$

kde supremum vztahujeme na všechny hodnoty (t_0, x_0) , pro něž $t_0 \in \langle 0, \omega \rangle$, $\|x_0\| < h$, kde h volíme stejně jako ve větě 3.6. Takto vytvořená funkce $\zeta(t)$ je kladná pro každé $t \geq t_0$. Ukážeme, že

$$(3.74) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \zeta(t) = 0.$$

Jelikož $\zeta(t)$ je supremem spojitě funkce, existuje \tilde{x}_0 v normě menší než h takové, že

$$\zeta(t) = \|x(t; t_0, \tilde{x}_0)\|^2$$

a vztah (3.74) vyplývá z předpokládané asymptotické stability triviálního řešení.

Ukážeme nejprve, že existuje funkce $G(\eta)$, která má tyto vlastnosti

(i) $G(\eta)$ je definována pro $\eta \geq 0$, přičemž

$$(3.75) \quad \eta > 0 \Rightarrow G(\eta) > 0.$$

(ii) Platí rovnosti

$$(3.76) \quad G(0) = G'(0) = 0.$$

(iii) Integrál

$$(3.77) \quad \int_0^\infty G(\zeta(t)) dt$$

konverguje pro každou funkci $\zeta(t)$, pro níž platí nerovnosti

$$(3.78) \quad 0 \leq \zeta(t) < \zeta(t),$$

přičemž tato konvergence je stejnoměrná vzhledem k funkci $\zeta(t)$.

(iv) Nechť $M(t)$ je kladná funkce, jež je větší než hodnoty všech parciálních derivací $\partial f/\partial t$, $\partial f/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, v množině (3.62). Nechť tato funkce je neklesající a spojitá. Potom integrál

$$(3.79) \quad \int_0^\infty G(\zeta(t)) M(t) dt$$

konverguje stejnoměrně vzhledem k funkcím $\zeta(t)$, jež vyhovují nerovnostem (3.78).

Sestrojíme nyní funkci $G(\eta)$ požadovaných vlastností. Především zvolíme posloupnost čísel $\{t_n\}$ takovou, že

$$(3.80) \quad t_{n+1} \geq t_n + 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

a že

$$(3.81) \quad \zeta(t) \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{pro } t \geq t_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dále sestrojíme spojitou funkci $\eta(t)$ takto:

$$(3.82) \quad \eta(t) = \left(\frac{t_1}{t}\right)^p \quad \text{pro } t \in (0, t_1),$$

$$(3.83) \quad \eta(t) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \quad \text{pro } t \in \langle t_n, t_{n+1} \rangle \quad n = 1, 2, \dots$$

Přítom přirozené číslo p ve vzorci (3.82) volíme tak velké, aby pro derivace zleva a zprava v bodě t_1 platilo

$$\eta'(t_1 - 0) < \eta'(t_1 + 0).$$

Je zřejmé, že

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \eta(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \eta(t) = 0,$$

a dále vzhledem k volbě hodnot t_n

$$\zeta(t) \leq \eta(t) \quad \text{pro } t \geq t_1.$$

Dále je zřejmé, že funkce $\eta(t)$ je klesající a existuje k ní tedy na intervalu $(0, +\infty)$ inverzní funkce $\tau(\eta)$. Položme

$$(3.84) \quad G(\eta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\tau(\alpha)}}{M(\tau(\alpha))} d\alpha.$$

Funkce (3.84) má zřejmě vlastnosti, předpokládané v (i) a (ii). Abychom prokázali konvergenci integrálu (3.77) a tím vlastnost (iii), stačí se omezit na integrál v intervalu $\langle t_1, +\infty \rangle$. Máme postupně

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^\infty G(\zeta(t)) dt &= \int_{t_1}^\infty \int_0^{\zeta(t)} \frac{e^{-\tau(\alpha)}}{M[\tau(\alpha)]} d\alpha dt > \\ &> \int_{t_1}^\infty \int_0^{\eta(t)} \frac{e^{-\tau(\alpha)}}{M(0)} d\alpha dt = \int_{t_1}^\infty \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{M(0)} \eta'(\tau) d\tau dt, \end{aligned}$$

kde jsme v poslední rovnosti užili substituci $\alpha = \eta(\tau)$. Jelikož pro $\tau > t_1$ je $|\eta'(\tau)| < 1$, vyplývá odtud konvergence integrálu (3.77).

Dále uvažme, že

$$(3.85) \quad G'(\zeta(t)) = \frac{e^{-\zeta(t)}}{M[\zeta(t)]}.$$

Pro $t \geq t_1$ platí odhad

$$\zeta(t) \leq \zeta(t) \leq \eta(t)$$

a jelikož inverzní funkce $\tau(\eta)$ je spolu s $\eta(t)$ klesající, je

$$\tau(\zeta(t)) \geq \tau(\eta(t)) = t.$$

Funkce $M(t)$ je neklesající a z rovnosti (3.85) vyplývá

$$G'(\zeta(t)) \leq \frac{e^{-t}}{M(t)}.$$

Z této poslední nerovnosti vyplývá stejnoměrná konvergence integrálu (3.79), čímž je dokázána vlastnost (iv).

Utvořme dále funkci

$$(3.86) \quad V(t, \mathbf{x}) = \int_t^\infty G(\|\mathbf{x}(\tau; t, \mathbf{x})\|^2) d\tau.$$

Ukážeme předně, že funkce (3.86) je pro $t \geq 0$ a pro $\|\mathbf{x}\| \leq h$ spojitá. Vezměme $\tau \geq t$ a nechť

$$T = \tau - m\omega,$$

kde m je takové celé číslo, že

$$0 \leq t - m\omega < \omega.$$

Potom vzhledem k předpokládané periodicitě pravé strany rovnice (3.14) je patrné, že

$$\|\mathbf{x}(\tau; t, \mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{x}(T; t - m\omega, \mathbf{x})\|^2 = \zeta(T),$$

kde funkce $\zeta(T)$ při libovolných $t \geq 0$ a $\|\mathbf{x}\| \leq h$ vyhovuje nerovnosti

$$\zeta(T) \leq \xi(T).$$

Jestliže zavedeme T jako novou integrační proměnnou v (3.86), máme

$$V(t, \mathbf{x}) = \int_{t-m\omega}^\infty G(\zeta(T)) dT$$

a tento integrál vzhledem k vlastnostem (iii) funkce G konverguje stejnoměrně vzhledem k $\zeta(t)$, tedy i stejnoměrně vzhledem k zvoleným t a \mathbf{x} . Funkce $V(t, \mathbf{x})$ je tedy spojitá.

Určíme parciální derivace funkce $V(t, \mathbf{x})$. Formálně lze psát

$$(3.87) \quad \frac{\partial V}{\partial x_i} = \int_t^\infty G'(\|\mathbf{x}(\tau; t, \mathbf{x})\|^2) \frac{\partial \|\mathbf{x}(\tau; t, \mathbf{x})\|^2}{\partial x_i} d\tau, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(3.88) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -G(\|\mathbf{x}(t)\|^2) + \int_t^\infty G'(\|\mathbf{x}(\tau; t, \mathbf{x})\|^2) \frac{\partial \|\mathbf{x}(\tau; t, \mathbf{x})\|^2}{\partial t} d\tau.$$

Avšak, vzhledem k vlastnosti (iv) funkce G , integrály na pravých stranách těchto rovností stejnoměrně konvergují pro $t \in (0, +\infty)$, $\|\mathbf{x}\| \leq h$ a uvedené výrazy jsou tedy vskutku spojitými parciálními derivacemi funkce $V(t, \mathbf{x})$.

Je skoro zřejmé, že funkce $V(t, \mathbf{x})$ je periodická s periodou ω a pokud pravá strana v rovnici (3.14) nezávisí na t , ani $V(t, \mathbf{x})$ explicitně nezávisí na t . Funkce $V(t, \mathbf{x})$ je pozitivní, což plyne z toho, že podintegrální výraz v (3.86) je nezáporný. Označme

$$W(\mathbf{x}) = \inf_{t \in \langle 0, \omega \rangle} V(t, \mathbf{x}).$$

Předpoklad $W(\mathbf{x}) = 0$ pro $\|\mathbf{x}\| \neq 0$ odporuje vzhledem k rovnosti (3.86) vlastnosti (i) funkce G . Funkce $W(\mathbf{x})$ a s ní i $V(t, \mathbf{x})$ jsou tedy pozitivně definitní.

Konečně časová derivace dV/dt v důsledku soustavy (3.14) je rovna

$$\frac{dV(t, \mathbf{x}(t))}{dt} = -G\left(\sum_{i=1}^n x_i^2(t)\right),$$

což je negativně definitní funkce, Q. E. D.

3.4. Stabilita soustav s klesající nelinearitou

V tomto odstavci si všimneme důležitého případu soustav, popsaných nelineární vektorovou diferenciální rovnicí

$$(3.89) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \varphi(t, \mathbf{x}(t)),$$

kde nelineární funkce

$$(3.90) \quad \varphi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0}$$

pro $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$. Normou se zde rozumí Eukleidova norma. Speciálně funkce (3.90) může představovat zbytek Taylorova rozvoje pravé strany rovnice (3.14) po prvním členu.

Budeme se snažit převést otázku stability řešení rovnice (3.89) na problém stability rovnice

$$(3.91) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t),$$

který jsme dosti podrobně vyšetřovali v předchozích dvou kapitolách. Je však skoro zřejmé, že předpoklad (3.90) je pro tento účel příliš slabý a je třeba jej vhodně zesílit. Abychom to nahlédli, stačí si uvědomit, že např. rovnici

$$\dot{x} - x = 0,$$

jejíž obecné řešení $x = Ce^t$ je nestabilní, lze přepsat ve tvaru

$$\dot{x} = -x + 2x;$$

funkce $\varphi(x) = 2x$ vyhovuje požadavku (3.90) a sama rovnice $\dot{x} = -x$ je ovšem stabilní.

Všimneme si nejprve případu, kdy matice \mathbf{A} v rovnici (3.89) je konstantní. Potom platí tato

Věta 3.8 (A. M. Ljapunov). *Nechť všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} mají záporné reálné části. Nechť funkce $\varphi(t, \mathbf{x})$ je spojitá a nechť stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ platí*

$$(3.92) \quad \frac{\varphi(t, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{pro } \|\mathbf{x}\| \rightarrow 0.$$

Potom triviální řešení soustavy

$$(3.93) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \varphi(t, \mathbf{x}(t))$$

je asymptoticky stabilní v Ljapunovově smyslu pro $t \rightarrow +\infty$.

Důkaz. K důkazu použijeme druhé Ljapunovy věty (věta 3.2). Nechť $\xi(t; 0, \mathbf{x})$ je řešení rovnice

$$(3.94) \quad \dot{\xi}(t) = \mathbf{A} \xi(t).$$

Označíme-li jako $\mathbf{X}(t)$ fundamentální matici této soustavy, jež vyhovuje vedlejší podmínce

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{E},$$

potom

$$\xi(t; 0, \mathbf{x}) = \mathbf{X}(t) \mathbf{x}$$

a dále (pro $t \geq 0$)

$$(3.95) \quad \|\xi(t)\| \leq \|\mathbf{X}(t)\| \|\mathbf{x}\| \leq K e^{\varrho t} \|\mathbf{x}\|,$$

kde K je nějaká konstanta a číslo $\varrho < 0$ volíme z intervalu $(\max \operatorname{Re}(\lambda_j), 0)$. Utvoříme funkci

$$(3.96) \quad V(\mathbf{x}) = \int_0^{\infty} \|\xi(t; 0, \mathbf{x})\|^2 dt.$$

Z nerovnosti (3.95) vyplývá konvergence integrálu (3.96). Z jednoznačnosti řešení soustavy (3.94) vyplývá, že

$$V(\mathbf{0}) = 0;$$

pokud $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, nemůže ze stejného důvodu platit $\xi = \mathbf{0}$ skoro všude. Je tedy v tomto případě

$$V(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

a funkce (3.96) je tedy pozitivně definitní. Dále vypočteme časovou derivaci funkce

(3.96) v důsledku soustavy (3.90). Jelikož $\mathbf{x} = \xi(t; 0, \mathbf{x})$ pro $t = 0$, lze psát

$$(3.97) \quad \left. \frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} \right|_{(90)} = \left[\frac{d}{dt} V(\xi(t; 0, \mathbf{x})) \right]_{t=0}.$$

Avšak

$$\begin{aligned} V(\xi(t; 0, \mathbf{x})) &= \int_0^\infty \|\xi(\tau; \xi(t; 0, \mathbf{x}))\|^2 d\tau = \\ &= \int_0^\infty \|\xi(t + \tau; 0, \mathbf{x})\|^2 d\tau = \int_t^\infty \|\xi(s; 0, \mathbf{x})\|^2 ds. \end{aligned}$$

Je tedy podle (3.97)

$$\left. \frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} \right|_{(90)} = \left[\frac{d}{dt} \int_t^\infty \|\xi(s; 0, \mathbf{x})\|^2 ds \right]_{t=0} = [-\|\xi(t; 0, \mathbf{x})\|^2]_{t=0},$$

takže časová derivace funkce $V(\mathbf{x})$ v důsledku soustavy (3.90) je rovna

$$\left. \frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} \right|_{(90)} = -\|\mathbf{x}\|^2.$$

Abychom dostali časovou derivaci v důsledku soustavy (3.93), musíme k tomuto výrazu přičíst člen

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \varphi_i(t, \mathbf{x}) = (\text{grad } V, \varphi(t, \mathbf{x})).$$

Funkci $V(\mathbf{x})$ můžeme přepsat

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^\infty (\mathbf{X}(\tau) \mathbf{x}, \mathbf{X}(\tau) \mathbf{x}) d\tau = \left(\int_0^\infty \mathbf{X}^T(\tau) \mathbf{X}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \right) = (\mathcal{V} \mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

takže

$$\text{grad } V(\mathbf{x}) = 2\mathcal{V} \mathbf{x}.$$

Podle předpokladu (3.92) je pro dostatečně malé $\|\mathbf{x}\| < \delta_\varepsilon$

$$\|\varphi(t, \mathbf{x})\| < \varepsilon \|\mathbf{x}\|.$$

Časovou derivaci funkce $V(\mathbf{x})$ v důsledku soustavy (3.93) lze tedy odhadnout postupně takto

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} \right|_{(93)} &= -\|\mathbf{x}\|^2 + (2\mathcal{V} \mathbf{x}, \varphi(t, \mathbf{x})) \leq \\ &\leq -\|\mathbf{x}\|^2 + 2\varepsilon \|\mathcal{V}\| \|\mathbf{x}\|^2 = -(1 - 2\varepsilon \|\mathcal{V}\|) \|\mathbf{x}\|^2. \end{aligned}$$

Jestliže ε a $\|\mathbf{x}\|$ jsou dostatečně malé, je tento výraz záporný, pokud ovšem $\mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$; z prvé rovnosti zde však vyplývá

$$\left. \frac{dV(\mathbf{0})}{dt} \right|_{(9.3)} = 0.$$

$V(\mathbf{x})$ je tedy v nějakém okolí počátku pozitivně definitní funkce, nezávislá na t , jež má v tomto okolí negativně definitní derivaci v důsledku soustavy (3.93). Tato funkce splňuje všechny požadavky druhé Ljapunovovy věty a triviální řešení soustavy (3.93) je asymptoticky stabilní, Q. E. D.

Poznámka. Uvažujme autonomní soustavu s dostatečně hladkou pravou stranou $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Jestliže $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ a jestliže platí rozvoj

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right]_{j,k=1,\dots,n} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{o}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|),$$

ze zavedením nové proměnné $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ soustavu převést na tvar

$$\dot{\mathbf{y}} = \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right]_{j,k=1,\dots,n} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y}\|).$$

Z dokázané věty 3.8 vyplývá potom asymptotická stabilita řešení $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$, pokud všechna vlastní čísla Jakobiho matice $[\partial f_j / \partial x_k]$ mají záporné reálné části.

Podmínka, aby všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} ležela v levé polorovině, je postačující podmínkou asymptotické stability; ukážeme nyní, že naopak existence aspoň jednoho vlastního čísla v pravé polorovině zaručuje již nestabilitu nulového řešení.

Věta 3.9. *Nechť aspoň jedno vlastní číslo matice \mathbf{A} má kladnou reálnou část. Nechť funkce $\varphi(t, \mathbf{x})$ splňuje předpoklady věty 3.8. Potom triviální řešení soustavy (3.93) je nestabilní v Ljapunovově smyslu pro $t \rightarrow +\infty$.*

Důkaz. Označme vlastní čísla matice \mathbf{A} jako

$$(3.98) \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n.$$

Jelikož nezáleží na pořadí, lze předpokládat, že

$$(3.99) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_i &> 0 \quad \text{pro } i = 1, \dots, k, \quad k \geq 1, \\ \operatorname{Re} \lambda_{k+j} &\leq 0 \quad \text{pro } j = 1, \dots, n - k. \end{aligned}$$

Matici \mathbf{A} lze užitím zobrazení podobnosti s regulární maticí \mathbf{T} převést na tvar

$$(3.100) \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{L} + \mathbf{B},$$

kde \mathbf{L} je diagonální matice, utvořená z vlastních čísel matice \mathbf{A} . Každá matice tvaru

$$(3.101) \quad \begin{pmatrix} \lambda & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ 0 & \lambda & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

pro kterou

$$b_{12}b_{23} \dots b_{s-1,s} \neq 0,$$

je podobná matici

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Je tedy naopak každé diagonální pole matice v Jordanově kanonickém tvaru podobné nějaké matici (3.101), přičemž lze navíc zaručit, že např. všechna $|b_{ij}| < \varepsilon$. Jelikož matice \mathbf{A} je podobná Jordanově matici, lze zvolit \mathbf{T} tak, aby matice \mathbf{B} ve vyjádření (3.100) měla nenulové prvky pouze nad hlavní diagonálou a aby $\|\mathbf{B}\| < \varepsilon$.

Zvolme dále číslo α takové, že

$$0 < \alpha < \operatorname{Re} \lambda_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

a položíme

$$(3.102) \quad \mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} \mathbf{T} \mathbf{y}(t).$$

Dosažením do soustavy (3.93) dostáváme

$$e^{\alpha t} \mathbf{T} \dot{\mathbf{y}} = -\alpha e^{\alpha t} \mathbf{T} \mathbf{y}(t) + e^{\alpha t} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{y}(t) + \varphi(t, e^{\alpha t} \mathbf{T} \mathbf{y}(t)),$$

neboli

$$(3.103) \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = (-\alpha \mathbf{E} + \mathbf{L} + \mathbf{B}) \mathbf{y}(t) + \psi(t, \mathbf{y}(t)),$$

kde

$$(3.104) \quad \psi(t, \mathbf{y}(t)) = e^{-\alpha t} \mathbf{T}^{-1} \varphi(t, e^{\alpha t} \mathbf{T} \mathbf{y}(t)).$$

Podmínka

$$\|\mathbf{x}\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|\varphi(t, \mathbf{x})\| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|$$

dává pro funkci $\psi(t, \mathbf{y})$

$$(3.105) \quad \|\mathbf{y}\| \leq e^{-\alpha t} \|\mathbf{T}\|^{-1} \delta_\varepsilon \Rightarrow \|\psi(t, \mathbf{y})\| \leq \varepsilon \|\mathbf{T}^{-1}\| \|\mathbf{T}\| \|\mathbf{y}\|.$$

Označme ještě pro $i = 1, \dots, n$

$$(3.106) \quad \mu_i = \lambda_i - \alpha$$

a diagonální matici tvořenou čísly μ_i označme \mathbf{M} . Při tomto označení lze soustavu (3.103) vyjádřit takto

$$(3.107) \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{M} + \mathbf{B}) \mathbf{y}(t) + \psi(t, \mathbf{y}(t)).$$

Poznamenejme ještě, že $\mu_i \neq 0$ a že $\operatorname{Re} \mu_i > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i > 0$. Zavedeme funkci

$$(3.108) \quad V(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k |y_i|^2 - \sum_{j=1}^{n-k} |y_{k+j}|^2 \right).$$

Pro výpočet její časové derivace užitíme vztahu

$$\frac{d}{dt} |y_i|^2 = \bar{y}_i \frac{dy_i}{dt} + y_i \frac{d\bar{y}_i}{dt},$$

kde pruhem značíme veličinu komplexně sdruženou. Obdobně k (3.108) platí pro tuto komplexně sdružená řešení

$$\frac{d\bar{\mathbf{y}}}{dt} = (\bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{B}}) \bar{\mathbf{y}}(t) + \bar{\psi}(t, \bar{\mathbf{y}}(t)),$$

takže

$$(3.109) \quad \frac{dV(\mathbf{y})}{dt} = \sum_{i=1}^k \operatorname{Re} \mu_i |y_i|^2 + \sum_{j=1}^{n-k} (-\operatorname{Re} \mu_{k+j}) |y_{k+j}|^2 + 0(\varepsilon) \|\mathbf{y}\|^2.$$

Položme ještě

$$\beta = \min_{i=1, \dots, n} |\operatorname{Re} \mu_i|,$$

potom pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$

$$\frac{dV(\mathbf{y})}{dt} \geq (\beta - 0(\varepsilon)) \|\mathbf{y}\|^2 \geq \frac{1}{2}\beta \|\mathbf{y}\|^2 \geq \beta V(\mathbf{y}).$$

To znamená, že pro $V(\mathbf{y}(0)) > 0$ je

$$V(\mathbf{y}(t)) \geq V(\mathbf{y}(0)) e^{\beta t},$$

neboli

$$(3.110) \quad \|\mathbf{y}(t)\|^2 \geq 2V(\mathbf{y}(0)) e^{\beta t},$$

pokud $\mathbf{y}(t)$ vyhovuje prvé nerovnosti v implikaci (3.105). Necht' platí nyní zároveň nerovnosti

$$0 < \|\mathbf{y}(0)\| < \Delta$$

a

$$V(\mathbf{y}(0)) > 0.$$

První podmínku lze splnit při libovolném $\Delta > 0$. Druhou podmínku lze splnit např. volbou $y_i(0) = 0$ pro $i = k + 1, \dots, n$. Z nerovnosti (3.110) vyplývá, že $\|\mathbf{y}(t)\|$ je rostoucí a tedy existuje $\tau > 0$ takové, že

$$\|\mathbf{y}(\tau)\| \geq e^{-\alpha\tau} \|\mathbf{T}\|^{-1} \delta_\varepsilon.$$

Vyjádříme v této nerovnosti $\mathbf{y}(\tau)$ pomocí původní proměnné $\mathbf{x}(\tau)$; máme tedy pro

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \|\mathbf{T}\| \Delta$$

nerovnost

$$\|\mathbf{x}(\tau)\| \geq \frac{e^{\alpha\tau}}{\|\mathbf{T}^{-1}\|} \|\mathbf{y}(\tau)\| \geq \frac{\|\mathbf{T}\|^{-1}}{\|\mathbf{T}^{-1}\|} \delta_\varepsilon.$$

Jelikož při pevném ε a tím i pevném δ_ε platí tato nerovnost při libovolně malém $\Delta > 0$, je vidět, že triviální řešení je nestabilní v Ljapunovově smyslu pro $t \rightarrow +\infty$, Q. E. D.

Všimneme si nyní obecnějšího případu, kdy matice lineární části pravé strany vektorové diferenciální rovnice je funkcí proměnné t , tedy soustavy, popsané rovnicí

$$(3.111) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \varphi(t, \mathbf{x}(t))$$

na intervalu $\langle t_0, +\infty \rangle$. O prvcích matice $\mathbf{A}(t)$ budeme nadále předpokládat, že jsou na $\langle t_0, +\infty \rangle$ spojité a omezené.

Nejprve se budeme zabývat lineární soustavou

$$(3.112) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t).$$

Označme jako $\mathbf{X}(t)$ normální fundamentální matici soustavy (3.112), to jest takovou fundamentální matici, pro níž je číslo $s(\mathbf{X})$, definované výše výrazem (2.65), minimální.

Definice 3.7. Lineární soustava (3.111), jejíž matice $\mathbf{A}(t)$ je tvořena spojitými omezenými funkcemi, se nazývá regulární v Ljapunovově smyslu, jestliže pro její normální fundamentální soustavu platí

$$(3.113) \quad s(\mathbf{X}) = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{sp} \mathbf{A}(\tau) \, d\tau,$$

kde $s(\mathbf{X})$ je dáno výrazem (2.65).

Poznamenejme, že z rovnosti (3.113) vyplývá existence vlastní limity

$$(3.114) \quad L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{sp} \mathbf{A}(\tau) \, d\tau$$

a že tato limita je rovna výrazu (3.113). K tomu stačí připomenout Ljapunovovu nerovnost (2.66), dokázanou výše v lemmatu 2.17. Z této nerovnosti vyplývá, že

$$s(\mathbf{X}) \geq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{sp} \mathbf{A}(\tau) \, d\tau,$$

což spolu s rovností (3.113) zaručuje existenci limity (3.114) a rovnost

$$s(\mathbf{X}) = L.$$

Jistou představou o regulárních soustavách poskytne tvrzení, jež zde uvedeme bez důkazu (srov. např. [5], [11]).

Lemma 3.3. *Každá lineární soustava (3.112), kterou lze převést nějakou Ljapunovovou transformací (2.69) na soustavu s konstantní maticí (2.75), je regulární ve smyslu definice 3.7.*

Označme

$$(3.115) \quad \mathbf{K}(t, \tau) = \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^{-1}(\tau)$$

tak zvanou *Cauchyovu matici* soustavy (3.112). Tato matice má obdobný význam jako Greenova funkce v jednorozměrném případě. Skutečně, vektorová funkce

$$\mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{K}(t, \tau) \mathbf{b}(\tau) \, d\tau$$

je, jak se snadno přesvědčíme dosazením, řešením soustavy

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{0}.$$

V dalším budeme potřebovat toto

Lemma 3.4. *Jestliže všechny charakteristické exponenty normální fundamentální matice $\mathbf{X}(t)$ regulární soustavy (3.112) jsou záporné, potom její Cauchyova matice (3.115) vyhovuje pro každé $\varepsilon > 0$ nerovnosti*

$$(3.116) \quad \|\mathbf{K}(t, \tau)\| \leq c(\varepsilon, t_0) e^{\varepsilon \tau}$$

pro $\tau \in \langle t_0, t \rangle$; číslo $c(\varepsilon, t_0)$ je kladné.

Důkaz. Necht $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou charakteristické exponenty sloupců matice $\mathbf{X}(t)$. Označme

$$(3.117) \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Snadno se přesvědčíme, že

$$(3.118) \quad \chi[\mathbf{X}(t) \exp(-\alpha t)] = \max_{j,k} \chi[x_{jk}(t) e^{-\alpha_k t}] = 0.$$

Jak ukázal O. Perron (srov. [31]) mají řádky inverzní matice $\mathbf{X}^{-1}(t)$ charakteristické exponenty $-\alpha_1, \dots, -\alpha_n$ a obdobně jako (3.118) platí

$$(3.119) \quad \chi[\exp(\alpha t) \mathbf{X}^{-1}(t)] = 0.$$

Pro $\tau \in \langle t_0, t \rangle$ je možné Cauchyovu matici zapsat ve tvaru

$$\mathbf{K}(t, \tau) = \mathbf{X}(t) \exp(-\alpha t) \exp[\alpha(t - \tau)] \exp(\alpha \tau) \mathbf{X}^{-1}(\tau),$$

neboť součin exponenciál je zde roven jednotkové matici. Z tohoto vyjádření vyplývá nerovnost pro normy

$$\|\mathbf{K}(t, \tau)\| \leq \|\mathbf{X}(t) \exp(-\alpha t)\| \|\exp[\alpha(t - \tau)]\| \|\exp(\alpha \tau) \mathbf{X}^{-1}(\tau)\|.$$

Užitím dříve dokázaného lemmatu 2.5 lze však s přihlédnutím k rovnostem (3.118) a (3.119) dospět odtud k odhadu, platnému pro každé $\varepsilon > 0$:

$$\|\mathbf{K}(t, \tau)\| \leq c(\varepsilon, t_0) e^{\varepsilon t/2} e^{(\max_k \alpha_k + \varepsilon/2)(t - \tau)} e^{\varepsilon \tau/2} = c(\varepsilon, t_0) e^{(\max_k \alpha_k + \varepsilon)(t - \tau)} e^{\varepsilon \tau}.$$

Jelikož všechna $\alpha_k < 0$ dle předpokladu, plyne odtud při dostatečně malém $\varepsilon > 0$ nerovnost (3.116), Q.E.D.

Dokážeme ještě jedno pomocné tvrzení, které použijeme níže při důkazu věty 3.10. Toto tvrzení bylo publikováno v r. 1956 maďarským matematikem I. Biharim.

Lemma 3.5. *Nechť $u(t)$ a $f(t)$ jsou omezené, spojitě a nezáporné funkce na $\langle t_0, +\infty \rangle$. Nechť $C > 0$ je konstanta a $\varphi(u)$ necht' je kladná spojitá neklesající funkce na $(0, u)$, $u \leq +\infty$. Označme*

$$(3.120) \quad \psi(u) = \int_C^u \frac{dv}{\varphi(v)}, \quad u \in (0, u).$$

Nechť platí pro $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ nerovnosti

$$(3.121) \quad u(t) \leq C + \int_{t_0}^t f(\tau) \varphi(u(\tau)) d\tau$$

a

$$(3.122) \quad \int_{t_0}^u f(\tau) d\tau < \lim_{u \rightarrow U^-} \psi(u).$$

Potom platí pro $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$

$$(3.123) \quad u(t) \leq \psi^{-1} \left[\int_{t_0}^t f(\tau) \, d\tau \right],$$

kde $\psi^{-1}(u)$ je funkce inverzní k $\psi(u)$.

Důkaz. Jelikož funkce $\varphi(u)$ je neklesající, vyplývá z nerovnosti (3.121)

$$\varphi(u(t)) \leq \varphi \left(C + \int_{t_0}^t f(\tau) \varphi(u(\tau)) \, d\tau \right);$$

odtud snadnou úpravou a poté integrací v mezích t_0, t dostáváme

$$\int_{t_0}^t \frac{f(s) \varphi(u(s))}{\varphi \left(C + \int_{t_0}^s f(\tau) \varphi(u(\tau)) \, d\tau \right)} \, ds \leq \int_{t_0}^t f(\tau) \, d\tau.$$

Označíme-li pravou stranu v nerovnosti (3.121) jako $w(t)$, lze tuto nerovnost přepsat do tvaru

$$\int_{t_0}^t \frac{w'(s)}{\varphi(w(s))} \, ds = \int_{w(t_0)}^{w(t)} \frac{dw}{\varphi(w)} \leq \int_{t_0}^t f(\tau) \, d\tau.$$

Jelikož $w(t_0) = C$, plyne odtud a z rovnosti (3.120) nerovnost

$$(3.124) \quad \psi(w(t)) \leq \int_{t_0}^t f(\tau) \, d\tau.$$

Funkce $\psi(u)$ má pro $u \in (0, u)$ kladnou derivaci

$$\psi'(u) = \frac{1}{\varphi(u)} > 0,$$

takže inverzní funkce $\psi^{-1}(v)$ je rostoucí pro

$$v \in \left(\lim_{u \rightarrow 0^+} \psi(u), \lim_{u \rightarrow u^-} \psi(u) \right);$$

z nerovnosti (3.124) vyplývá pro $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$

$$w(t) \leq \psi^{-1} \left(\int_{t_0}^t f(\tau) \, d\tau \right)$$

a to spolu s nerovností (2.121) dokazuje nerovnost (3.123). Q.E.D.

Vyslovíme a dokážeme nyní velmi důležitou větu o exponenciální stabilitě (srov. definici 3.6) soustavy (3.111).

Věta 3.10 (A. M. Ljapunov). *Nechť soustava (3.112) je regulární ve smyslu definice 3.7 a necht' všechny charakteristické exponenty její libovolně fundamentální matice jsou záporné. Necht' dále pro normu matice \mathbf{A} danou výrazem (2.37) platí*

$$(3.125) \quad \sup_{t \in \langle t_0, +\infty \rangle} \|\mathbf{A}(t)\|_t < +\infty$$

a necht' funkce $\varphi(t, \mathbf{x})$ je spojitá omezená funkce pro $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$, jež má spojitě parciální derivace podle proměnných x_i , $i = 1, \dots, n$, pro $\|\mathbf{x}\| < h$ a jež pro uvedené t a \mathbf{x} vyhovuje nerovnosti

$$(3.126) \quad \|\varphi(t, \mathbf{x})\| \leq r(t) \|\mathbf{x}\|^m,$$

přičemž $m > 1$ a $r(t)$ je spojitá kladná funkce pro $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ taková, že

$$(3.127) \quad \chi[r(t)] = 0.$$

Potom triviální řešení soustavy (3.111) je exponenciálně stabilní (a tedy i asymptoticky stabilní) pro $t \rightarrow +\infty$ v Ljapunovově smyslu.

Důkaz. Zvolíme nejprve kladné číslo β , které vyhovuje nerovnostem

$$(3.128) \quad 0 < \beta < -\max \alpha_k,$$

kde α_k jsou všechny možné charakteristické exponenty řešení soustavy (3.112). V soustavě (3.111) přejdeme od proměnné \mathbf{x} k \mathbf{y} podle vztahu

$$(3.129) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) e^{-\beta(t-t_0)}.$$

Nové soustavě odpovídá rovnice

$$(3.130) \quad \mathbf{y}'(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{y}(t) + \psi(t, \mathbf{y}(t));$$

dosažením výrazu (3.129) do rovnice (3.111) získáme snadno vyjádření

$$(3.131) \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{A}(t) + \beta \mathbf{E}$$

a

$$(3.132) \quad \psi(t, \mathbf{y}(t)) = e^{\beta(t-t_0)} \varphi(t, \mathbf{y} e^{-\beta(t-t_0)}).$$

Mimoto počáteční podmínka se transformací (3.129) nezmění, neboť zřejmě z rovnosti (3.129) pro $t = t_0$ vyplývá

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$$

a funkce $\psi(t, \mathbf{y}(t))$ je spojitá omezená pro $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ a má spojitě derivace podle proměnných y_i , $i = 1, \dots, n$, pro $\|\mathbf{y}\| < h e^{\beta(t-t_0)}$.

Ukážeme, že soustava

$$(3.133) \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{y}(t)$$

je regulární v Ljapunovově smyslu. Především charakteristickým exponentům α_k soustavy (3.112) odpovídají vzájemně jednoznačně charakteristické exponenty

$$(3.134) \quad \beta_k = \alpha_k + \beta, \quad k = 1, \dots, n,$$

jež jsou vzhledem k nerovnosti (3.128) záporné. Dále s využitím vztahu (3.131) a předpokladu o regularitě soustavy (3.112) máme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{sp } \mathbf{B}(\tau) \, d\tau = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{sp } (\mathbf{A}(\tau) + \beta \mathbf{E}) \, d\tau = \sum_{k=1}^n \alpha_k + n\beta = \sum_{k=1}^n \beta_k,$$

takže soustava (3.113) je vskutku regulární.

Nechť $\mathbf{Y}(t)$ je fundamentální matice soustavy (3.133), jež vyhovuje podmínce

$$\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{E};$$

rovnice (3.130) při zadané počáteční hodnotě vektoru $\mathbf{y}(t_0)$ je pak ekvivalentní integrální rovnici

$$(3.135) \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{Y}(t) \mathbf{Y}^{-1}(\tau) \psi(\tau, \mathbf{y}) \, d\tau.$$

V další části důkazu odhadneme shora normu $\|\mathbf{y}(t)\|$. Pokud $\|\mathbf{y}(t_0)\| < h$, existuje podle lokální věty o existenci řešení právě jedno řešení $\mathbf{y}(t)$ rovnice (3.130), a tedy také rovnice (3.135), které je definováno a splňuje nerovnost

$$(3.136) \quad \|\mathbf{y}(t)\| < h$$

na nějakém intervalu $\langle t_0, T \rangle$, kde $T > t_0$. Nižší ukážeme, že při dostatečně malém $\|\mathbf{y}(t_0)\|$ lze zaručit existenci řešení $\mathbf{y}(t)$, jež vyhovuje nerovnosti (3.136), na celém $\langle t_0, +\infty \rangle$.

Jelikož všechny charakteristické exponenty sloupců matice $\mathbf{Y}(t)$ jsou záporné, je tato matice pro $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ omezená v normě, tedy

$$(3.137) \quad \|\mathbf{Y}(t)\| \leq C_1.$$

Z lemmatu 3.4. snadno vyplývá, že pro každé $\varepsilon > 0$ a pro $t_0 \leq \tau \leq t < +\infty$ je splněna nerovnost

$$(3.138) \quad \|\mathbf{Y}(t) \mathbf{Y}^{-1}(\tau)\| \leq C_2(\varepsilon, t_0) e^{\varepsilon(t-\tau)}.$$

Normu funkce $\psi(t, \mathbf{y}(t))$ lze přepsat

$$\|\psi(t, \mathbf{y}(t))\| = e^{\beta(t-t_0)} \|\varphi(t, \mathbf{y}(t) e^{-\beta(t-t_0)})\|$$

a vzhledem k předpokladu (3.126) platí odhad

$$\|\psi(t, \mathbf{y}(t))\| \leq e^{(1-m)\beta(t-t_0)} r(t) \|\mathbf{y}(t)\|^m,$$

kde $\chi[r(t)] = 0$. Existuje tedy kladná konstanta C_3 taková, že

$$(3.139) \quad \|\psi(t, \mathbf{y}(t))\| \leq C_3 e^{[\varepsilon - (m-1)\beta](t-t_0)} \|\mathbf{y}(t)\|^m.$$

Odhady (3.137) až (3.139) užitíme v nerovnosti, jež vyplývá pro $t \in \langle t_0, T \rangle$ z rovnice (3.135), totiž

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq \|\mathbf{Y}(t)\| \|\mathbf{y}(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|\mathbf{Y}(t) \mathbf{Y}^{-1}(\tau)\| \|\psi(\tau, \mathbf{y}(\tau))\| d\tau,$$

a obdržíme novou nerovnost

$$(3.140) \quad \|\mathbf{y}(t)\| \leq C_1 \|\mathbf{y}(t_0)\| + \int_{t_0}^t C_2 C_3 e^{[2\varepsilon - (m-1)\beta](\tau-t_0)} \|\mathbf{y}(\tau)\|^m d\tau.$$

Při dostatečně malém $\varepsilon > 0$ je také číslo

$$\delta = -[2\varepsilon - (m-1)\beta]$$

kladné a označíme-li $C_4 = C_1 C_2$, lze nerovnost (3.140) přepsat do tvaru

$$(3.141) \quad \|\mathbf{y}(t)\| \leq C_1 \|\mathbf{y}(t_0)\| + \int_{t_0}^t C_4 e^{-\delta(\tau-t_0)} \|\mathbf{y}(\tau)\|^m d\tau.$$

Nyní použijeme lemmatu 3.5; nerovnost (3.141) je přitom obdobou nerovnosti (3.121). Označíme ještě

$$\begin{aligned} C &= C_1 \|\mathbf{y}(t_0)\|, \\ f(\tau) &= C_4 e^{-\delta(\tau-t_0)}, \\ u(t) &= \|\mathbf{y}(t)\|, \\ \varphi(u) &= u^m, \quad u \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Ověříme předpoklad (3.122), to jest nerovnost

$$\int_{t_0}^t C_4 e^{-\delta(\tau-t_0)} d\tau < \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{C_1 \|\mathbf{y}(t_0)\|}^u v^{-m} dv,$$

neboli

$$\frac{C_4}{\delta} (1 - e^{-\delta(t-t_0)}) < \frac{1}{m-1} (C_1 \|\mathbf{y}(t_0)\|)^{-m+1}.$$

Levá strana této nerovnosti je vždy menší než C_4/δ ; nerovnost lze tedy splnit, pokud zvolíme dostatečně malé $\|\mathbf{y}(t_0)\|$. Ostatní předpoklady lemmatu 3.5 jsou zřejmě

splněny, takže pro dostatečně malé $\|\mathbf{y}(t_0)\|$ platí

$$(3.142) \quad \|\mathbf{y}(t)\| \leq \frac{C_1 \|\mathbf{y}(t_0)\|}{\left[1 - (m-1) C_1^{m-1} \|\mathbf{y}(t_0)\|^{m-1} \int_{t_0}^t C_4 e^{-\delta(\tau-t_0)} d\tau\right]^{1/(m-1)}}.$$

Je vidět, že zvolíme-li $\|\mathbf{y}(t_0)\|$ dostatečně malé,

$$(3.143) \quad \|\mathbf{y}(t_0)\| < \Delta,$$

lze docílit toho, aby pravá strana v nerovnosti (3.142) byla menší než předem dané číslo \tilde{h} , $0 < \tilde{h} < h$, a to pro všechna $t \geq t_0$. Levá strana nerovnosti (3.142) existuje, jak víme, pro $t \in \langle t_0, T \rangle$. Jelikož však pro tato t je splněna nerovnost

$$(3.144) \quad \|\mathbf{y}(t)\| < h' < h,$$

lze toto řešení prodloužit pro $t \geq T$. Avšak z nerovnosti (3.143) vyplývá, že (3.144) platí i pro tato $t \geq T$ a že tedy řešení $\mathbf{y}(t)$ lze prodloužit na celý interval $\langle t_0, +\infty \rangle$ při současném splnění nerovnosti (3.144). Z nerovnosti (3.144) dále plyne, že existuje konstanta $K > 0$ taková, že platí implikace

$$\|\mathbf{y}(t_0)\| < \Delta \Rightarrow \|\mathbf{y}(t)\| \leq K \|\mathbf{y}(t_0)\|;$$

přechodem k proměnné $\mathbf{x}(t)$ dostáváme podmínku exponenciální stability triviálního řešení soustavy (3.111), totiž

$$(3.145) \quad \|\mathbf{x}(t_0)\| < \Delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq K \|\mathbf{y}(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)},$$

Q.E.D.

Poznámka. A. M. Ljapunov vyslovil větu 3.10 ze slabšího předpokladu, že funkce $r(t)$ v nerovnosti (3.126) je kladná konstanta. Námí uvedená obecnější formulace a důkaz, využívající Bihariho lematu 3.5, jsou převzaty z knihy B. P. Dėmidoviče [11]. Dokážeme ještě tento odhad charakteristického exponentu řešení rovnice (3.111).

Lemma 3.6. *Nechť soustava (3.111) vyhovuje předpokladům, uvedeným ve větě 3.10. Potom existuje číslo $\Delta > 0$ takové, že pro každé řešení soustavy (3.111), které vyhovuje nerovnosti*

$$(3.146) \quad \|\mathbf{x}(t_0)\| < \Delta,$$

je

$$(3.147) \quad \chi[\mathbf{x}(t)] \leq \max \alpha_k,$$

kde α_k jsou charakteristické exponenty řešení lineární soustavy (3.112).

Důkaz. Lemma dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že pro každé $\Delta > 0$ existuje řešení $\mathbf{x}(t)$ soustavy (3.111), které vyhovuje nerovnosti (3.146) a přitom

$$(3.148) \quad \chi[\mathbf{x}(t)] = \alpha > \max \alpha_k .$$

Číslo α obecně závisí na volbě Δ .

Zvolme

$$-\beta = \max \alpha_k + \lambda(\alpha - \max \alpha_k) ,$$

kde $\lambda > 0$ je tak malé, aby bylo $-\beta < 0$.

Z druhé strany víme, že platí implikace (3.145), přitom $\Delta > 0$ bylo zvoleno tak, aby z nerovnosti (3.142) plynula nerovnost (3.144), a to je možné nezávisle na zvoleném β z intervalu $(0, -\max \alpha_k)$. Podle implikace (3.145) je při splnění nerovnosti (3.146)

$$\chi[\mathbf{x}(t)] \leq -\beta < \alpha + \lambda(\alpha - \max \alpha_k) .$$

Kdyby současně platila nerovnost (3.148), potom nutně

$$\max \alpha_k < \alpha \leq \max \alpha_k + \lambda(\alpha - \max \alpha_k) ,$$

neboli

$$\max \alpha_k - \alpha < 0 \leq (\max \alpha_k - \alpha)(1 - \lambda) ,$$

a tyto nerovnosti nemohou platit současně pro $\lambda < 1$, což je spor. Nutně tedy platí nerovnost (3.147), Q.E.D.

Jisté zobecnění věty 3.10 lze dokázat i pro soustavy typu (3.111), u nichž jejich lineární část (3.112) není regulární ve smyslu definice 3.7. Výsledek, který uvedeme, náleží italskému matematikovi J. L. Masserovi a pochází z r. 1956. Nejprve vyslovíme tuto definici

Definice 3.8. Necht prvky matice $\mathbf{A}(t)$ lineární soustavy (3.112) jsou spojitě omezené funkce na intervalu $\langle t_0, +\infty \rangle$. Necht $s(\mathbf{X})$ je dáno výrazem (2.65), přičemž \mathbf{X} je normální fundamentální matice soustavy (3.112).

Mírou iregularity nazýváme potom rozdíl

$$(3.149) \quad \varkappa = \sum_{k=1}^n \alpha_k - \liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \text{sp } \mathbf{A}(\tau) d\tau .$$

Míra iregularity je rovna 0, je-li soustava regulární, jinak je nezáporná, což plyne okamžitě z Ljapunovovy nerovnosti (2.66).

Věta 3.11 (J. L. Massera). *Necht v soustavě (3.111) je $\mathbf{A}(t)$ matice spojitých omezených funkcí na $\langle t_0, +\infty \rangle$, funkce $\varphi(t, \mathbf{x})$ necht je spojitá v $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ a necht má spojitě prvě parciální derivace podle složek vektoru \mathbf{x} pro $\|\mathbf{x}\| < h$, kde $h > 0$.*

Nechť dále funkce $\varphi(t, \mathbf{x})$ vyhovuje nerovnosti

$$(3.150) \quad \|\varphi(t, \mathbf{x})\| \leq r(t) \|\mathbf{x}\|^m \quad \text{pro } 0 \leq \|\mathbf{x}\| < h,$$

kde $m > 1$ a $r(t)$ je spojitá kladná na $\langle t_0, +\infty \rangle$ a nechť pro charakteristické exponenty řešení soustavy (3.112) platí nerovnost

$$(3.151) \quad \max \alpha_k < -\frac{\kappa}{m-1} \leq 0,$$

kde κ je míra iregularity lineární soustavy (3.112).

Potom triviální řešení $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ nelineární soustavy (3.111) je pro $t \rightarrow +\infty$ asymptoticky stabilní v Ljapunovově smyslu.

Důkaz. Zvolme číslo $\beta > 0$ tak, aby platily nerovnosti

$$(3.152) \quad \max \alpha_k < -\beta < -\frac{\kappa}{m-1}.$$

Utvořme diagonální matici

$$(3.153) \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta, & 0 & , \dots, & 0 \\ 0 & , & \alpha_2 + \beta, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & , & 0 & , \dots, & \alpha_n + \beta \end{pmatrix}$$

a označme jako $\mathbf{X}(t)$ fundamentální matici soustavy (3.112), která vyhovuje podmínce

$$(3.154) \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{E}.$$

Zavedeme novou proměnnou $\mathbf{y}(t)$ vztahem

$$(3.155) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{D}t) \mathbf{y}(t)$$

a budeme předpokládat, že $\mathbf{x}(t)$ je řešení soustavy (3.111). Platí tedy

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &\equiv \mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{D}t) \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{D}t) \mathbf{y}(t) - \\ &\quad - \mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{D}t) \mathbf{D} \mathbf{y}(t) = \\ &= \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{D}t) \mathbf{y}(t) + \varphi(t, \mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{D}t) \mathbf{y}(t)). \end{aligned}$$

Jelikož

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t),$$

ruší se předposlední sčítance obou stran poslední rovnosti a dostáváme novou diferenciální rovnici

$$(3.156) \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{D} \mathbf{y}(t) + \psi(t, \mathbf{y}(t)),$$

kde nelineární část pravé strany je

$$(3.157) \quad \psi(t, \mathbf{y}(t)) = \exp(\mathbf{D}t) \mathbf{X}^{-1}(t) \varphi(t, \mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{D}t) \mathbf{y}(t)).$$

Označíme ještě

$$w(t) = \det \mathbf{X}(t)$$

a symbolem $w_{ij}(t)$ budeme značit algebraický doplněk prvku $x_{ij}(t)$ determinantu $w(t)$.

Vypočteme derivaci

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_{11}(t), \dots, x_{1n}(t) \\ \dots \\ \dot{x}_{i1}(t), \dots, \dot{x}_{in}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t), \dots, x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_{j1}(t) & \dots & \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_{jn}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \delta_{ij} w(t) = \operatorname{sp} \mathbf{A}(t) w(t), \end{aligned}$$

takže

$$(3.158) \quad w(t) = w(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{sp} \mathbf{A}(\tau) d\tau\right).$$

V našem případě je $w(t_0) = \det \mathbf{E} = 1$ a odtud podle známého vzorce pro prvky inverzní matice

$$\mathbf{X}^{-1}(t) = \left(w_{ij}(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \operatorname{sp} \mathbf{A}(\tau) d\tau\right) \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Z toho vyplývají nerovnosti pro charakteristické exponenty

$$(3.159) \quad \begin{aligned} \chi[\exp(\mathbf{D}t) \mathbf{X}^{-1}(t)] &= \chi\left[\left(e^{(\alpha_i + \beta)t} w_{ij}(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \operatorname{sp} \mathbf{A}(\tau) d\tau\right)\right)_{i,j=1,\dots,n}\right] \leq \\ &\leq \max_{i,j} \left(\alpha_i + \beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j - \alpha_i - \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{sp} \mathbf{A}(\tau) d\tau\right) = \alpha + \beta \end{aligned}$$

a

$$(3.160) \quad \begin{aligned} \chi[\mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{D}t)] &= \\ &= \chi[(x_{ij}(t) e^{-(\alpha_j + \beta)t})_{i,j=1,\dots,n}] \leq \max_{i,j} (\alpha_j - (\alpha_j + \beta)) = -\beta. \end{aligned}$$

Jelikož zřejmě pro $t \rightarrow +\infty$ platí

$$\chi[\mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{D}t)] \rightarrow 0,$$

existuje konečná konstanta C taková, že pro všechna $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ je

$$(3.161) \quad \|\mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{D}t)\| \leq C.$$

Dále použijeme Ljapunovovu větu 3.8 o asymptotické stabilitě triviálního řešení na rovnici (3.156); k tomu budeme muset dokázat, že stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ je, obdobně ke vzorci (3.92),

$$(3.162) \quad \frac{\psi(t, \mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{pro } \|\mathbf{y}\| \rightarrow 0.$$

Uvažujme řešení $\mathbf{y}(t)$, které splňuje pro všechna $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ nerovnost

$$(3.163) \quad \|\mathbf{y}(t)\| < \frac{h}{C};$$

poznamenejme, že odpovídající řešení $\mathbf{x}(t)$ rovnice (3.111) lze užitím vzorce (3.155) a nerovností (3.161) odhadnout

$$(3.164) \quad \|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{D}t)\| \|\mathbf{y}(t)\| \leq C \frac{h}{C} = h.$$

Máme postupně, užijeme-li nerovnost (3.150) a rovnost (3.157),

$$\begin{aligned} \|\psi(t, \mathbf{y})\| &\leq \|\exp(\mathbf{D}t) \mathbf{X}^{-1}(t)\| \|\varphi(t, \mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{D}t) \mathbf{y})\| \leq \\ &\leq \|\exp(\mathbf{D}t) \mathbf{X}^{-1}(t)\| r(t) \|\mathbf{X}(t) \exp(-\mathbf{D}t)\|^m \|\mathbf{y}\|^m = \varrho(t) \|\mathbf{y}\|^m; \end{aligned}$$

užitím nerovností (3.159) a (3.160) snadno dostaneme nerovnost pro charakteristický exponent funkce $\varrho(t)$, určené poslední rovností,

$$\chi[\varrho(t)] \leq \alpha + \beta - m\beta = \alpha - (m-1)\beta,$$

a vzhledem k tomu, že číslo β vyhovuje nerovnostem (3.152), je tedy

$$\chi[\varrho(t)] < 0.$$

To však znamená, že pro $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ a $\|\mathbf{y}\| < h/M$ je

$$\|\psi(t, \mathbf{y})\| \leq k \|\mathbf{y}\|^m,$$

kde $k > 0$ je konstanta. Soustava (3.156) splňuje tedy předpoklady věty 3.8 a její triviální řešení $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ je asymptoticky stabilní v Ljapunovově smyslu po $t \rightarrow +\infty$. Vzhledem k rovnosti (3.155) a k nerovnosti (3.160) je však patrné, že totéž platí i pro triviální řešení $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ soustavy (3.111), Q.E.D.

Dokážeme ještě odhad charakteristických exponentů řešení soustavy (3.111) za předpokladů věty 3.11. Uvedené tvrzení bude zcela analogické lemmatu 3.6.

Lemma 3.7. *Nechť soustava (3.111) vyhovuje předpokladům, uvedeným ve větě 3.11. Potom existuje číslo $\Delta > 0$ takové, že pro každé řešení soustavy (3.111), které vyhovuje nerovnosti*

$$(3.165) \quad \|\mathbf{x}(t_0)\| < \Delta,$$

je

$$(3.166) \quad \chi[\mathbf{x}(t)] \leq \max \alpha_k,$$

kde α_k jsou charakteristické exponenty řešení lineární soustavy (3.112).

Důkaz. Vyjdeme ze vztahu (3.155); užijeme-li dále nerovnost (3.159) a okolnost, že funkce $\mathbf{y}(t)$ je v normě omezená pro $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$, dostáváme nerovnost

$$(3.167) \quad \chi[\mathbf{x}(t)] \leq -\beta,$$

platnou při dostatečně malém $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \Delta$ pro každé β , jež vyhovuje nerovnostem (3.152). Z toho okamžitě vyplývá nerovnost (3.166). Q.E.D.

Nakonec se ještě zmíníme o problému stability obecné nelineární soustavy

$$(3.168) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)).$$

V tomto případě užitím metodiky Ljapunovových funkcí budeme moci za dosti slabých předpokladů o hladkosti funkce $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ dokázat nutnou a postačující podmínku omezenosti řešení. Nejprve vyslovíme tuto definici

Definice 3.9. Říkáme, že soustava popsaná vektorovou diferenciální rovnicí (3.168) je na intervalu $(a, +\infty)$ *stabilní v Lagrangeově smyslu*, jestliže každé řešení $\mathbf{x}(t)$, jež vyhovuje počáteční podmínce

$$(3.169) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

kde

$$(3.170) \quad t_0 \in (a, +\infty).$$

a kde

$$(3.171) \quad \|\mathbf{x}_0\| < +\infty,$$

má smysl pro všechna $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ a jestliže pro všechna tato t je $\|\mathbf{x}(t)\|$ omezená.

Dokážeme nyní větu o stabilitě v Lagrangeově smyslu, kterou odvodil v r. 1954 japonský matematik T. Yoshizawa.

Věta 3.12. *Nechť funkce $f(t, \mathbf{x})$ je spojitá v t pro $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ a nechť má spojitě parciální derivace podle všech proměnných x_i , $i = 1, \dots, n$, na E_n . Potom soustava popsaná rovnicí (3.168) bude stabilní v Lagrangeově smyslu, právě když existuje funkce $V(t, \mathbf{y})$ s těmito vlastnostmi:*

(i) *K funkci $V(t, \mathbf{y})$ existuje funkce $W(\mathbf{y})$ taková, že pro všechna $\mathbf{y} \in E_n$ je*

$$(3.172) \quad V(t, \mathbf{y}) \geq W(\mathbf{y}),$$

přičemž

$$(3.173) \quad \lim_{\|\mathbf{y}\| \rightarrow +\infty} W(\mathbf{y}) = +\infty.$$

(ii) *Pro každé řešení $\mathbf{x}(t)$ soustavy (3.168) je funkce $V(t, \mathbf{x}(t))$ nerostoucí funkcí proměnné t .*

Důkaz. Dokážeme odděleně nutnost a postačitelnost podmínek (i) a (ii).

Nutnost. Nechť tedy každé řešení soustavy (3.168) existuje na celém intervalu $\langle t_0, +\infty \rangle$ a je tam v normě omezené. Stejně jako v dřívějším výkladu budeme užívat pro řešení $\mathbf{x}(t)$, které vyhovuje počáteční podmínce (3.168), symbolu $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$.

Utvořme funkci pro $t > a$ a $\|\mathbf{y}\| < +\infty$

$$(3.174) \quad V(t, \mathbf{y}) = \sup_{\tau \geq 0} \|\mathbf{x}(t + \tau; t, \mathbf{y})\|^2.$$

Je patrné, že

$$V(t, \mathbf{y}) \geq \|\mathbf{x}(t; t, \mathbf{y})\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2;$$

(položíme-li $W(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}\|^2$, je splněna podmínka (i). Zbývá ukázat, že funkce $V(t, \mathbf{x}(t))$ je podél řešení soustavy (3.168) nerostoucí v t .

Nechť tedy

$$a < t_0 < t_1 < t_2.$$

Potom z inkluze

$$\{t : t = t_1 + \tau, \tau \geq 0\} \supset \{t : t = t_2 + \tau, \tau \geq 0\}$$

vyplývá zřejmě

$$\begin{aligned} V(t_1, \mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0)) &= \sup_{\tau \geq 0} \|\mathbf{x}(t_1 + \tau; t_1, \mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0))\|^2 \geq \\ &\geq \sup_{\tau \geq 0} \|\mathbf{x}(t_2 + \tau; t_2, \mathbf{x}(t_2; t_0, \mathbf{x}_0))\|^2 = V(t_2, \mathbf{x}(t_2; t_0, \mathbf{x}_0)) \end{aligned}$$

a tím je dokázána podmínka (ii).

Postačitelnost. Nechť existuje funkce $V(t, \mathbf{y})$ s vlastnostmi (i) a (ii). To znamená, že pro každé řešení $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$, kde $t_0 > a$ a $\|\mathbf{x}_0\| < +\infty$, platí

$$V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(t_0, \mathbf{x}_0)$$

a podle podmínky (i) pro každé $t \in \langle t_0, +\infty \rangle$ platí

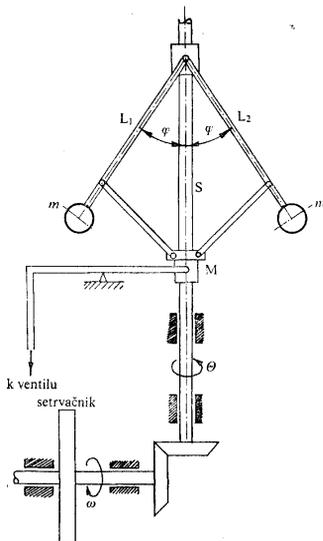
$$W(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(t_0, \mathbf{x}_0).$$

Kdyby řešení $\mathbf{x}(t)$ nebylo omezené v normě, nemohla by tato nerovnost vzhledem k vlastnosti (3.173) funkce $W(\mathbf{x})$ platit. Řešení $\mathbf{x}(t)$ tedy existuje a je omezené na celém $\langle t_0, +\infty \rangle$, Q.E.D.

4. APLIKACE TEORIE STABILITY V TECHNICKÉ PRAXI

4.1. Regulace otáček parního stroje odstředivým regulátorem

Jedním z nejstarších regulačních obvodů je známý Wattův parní stroj s odstředivým regulátorem. Z počátku plnil svoji úlohu – udržování konstantních otáček stroje –



Obr. 38.

spolehlivě. S postupným zdokonalováním parního stroje a se zvyšováním nároků byla činnost odstředivého regulátoru stále méně vyhovující. Touto problematikou se zabývala řada teoretiků a techniků. Teprve ruskému inženýru Vyšněgradskému se v roce 1876 podařilo vnést jasno do celé záležitosti – vyřešením problému stability.

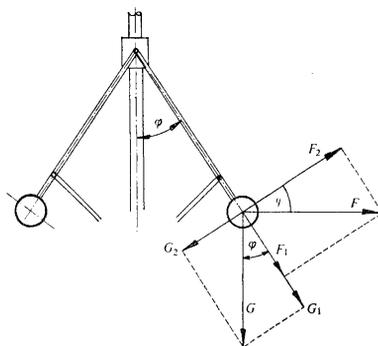
Princip a činnost odstředivého regulátoru jsou patrné z obr. 38. Regulátor pozůstává ze svislé tyče S otočné kolem svislé osy. Na jejím horním konci jsou výkyvně uchycena dvě stejná ramena L_1 a L_2 se stejnými závažími na koncích. Ramena L_1 a L_2 jsou spojena přidavnými klouby a tyčemi tak, aby se mohla současně vychylovat od své svislé polohy o stejný úhel φ ve svislé rovině procházející osou tyče S. Když se ramena L_1 a L_2 vychylují od své svislé polohy o úhel φ , uvádějí do pohybu objímku M, posuvně uloženou na tyči S tak, že vzdálenost této objímky směrem k hornímu konci tyče závisí na $\cos \varphi$. Délku ramen L_1 a L_2 označíme jako jednotku a hmotu každého závaží, připojeného na jejich koncích, označíme m . Otáčeli-li se tyč S úhlovou rychlostí Θ a jsou-li ramena L_1 a L_2 vychýlena od svislé polohy o úhel φ , potom na každé závaží působí odstředivá síla

$$(4.1) \quad F = m\Theta^2 \sin \varphi .$$

Současně na každé závaží působí tíha

$$(4.2) \quad G = mg .$$

Síly působící na závaží ve směru ramen L_1 resp. L_2 jsou v rovnováze s reakcemi ramen L_1 resp. L_2 . Pro výpočet sil působících na závaží je třeba rozložit obě uvedené



Obr. 39.

síly na složky, působící ve směru os. První složka F_1 působí ve směru ramen L_1 resp. L_2 a směřuje dolů. Druhá složka F_2 je na první kolmá a působí ve směru růstu úhlu φ . Z obr. 39 je patrné, že složka síly (4.1) působící ve směru růstu úhlu φ je rovna

$$(4.3) \quad F_2 = m\Theta^2 \sin \varphi \cos \varphi .$$

Složka tíhy (4.2) ve stejném směru je rovna

$$(4.4) \quad G_2 = -mg \sin \varphi .$$

Výslednice obou sil (4.3) a (4.4) je dána výrazem

$$(4.5) \quad F_2 + G_2 = m\theta^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi .$$

Pro objasnění zjednodušíme činnost regulátoru. Při zadané úhlové rychlosti θ ramena L_1 a L_2 se vychylují působením sil (4.1), (4.2) o úhel φ . Jeho velikost dostaneme z výrazu na pravé straně rovnosti (4.5), položíme-li jej rovným nule a upravíme-li jej na tvar

$$(4.6) \quad \theta^2 \cos \varphi - g = 0 .$$

Ze vztahu (4.6) se určí úhel φ jako jednoznačná monotónně rostoucí funkce rychlosti θ . V tomto smyslu lze Wattův regulátor považovat za měřidlo rychlosti otáčení. To je statický rozbor regulátoru. Ve skutečnosti nutno však brát v úvahu jeho dynamické vlastnosti. Na hmotu m působí síla (4.5) a nastává pohyb popsaný diferenciální rovnicí. Mimo sílu (4.5) ovlivňuje pohyb hmoty m tření v kloubech, které závisí na pohybu podle složitých vztahů. Abychom problém zbytečně nekomplikovali, budeme předpokládat, že tření je úměrné rychlosti φ' pohybu hmoty m a má opačné znaménko než tato rychlost, tj. má hodnotu

$$B = -b\varphi' ,$$

kde b je konstanta. Považujeme-li φ za souřadnici, která určuje polohu hmoty m , dostaneme pro φ diferenciální rovnici, vyplývající z rovnováhy sil

$$(4.7) \quad m\varphi'' = m\theta^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi - b\varphi' .$$

Výpočet síly (4.5) byl proveden za předpokladu, že θ i φ jsou konstanty. Mění-li se obě hodnoty, vznikají další síly, které se jednak vyvažují reakcemi ramen a kloubů, jednak nutí tyče zvedat se v jedné rovině. Potom nabývá platnosti rovnice (4.7).

Součástí parního stroje je setrvačnick s momentem setrvačnosti I , uváděný do pohybu tlakem páry. Diferenciální rovnici parního stroje lze psát ve tvaru

$$(4.8) \quad I\omega' = M_1 - M ,$$

kde ω je úhlová rychlost setrvačnicku, M_1 moment způsobený tlakem páry a M moment, kterým působí zátěž proti pohybu setrvačnicku. Moment způsobený tlakem páry je závislý na pootožení ventilu, který řídí přívod páry do válce parního stroje. Moment M závisí na parametrech zátěže.

Odstředivý regulátor má za úkol udržovat rovnoměrný chod stroje. Měří rychlost otáčení setrvačnicku a je-li tato větší než požadovaná, zmenší se přívod páry. Je-li rychlost menší než požadovaná, přívod páry se zvětší. Za tím účelem se hřídel setrvačnicku parního stroje spojuje pomocí ozubeného převodu se svislou tyčí regulá-

toru (obr. 38). Úhlová rychlost regulátoru Θ závisí na úhlové rychlosti setrvačnicku ω podle vztahu

$$(4.9) \quad \Theta = n\omega,$$

kde n je převodový poměr. Takové je působení stroje na regulátor, jehož výsledkem je změna rychlosti otáčení setrvačnicku. Sledujme nyní působení s druhé strany. Objímka M regulátoru je spojena s ventilem (nebo šoupátkem) uzavírajícím přívod páry tak, že

$$(4.10) \quad M_1 = M_1^* + k(\cos \varphi - \cos \varphi^*),$$

kde φ^* je střední hodnota φ , v jejíž blízkosti má být udržována hodnota regulované veličiny φ , M_1^* je moment M_1 vyvozený tlakem páry při $\varphi = \varphi^*$ a $k > 0$ je koeficient úměrnosti, který považujeme za konstantní.

Jak je patrné z (4.10), regulátor působí zpětně na parní stroj tím, že při zvětšení úhlu φ přívod páry (a současně moment M_1) se zmenšuje. Na základě toho by se zdálo, že vzájemné působení parního stroje a regulátoru v celém rozsahu plní zadanou úlohu, tj. zvětšuje přívod páry při snížení rychlosti otáčení setrvačnicku a snižuje přívod páry při zvětšení rychlosti. Na základě těchto úvah lze přirozeně očekávat, že rychlost otáčení setrvačnicku bude konstantní. To skutečně bylo splněno u prvních parních strojů. S postupem doby se ukázalo, že regulátory vždy nespĺňují požadavky a bylo nutno podrobněji analyzovat dynamiku obvodu parní stroj – regulátor a vyšetřit jeho stabilitu.

Jak je patrné ze vztahů (4.7) až (4.10), je obvod parní stroj – regulátor popsán dvěma diferenciálními rovnicemi

$$(4.11) \quad \begin{aligned} m\varphi'' &= mn^2\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi - b\varphi' \\ I\omega^2 &= k \cos \varphi - M^*, \end{aligned}$$

kde $M^* = M - M_1^* + k \cos \varphi^*$ je veličina závislá na zátěži. První z obou rovnic je druhého řádu. Abychom převedli systém rovnic (4.11) na normální tvar, zavedeme novou proměnnou

$$\psi = \varphi'.$$

Potom lze systém rovnic (4.11) psát ve tvaru

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \varphi' &= \psi, \\ \psi' &= n^2\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - g \sin \varphi - \frac{b}{m} \psi, \\ \omega' &= \frac{k}{I} \cos \varphi - \frac{M^*}{I}. \end{aligned}$$

Rovnoměrnost chodu parního stroje spočívá v tom, že úhlová rychlost ω otáčení jeho setrvačnicku má konstantní hodnotu, nemění-li se zátěž M . To znamená, že hodnota M^* je konstantní a ventil, řídicí přívod páry, se nepohybuje. Následkem toho se úhel φ nemění. Hledáme tedy řešení systému rovnic (4.12) ve tvaru

$$\varphi = \varphi_0 ,$$

$$\psi = 0 ,$$

$$\omega = \omega_0 ,$$

tj. hledáme ustálený stav. Úlohou je zkoumat stabilitu systému (4.12), je-li nalezen jeho ustálený stav.

Položíme-li pravé části výrazů (4.12) rovny nule a řešíme-li takto získané rovnice, nalezneme souřadnice ustáleného stavu

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \psi_0 &= 0 , \\ \cos \varphi_0 &= \frac{M^*}{k} , \\ n^2 \omega_0^2 &= \frac{g}{\cos \varphi_0} . \end{aligned}$$

Zavedeme vztahy

$$(4.14) \quad \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \Delta\varphi , \\ \psi &= \psi_0 + \Delta\psi , \\ \omega &= \omega_0 + \Delta\omega , \end{aligned}$$

které dosadíme do rovnic (4.12). Po jednoduché úpravě dostaneme soustavu rovnic

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \Delta\varphi' &= \Delta\psi , \\ \Delta\psi' &= n^2 \omega_0^2 \cos 2\varphi_0 \Delta\varphi + n^2 \omega_0 \sin 2\varphi_0 \Delta\omega - g \cos \varphi_0 \Delta\varphi - \frac{b}{m} \Delta\psi , \\ \Delta\omega' &= -\frac{k}{y} \sin \varphi_0 \Delta\varphi . \end{aligned}$$

Do druhé z těchto rovnic dosadíme za $n^2 \omega^2$ z (4.13). Po jednoduché úpravě dostaneme

$$(4.15a) \quad \Delta\psi' = -\frac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} \Delta\varphi - \frac{b}{m} \Delta\psi + \frac{2g \sin \varphi_0}{\omega_0} \Delta\omega .$$

Charakteristický mnohočlen získaného systému lineárních rovnic pro $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, $\Delta\omega$ je

určen determinantem

$$(4.16) \quad D(p) = \begin{vmatrix} -p & 1 & 0 \\ -\frac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} - \frac{b}{m} - p & \frac{2g \sin \varphi_0}{\omega_0} \\ -\frac{k}{I} \sin \varphi_0 & 0 & -p \end{vmatrix}.$$

Po jeho vyčíslení a vynásobení -1 dostaneme charakteristický polynom ve tvaru

$$(4.17) \quad -D(p) = p^3 + \frac{b}{m} p^2 + \frac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} p + \frac{2kg \sin^2 \varphi_0}{I\omega_0}.$$

Všechny koeficienty polynomu mají stejná znaménka. Tím je splněna nutná, ne však postačující podmínka stability. Podle Hurwitzova kritéria stability je nutné, aby subdeterminant

$$(4.18) \quad \begin{vmatrix} \frac{b}{m} & \frac{2kg \sin^2 \varphi_0}{I\omega_0} \\ 1 & \frac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} \end{vmatrix}$$

měl kladnou hodnotu. Vzhledem k tomu, že vždy platí nerovnost

$$(4.19) \quad g \sin^2 \varphi_0 > 0,$$

lze determinant zjednodušit na tvar

$$(4.20) \quad \begin{vmatrix} \frac{b}{m} & \frac{2k}{I\omega_0} \\ 1 & \frac{1}{\cos \varphi_0} \end{vmatrix} > 0.$$

Po vyčíslení dostaneme nerovnost

$$(4.21) \quad \frac{b}{m} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_0} - \frac{2k}{I\omega_0} > 0.$$

Podle vztahu (4.13) platí

$$k \cos \varphi_0 = M^*,$$

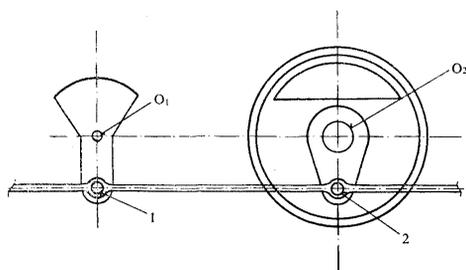
takže podmínku stability lze psát v konečném tvaru

$$(4.22) \quad \frac{bI}{m} - \frac{2M^*}{\omega_0} > 0.$$

Tato podmínka musí být splněna, má-li být obvod stabilní.

4.2. Oscilace ve spojnicích lokomotiv

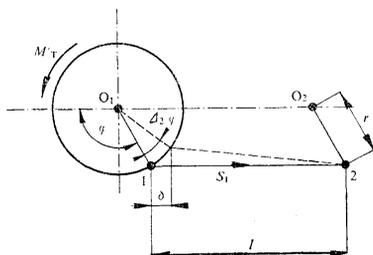
Jako druhý příklad budeme vyšetřovat oscilace způsobené parametrickou rezonancí u elektrických nebo motorových lokomotiv s pohonem jalovým hřídelem. Tuhost systému mezi hřídelem motoru a hnaným dvojkolím je proměnná. Závísí na poloze



Obr. 40.

hřídeli a mění se periodicky s periodou závislou na úhlové rychlosti otáčení hřídele motoru. To také dává možnost vzniku parametrické rezonance.

Vyšetříme jednoduchý případ. Pripustíme, že krouticí moment M_T motoru se přenáší na spřažené dvojkolí lokomotivy pomocí klik (obr. 40) $O_1 - 1, O_2 - 2$



Obr. 41.

a spojnice 1 - 2. Na druhé straně dvojkolí jsou opět kliky (otočené vzhledem ke klikám $O_1 - 1, O_2 - 2$ o úhel $\frac{1}{2}\pi$) a spojnice.

Úhel otočení hnacího hřídele O_1 vzhledem k ose spřaženého dvojkolí O_2 označí-

me $\Delta\varphi$ (obr. 41). Můžeme potom psát

$$(4.23) \quad M_T = \Theta \Delta\varphi,$$

kde Θ je tuhost přenosu. Výraz pro tuto veličinu v dalším odvodíme.

Nechť $\Delta_1\varphi$ je úhel otočení, vyvolaný kroutícím momentem motoru na konci hnacího hřídele a $\Delta_2\varphi$ – úhel otočení, vyvolaný stlačením δ spojnice 1 – 2. Potom platí

$$(4.24) \quad \Delta\varphi = \Delta_1\varphi + \Delta_2\varphi,$$

přičemž, jak patrně z obrázku,

$$(4.25) \quad \Delta_2\varphi = \frac{\delta}{r \sin \varphi}.$$

Označíme-li M'_T kroutící moment, přenášený klikou $O_1 - 1$, bude platit

$$(4.26) \quad \Delta_1\varphi = \frac{M'_T}{k_1},$$

kde k_1 je konstanta, daná pružností konce hnacího hřídele. Je-li S_1 síla, stlačující spojnicí 1 – 2, potom

$$(4.27) \quad \delta = \frac{S_1 l}{AE},$$

kde A je průřez spojnice a E modul pružnosti jejího materiálu. Je jasné, že platí

$$(4.28) \quad S_1 = \frac{M'_T}{r \sin \varphi}$$

a na základě (4.25)

$$(4.29) \quad \Delta_2\varphi = \frac{M'_T}{k_2 \sin^2 \varphi},$$

kde

$$k_2 = \frac{AEr^2}{l}.$$

Výrazy (4.24), (4.26) a (4.29) dávají vztah

$$(4.30) \quad \Delta\varphi = M'_T \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2 \sin^2 \varphi} \right).$$

Podobně označíme M''_T moment, přenášený druhým koncem hnacího hřídele, a předpokládáme-li, že soustava klik je symetrická vzhledem k podélné ose lokomotivy,

nalezneme

$$(4.31) \quad \Delta\varphi = M_T'' \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2 \cos^2 \varphi} \right).$$

Sečteme-li oba momenty

$$M_T = M_T' + M_T'',$$

dostaneme z výrazů (4.30) a (4.31)

$$M_T = \Delta\varphi \frac{\frac{2}{k_1} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{1}{k_2}}{\left(\frac{1}{k_1} \sin^2 \varphi + \frac{1}{k_2} \right) \left(\frac{1}{k_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{k_2} \right)} = \Delta\varphi \frac{a - b \cos 4\varphi}{c - d \cos 4\varphi},$$

kde

$$(4.32) \quad \begin{aligned} a &= \frac{2}{k_1} + \frac{8}{k_2}, \\ b &= \frac{2}{k_1}, \\ c &= \frac{8}{k_2^2} + \frac{8}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_1^2}, \\ d &= \frac{1}{k_1^2}. \end{aligned}$$

Označme-li ω úhlovou rychlost otáčení hřídele (uvažujeme, že tato rychlost je přibližně konstantní), dostaneme pro tuhost systému výraz

$$(4.33) \quad \Theta = \frac{a - b \cos 4\omega t}{c - d \cos 4\omega t}.$$

Sestavíme nyní diferenciální rovnice oscilací. Necht φ_1 a φ_2 jsou úhly otočení hnacího hřídele a spřaženého dvojkolí, I_1 a I_2 momenty setrvačnosti rotujících hmot a M_T a M_r – vnější momenty, které na ně působí. Potom dostaneme

$$(4.34) \quad \begin{aligned} I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= -\Theta(\varphi_1 - \varphi_2) + M_T, \\ I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} &= \Theta(\varphi_1 - \varphi_2) - M_r. \end{aligned}$$

První rovnici dělíme I_1 , druhou I_2 a odečteme. Rozdíl $\varphi_1 - \varphi_2$ označíme x . Z rovnic (4.34) dostaneme jednu rovnici ve tvaru

$$(4.35) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \psi(\omega t) x = \frac{M_T}{I_1} + \frac{M_r}{I_2},$$

kde $\psi(\omega t)$ je dáno vztahem

$$(4.36) \quad \psi(\omega t) = \frac{a - b \cos 4\omega t}{c - d \cos 4\omega t} \cdot \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}.$$

Charakter oscilací z hlediska stability je určen homogenní částí diferenciální rovnice (4.35), kterou lze psát ve tvaru

$$(4.37) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\omega^2} \psi(\tau) x = 0,$$

kde $\tau = \omega t$.

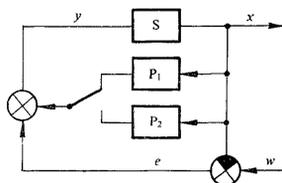
Podle kapitoly 1.4 určíme lineárně nezávislá partikulární řešení homogenní části rovnice $\phi_1(t)$ a $\phi_2(t)$. Dále sestavíme determinant Wronského pro $n = 2$:

$$(4.38) \quad \Delta(\xi) = \begin{vmatrix} \phi_1(\xi) & \phi_2(\xi) \\ \phi_1'(\xi) & \phi_2'(\xi) \end{vmatrix}.$$

Stanovíme hodnoty koeficientů A_{ni} podle (1.234) a dosadíme do rovnice (1.233) pro impulsní přechodovou funkci systému $g(t, \xi)$. Funkce $g(t, \xi)$ a $\Delta(\xi)$ musí mít doznívající charakter. Potom bude splněna podmínka stability.

4.3. Regulační obvod s nespojitě proměnnou strukturou

Strukturu regulačního obvodu měníme obvykle proto, abychom dosáhli požadovaných dynamických vlastností. Např. je požadováno aperiodické doznění přechodového jevu a určitá rychlost odezvy. Oba požadavky však nelze splnit současně. Jestliže zvyšujeme rychlost, dochází k překmitu přes ustálený stav a nelze docílit aperiodic-



Obr. 42.

kého doznění. Tento problém lze vyřešit regulačním obvodem s proměnnou strukturou. Do regulačního obvodu jsou zapojovány dva pomocné obvody, z nichž první přechodový jev urychluje a druhý naopak tlumí. Pro návrh těchto pomocných obvodů lze s výhodou použít podmínky aperiodické stability. Při zapojení prvního pomocného obvodu má být odezva rychlá. Se zvyšováním rychlosti se zvyšuje i vliv harmo-

nických složek čili přenos regulačního obvodu nespĺňuje podmínky aperiodické stability. Při zapojení druhého pomocného obvodu musí být regulační obvod co nejvíce tlumen. Odezva nesmí obsahovat žádné harmonické složky, čili přenos regulačního obvodu musí splňovat podmínky aperiodické stability.

Jako příklad uveďme regulační obvod s proměnnou strukturou, ve kterém se mění tachometrická zpětná vazba ve dvou stupních podle obr. 42. V obvodu je zapojena astatická regulovaná soustava S s přenosem třetího řádu

$$(4.39) \quad S(p) = \frac{K_S}{p(p + \alpha)^2},$$

kde K_S je zesílení soustavy a α převrácená hodnota časové konstanty. Změnu tachometrické zpětné vazby zajišťují dva pomocné obvody P_1 a P_2 . Jejich výstupní veličiny jsou úměrné rychlosti regulované veličiny dx/dt . Přenosy mají tvar

$$(4.40) \quad P_1(p) = K_1 p,$$

$$(4.41) \quad P_2(p) = K_2 p,$$

kde K_1 a K_2 jsou konstanty. Regulační odchylka e je daná rozdílem řídicí veličiny w a regulované veličiny x . Mezi obrazy uvedených veličin platí tedy vztah

$$(4.42) \quad E(p) = W(p) - X(p).$$

Obraz regulované veličiny je dán součinem obrazu akční veličiny a přenosu soustavy

$$(4.43) \quad X(p) = Y(p) S(p).$$

Obraz akční veličiny je součet obrazu regulační odchylky a obrazu výstupní veličiny pomocného obvodu. Při zapojení prvního pomocného obvodu bude platit

$$(4.44) \quad Y(p) = E(p) + P_1(p) X(p).$$

Sloučením rovnic (4.42) až (4.44) a úpravou dostaneme vztah

$$(4.45) \quad \frac{E(p)}{W(p)} = \frac{1 - P_1(p) S(p)}{1 + S(p) - P_1(p) S(p)}.$$

Po dosazení přenosů (4.39) a (4.40) dostaneme přenos

$$(4.46) \quad \frac{E(p)}{W(p)} = \frac{p(p + \alpha)^2 - K_S K_1 p}{p^3 + 2\alpha p^2 + (\alpha^2 - K_1 K_S) p + K_S}.$$

Jmenovatel přenosu (4.46) určuje charakter odezvy.

Pro charakteristický polynom jmenovatele zavedeme označení

$$(4.47) \quad f(p) = p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3,$$

kde

$$(4.48) \quad \begin{aligned} a_1 &= 2\alpha, \\ a_2 &= \alpha^2 - K_1 K_S, \\ a_3 &= K_S. \end{aligned}$$

První derivace charakteristického polynomu má tvar

$$f'(p) = 3p^2 + 2a_1p + a_2.$$

Dále platí vztahy

$$(4.49) \quad \begin{aligned} f(p^2) &= p^6 + a_1p^4 + a_2p^2 + a_3, \\ f'(p^2) &= 3p^4 + 2a_1p^2 + a_2. \end{aligned}$$

K tomu, aby polynom $f(p)$ měl všechny kořeny reálné různé, je nutné a stačí, aby všechny kořeny polynomu

$$(4.50) \quad F(p) = f(p^2) + pf'(p^2)$$

měly zápornou reálnou část. Po dosazení (4.49) do (4.50) dostaneme

$$(4.51) \quad F(p) = p^6 + 3p^5 + a_1p^4 + 2a_1p^3 + a_2p^2 + a_2p + a_3.$$

Z jednotlivých prvků polynomu $F(p)$ sestavíme Hurwitzovu matici:

$$(4.52) \quad \mathbf{H} = \begin{vmatrix} 3 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 3 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 3 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Z této matice sestavíme jednotlivé Hurwitzovy determinanty. Po jejich vyčíslení dostaneme

$$(4.53) \quad \begin{aligned} D_1 &= 3; \\ D_2 &= a_1, \\ D_3 &= 2(a_1^2 - 3a_2), \\ D_4 &= a_1^2a_2 + 3a_1a_3 - 4a_2^2, \\ D_5 &= a_1^2a_2^2 + 18a_1a_2a_3 - 4a_1^3a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2. \end{aligned}$$

Tyto výrazy dále upravíme dosazením ze (4.48) a zavedením nového označení K_i pro $i = 1, 2$. Dostaneme tak výrazy složené z koeficientů přenosu regulačního obvodu

$$(4.54) \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= 3, \\ \Delta_2 &= 2\alpha, \\ \Delta_3 &= 6K_S \left(\frac{\alpha^2}{3K_S} + K_i \right), \\ \Delta_4 &= 2K_S(3\alpha - 2K_i^2 K_S + 2\alpha^2 K_i), \\ \Delta_5 &= 4K_S^3 \left[K_i^3 - \frac{2\alpha^2}{K_S} K_i^2 + \frac{\alpha(\alpha^3 - 9K_S)}{K_S^2} K_i + \frac{4\alpha^3 - 27K_S}{4K_S^2} \right]. \end{aligned}$$

O aperiodické stabilitě rozhodují znaménka jednotlivých výrazů (4.54). První dva Δ_1 a Δ_2 mají kladná znaménka a nejsou závislá na K_i . Budeme se tedy v dalším zabývat pouze posledními třemi výrazy pro Δ_3 , Δ_4 a Δ_5 .

Při zapojení druhého pomocného obvodu P_2 má být regulační obvod přetlumený. Toho se dosáhne, bude-li mít polynom $f(p)$ všechny kořeny reálné různé. A zde právě s výhodou použijeme podmínky aperiodické stability. Musí tedy být determinanty Δ_3 , Δ_4 a Δ_5 , obsahující hodnoty K_2 , kladné. Naopak při zapojení prvního pomocného obvodu P_1 , kdy má být regulační obvod co nejrychlejší, bude odezva obsahovat harmonické složky. V důsledku toho bude polynom $f(p)$ obsahovat komplexní kořeny a tedy Hurwitzovy determinanty nebudou kladné. Alespoň jeden z těchto determinantů bude nutně záporný.

Uvedme konkrétní případ pro hodnoty $\alpha = 2$ a $K_S = 1$. Nejprve budeme kontrolovat aperiodickou stabilitu regulačního obvodu, ve kterém není zapojen žádný pomocný obvod. Dosadíme tedy do výrazů (4.54) hodnotu $K_i = 0$. Dostaneme hodnoty determinantů

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= 2 \cdot 4 = 8 > 0, \\ \Delta_4 &= 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12 > 0, \\ \Delta_5 &= 4 \cdot 2^3 - 27 = 5 > 0, \end{aligned}$$

ze kterých je patrné, že obvod je aperiodicky stabilní. Polynom $f(p)$ má tedy všechny kořeny reálné různé a splňuje podmínku, kladenou na regulační obvod při zapojení druhého pomocného obvodu P_2 . Z toho plyne, že není třeba druhý pomocný obvod do regulačního obvodu zapojovat.

První pomocný obvod musí regulační pochod urychlit. Zavedeme kladnou zpětnou vazbu a hodnotu zesílení druhého pomocného obvodu zvolíme

$$K_2 = 4.$$

Dostaneme hodnoty determinantů

$$A_3 = 6\left(\frac{4}{3} + 4\right) = 32 > 0$$

$$A_4 = 2(3 \cdot 2 - 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 2^2 \cdot 4) = 12 > 0$$

$$A_5 = 4 \left[4^3 - 2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 + 2(2^3 - 9)4 + \frac{4 \cdot 2^3 - 27}{4} \right] = -283 < 0.$$

Pátý determinant A_5 je záporný. Bude tedy polynom $f(p)$ obsahovat komplexní kořeny a odezva harmonické složky, které odezvu (při zapojení prvního pomocného obvodu) urychlí.

4.4. Konstrukce Ljapunovových funkcí lineárních spojitých soustav s konstantními koeficienty a jejich využití k posouzení jakosti přechodového děje

Uvažujme systém, popsáný pro $t \geq 0$ vektorovou lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty

$$(4.55) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t).$$

Ukážeme, že v tomto případě lze najít Ljapunovovu funkci ve tvaru kvadratické formy. Je-li tedy hledaná Ljapunovova funkce tvaru

$$(4.56) \quad V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x},$$

je rovněž časová derivace této funkce v důsledku soustavy (4.55) kvadratickou formou:

$$(4.57) \quad \left. \frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} \right|_{(4.55)} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{A}) \mathbf{x}.$$

Označme

$$(4.58) \quad \mathbf{A}^T \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{Q}.$$

Zvolíme nyní matici \mathbf{Q} tak, aby kvadratická forma

$$(4.59) \quad \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.55)} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$$

byla negativně semidefinitní. Potom v případě, že odpovídající forma (4.56) je pozitivně definitní, je zaručena stabilita triviálního řešení soustavy (4.55). Jestliže funkce (4.56) proměnné \mathbf{x} může v libovolném okolí počátku nabývat záporných hodnot, je zaručena nestabilita. Tato tvrzení vyplývají bezprostředně z Ljapunovových vět (věty 3.1 a 3.3). Podobně bychom při volbě negativně definitní formy (4.59)

mohli využít větu o asymptotické stabilitě (věta 3.2). Je však třeba ještě vyjasnit, zda k libovolně zvolené negativně definitní matici \mathbf{Q} dává řešení \mathbf{K} rovnice (4.58), dosazené do vztahu (4.56), příslušnou Ljapunovovu funkci. Všimněme si nejprve samotné rovnice (4.58), nazývané v literatuře Ljapunovovou rovnicí nebo též maticovou Riccatiho rovnicí. Jelikož nám jde o matice kvadratických forem, můžeme se omezit na symetrické matice \mathbf{K} a \mathbf{Q} .

Lemma 4.1. *Nechť pro vlastní čísla matice \mathbf{A} platí*

$$(4.60) \quad \lambda_i + \lambda_k \neq 0,$$

kde

$$(4.61) \quad 1 \leq i \leq k \leq n.$$

Potom rovnici (4.58) při zadaných \mathbf{A} a \mathbf{Q} , kde \mathbf{Q} je symetrická matice, vyhovuje právě jedna matice \mathbf{K} , jež je také symetrická.

Důkaz. Levá strana rovnice (4.58) představuje lineární operátor

$$\mathcal{L}(\mathbf{K}) = \mathbf{A}^T \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{A},$$

kteřý zobrazí množinu symetrických matic do sebe. Vlastní čísla tohoto operátoru jsou taková čísla, pro něž rovnost

$$\mathcal{L}(\mathbf{C}) = \mu \mathbf{C}$$

platí pro nenulovou symetrickou matici. K tomu, aby existoval inverzní operátor \mathcal{L}^{-1} , to jest k řešitelnosti rovnice (4.58) vzhledem ke \mathbf{K} , je nutné a stačí, aby všechna vlastní čísla operátoru \mathcal{L} byla různá od nuly. Ukážeme, že vlastní čísla operátoru \mathcal{L} jsou právě všechny součty $\lambda_i + \lambda_k$, kde indexy i, k splňují podmínky (4.61).

Nejprve ukážeme, že každé $\lambda_i + \lambda_k$ je vlastním číslem operátoru \mathcal{L} . Označme jako \mathbf{x}_j vlastní sloupcový vektor, pro nějž

$$\mathbf{A}^T \mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j,$$

a utvořme symetrickou matici

$$\mathbf{C}_{ik} = \mathbf{x}_i \mathbf{x}_k^T + \mathbf{x}_k \mathbf{x}_i^T.$$

Máme postupně

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{C}_{ik}) &= \mathbf{A}^T \mathbf{x}_i \mathbf{x}_k^T + \mathbf{A}^T \mathbf{x}_k \mathbf{x}_i^T + \mathbf{x}_i \mathbf{x}_k^T \mathbf{A} + \mathbf{x}_k \mathbf{x}_i^T \mathbf{A} = \\ &= \lambda_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_k^T + \lambda_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_i^T + \mathbf{x}_i (\lambda_k \mathbf{x}_k)^T + \mathbf{x}_k (\lambda_i \mathbf{x}_i)^T = (\lambda_i + \lambda_k) \mathbf{C}_{ik}, \end{aligned}$$

takže $\lambda_i + \lambda_k$ je opravdu vlastním číslem operátoru \mathcal{L} .

Množina symetrických matic n -tého řádu má dimenzi (počet volitelných koeficientů v matici) $n(n+1)/2$. Toto číslo je rovno počtu dvojic indexů i, k , jež vyhovují podmínkám (4.61). Jsou-li tedy všechna čísla $\lambda_i + \lambda_k$ pro různé dvojice indexů navzájem různá, jsou to právě všechna vlastní čísla operátoru \mathcal{L} . Pokud by se mezi čísla $\lambda_i + \lambda_k$ vyskytla stejná, stačí malou změnou koeficientů matice \mathbf{A} dosáhnout, aby tato čísla byla různá. Jednoduchou úvahou o spojitě závislosti mezi vlastními čísly λ_i a koeficienty matice \mathbf{A} se tak úloha převede na případ různých $\lambda_i + \lambda_k$, Q.E.D.

Právě dokázané lemma nám umožní odvodit tento obecný výsledek pro lineární soustavy s konstantními koeficienty:

Věta 4.1. *Nechť všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} mají záporné reálné části. Potom ke každé negativně semidefinitní kvadratické formě*

$$(4.62) \quad \mathbf{W}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} ,$$

jež není identicky rovna nule podél žádného nenulového řešení soustavy (4.55), existuje právě jedna pozitivně definitní kvadratická forma (4.56), jejíž (symetrická) matice \mathbf{K} vyhovuje rovnici (4.58).

Důkaz. Vlastní čísla matice \mathbf{A} , jež leží vešměs v levé polorovině Gaussovy roviny, zřejmě splňují požadavek (4.60). Podle lemmatu 4.1 je tedy zaručena existence a jednoznačnost matice \mathbf{K} a tím i formy (4.56).

Kdyby v některém bodě \mathbf{x}_0 platilo

$$(4.63) \quad V(\mathbf{x}_0) < 0 ,$$

potom pro libovolné kladné k by bylo rovněž

$$V(k\mathbf{x}_0) < 0 ,$$

takže v libovolném okolí počátku by forma V byla záporná a podle věty 3.3. by soustava byla nestabilní. To však odporuje předpokladu o vlastních číslech matice \mathbf{A} .

Nechť v některém bodě platí

$$(4.64) \quad V(\mathbf{x}_1) = 0 .$$

Jelikož

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.55)} \leq 0$$

a podél žádného nenulového řešení $\mathbf{x}(t)$ soustavy (4.55) nemůže platit (4.64) identicky, nutně existuje bod \mathbf{x}_0 , v němž platí (4.63) a to opět vede ke sporu. Q.E.D.

Ukážeme nyní, jak lze využít Ljapunovovy funkce k odhadům některých veličin, které charakterisují jakost přechodového procesu a jsou důležité např. při navrhování

regulátoru ve zpětné vazbě k dané soustavě. Za matici \mathbf{Q} zpravidla volíme matici $-\mathbf{E}$, takže pro Ljapunovovu funkci platí

$$(4.65) \quad \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.55)} = - \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Splňují-li všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} nerovnosti

$$(4.66) \quad \operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

je pak tato $V(\mathbf{x})$ jednoznačně určena podle věty 4.1. Označme ještě vlastní čísla matice \mathbf{K} jako $\alpha_1, \dots, \alpha_n$; jelikož \mathbf{K} je symetrická, jsou tato vlastní čísla reálná a lze je uspořádat podle velikosti

$$(4.67) \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n.$$

Jelikož forma (4.56) je podle věty 4.1. pozitivně definitní, je matice \mathbf{K} regulární a čísla (4.67) jsou vesměs kladná. Ze známých vlastností symetrických matic odtud plyne, že prostor vlastních vektorů matice \mathbf{K} má dimenzi rovnou n a tyto vektory lze volit jako ortonormální systém.

Vezměme libovolný vektor $\mathbf{x} \in E_n$. Potom

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{k}_i,$$

kde \mathbf{k}_i jsou navzájem ortonormální vlastní vektory matice \mathbf{K} odpovídající vlastním číslům α_i . Máme dále

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{k}_i^T \mathbf{K} \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{k}_j = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \mathbf{k}_i^T \mathbf{K} \mathbf{k}_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j (\alpha_j \mathbf{k}_i)^T \mathbf{k}_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \alpha_i \end{aligned}$$

a odtud okamžitě vyplývají nerovnosti

$$\alpha_1 \|\mathbf{x}\|_{\text{III}}^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \alpha_n \|\mathbf{x}\|_{\text{III}}^2,$$

neboli (index III pro vyznačení Eukleidovské normy nadále vynecháváme)

$$(4.68) \quad - \frac{V(\mathbf{x})}{\alpha_n} \leq - \|\mathbf{x}\|^2 \leq - \frac{V(\mathbf{x})}{\alpha_1}.$$

Uvážíme-li vztah (4.65), kde pravá strana je zřejmě rovna $-\|\mathbf{x}\|^2$, můžeme psát

$$- \frac{V(\mathbf{x})}{\alpha_1} \leq \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.55)} \leq - \frac{V(\mathbf{x})}{\alpha_n}.$$

Integraci v mezích 0, t při označení $V(\mathbf{x}(0)) = V_0$ obdržíme z těchto nerovností

$$V_0 e^{-t/\kappa_1} \leq V(\mathbf{x}(t)) \leq V_0 e^{-t/\kappa_n}$$

a opětovným užitím nerovností (4.68) získáme odhad

$$(4.69) \quad \frac{V_0}{\kappa_n} e^{-t/\kappa_1} \leq \|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq \frac{V_0}{\kappa_1} e^{-t/\kappa_n}.$$

Za dobu trvání přechodového děje považujeme obvykle minimální dobu \bar{t} , po jejímž uplynutí je odchylka (vyjádřená zde normou $\|\mathbf{x}(t)\|$ pro $t \geq \bar{t}$) menší než předem dané číslo $\varepsilon > 0$. (Toto číslo ε často bývá vyjádřeno v procentech maximální odchylky, zde pro zjednodušení předpokládáme, že již známe jeho velikost.)

Řešme tedy rovnici

$$\frac{V_0}{\kappa_1} e^{-\tau/\kappa_n} = \varepsilon^2;$$

její řešení je

$$(4.70) \quad \tau = -\kappa_n \ln \frac{\kappa_1 \varepsilon^2}{V_0}$$

a podle nerovností (4.69) je toto číslo horním odhadem doby trvání přechodového děje:

$$\tau \geq \bar{t}.$$

Velmi často bývá přechodový proces oceňován velikostí kvadratického integrálního kritéria (např. v teorii regulace kvadratickou regulační odchylkou); toto kritérium je obecně ve tvaru

$$(4.71) \quad J = \int_0^t \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} \, dt,$$

kde $\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$ je pozitivně semidefinitní kvadratická forma. Jestliže pro vlastní čísla matice \mathbf{A} soustavy (4.55) je splněna podmínka (4.66), existuje podle věty 4.1. pozitivně definitní kvadratická forma $V(\mathbf{x})$, jež splňuje vztah

$$(4.72) \quad \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.55)} = -\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}.$$

Podle vztahů (4.71) a (4.72) je tedy

$$J = - \int_0^\infty \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.55)} dt = - \lim_{t \rightarrow +\infty} [V(\mathbf{x}(t)) - V(\mathbf{x}(0))],$$

4.5. Ljapunovy funkce pro impulsní soustavy

V tomto odstavci si všimneme aplikace Ljapunovy teorie stability na impulsní soustavu, a to, zejména v souvislosti s výsledky předchozího odstavce, na lineární impulsní soustavu. Nejprve však uvedeme několik obecných poznatků a pojmů, potřebných k porozumění dalšímu textu tohoto odstavce.

Impulsní soustava je obecně popsána vektorovou rekurentní rovnicí

$$(4.76) \quad \mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Budeme předpokládat, že složky F_i vektoru \mathbf{F} , $i = 1, \dots, n$, jsou spojité funkce vektoru $\mathbf{x} \in E_n$ v oblasti $\|\mathbf{x}\| < H$, kde $H > 0$, které pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ nejsou zároveň rovné 0, a že

$$(4.77) \quad \mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Definice 4.1. Jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí implikace

$$(4.78) \quad 0 < \|\mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}_m\| < \varepsilon \quad \text{pro } m > 0,$$

říkáme, že nulové řešení soustavy (4.76) je *stabilní v Ljapunově smyslu*.

Je-li nulové řešení stabilní a je-li navíc splněna podmínka

$$(4.79) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_m\| = 0,$$

říkáme, že nulové řešení je *asymptoticky stabilní*. Pokud rovnost (4.79) platí pro libovolné \mathbf{x}_0 , je nulové řešení *globálně asymptoticky stabilní*.

Nulové řešení je *nestabilní*, existuje-li takové $\varepsilon > 0$, že pro žádné $\delta > 0$ nelze splnit implikaci (4.78).

Definice 4.2. První diferencí skalární funkce $V(\mathbf{x})$ v bodě \mathbf{x}_m v důsledku soustavy (4.76) rozumíme výraz

$$(4.80) \quad \Delta V(\mathbf{x}_m)|_{(4.76)} = V(\mathbf{F}(\mathbf{x}_m)) - V(\mathbf{x}_m).$$

Uvedeme dále věty, analogické Ljapunovým větám 3.1. až 3.3.

Věta 4.2. Je dána soustava popsána rovnicí (4.76) za předpokladu (4.77). Jestliže pro $\|\mathbf{x}\| \leq h$, kde $h > 0$, existuje pozitivně definitní spojitá skalární funkce $V(\mathbf{x})$ taková, že $V(\mathbf{0}) = 0$ a že její první diference (4.80) je negativně semidefinitní, potom nulové řešení soustavy (4.76) je stabilní v Ljapunově smyslu.

Důkaz. Omezíme se na ta \mathbf{x} , pro něž

$$\|\mathbf{x}\| \leq \min(h, H).$$

Podél řešení soustavy (4.76) je zřejmé

$$V(\mathbf{x}_m) - V(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \Delta V(\mathbf{x}_i) \Big|_{(4.76)}.$$

Podle předpokladu o negativní semidefinitnosti první diference je tedy

$$(4.81) \quad V(\mathbf{x}_m) \leq V(\mathbf{x}_0).$$

Zvolme dále libovolně malé $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \min(h, H)$. Na množině $\{\mathbf{x} : \varepsilon \leq \|\mathbf{x}\| \leq \min(h, H)\}$ dosahuje funkce $V(\mathbf{x})$ svého infima, označme je v . Jelikož $V(\mathbf{x})$ je pozitivně definitní, je toto v kladné. Dále najdeme číslo $\delta > 0$ takové, aby platila implikace

$$(4.82) \quad 0 < \|\mathbf{x}\| < \delta \Rightarrow V(\mathbf{x}) < v;$$

existence takového δ vyplývá z předpokládané spojitosti funkce $V(\mathbf{x})$ v okolí počátku.

Nechť nyní $0 < \|\mathbf{x}_0\| < \delta$. Potom podle (4.82) a (4.81) je

$$V(\mathbf{x}_m) \leq V(\mathbf{x}_0) < v$$

a protože pro $\|\mathbf{x}\| \geq \varepsilon$ je $V(\mathbf{x}) \geq v$, je nutně

$$\|\mathbf{x}_m\| < \varepsilon,$$

Q.E.D.

Důkazy dalších dvou vět, obdobné důkazům vět 3.2. a 3.3., vynecháme.

Věta 4.3. Je dána soustava popsána rovnicí (4.76) za předpokladu (4.77). Jestliže pro $\|\mathbf{x}\| < h$, kde $h > 0$, existuje pozitivně definitní spojitá skalární funkce $V(\mathbf{x})$ taková, že $V(\mathbf{0}) = 0$ a že její první diference (4.80) je negativně definitní, potom nulové řešení soustavy (4.76) je asymptoticky stabilní.

Věta 4.4. Je dána soustava popsána rovnicí (4.76) za předpokladu (4.77). Jestliže pro $\|\mathbf{x}\| < h$, kde $h > 0$, existuje pozitivně definitní spojitá skalární funkce $V(\mathbf{x})$ taková, že $V(\mathbf{0}) = 0$ a jestliže existují vektory \mathbf{x} v normě libovolně malé takové, že

$$V(\mathbf{x}) [V(\mathbf{F}(\mathbf{x})) - V(\mathbf{x})] > 0,$$

potom nulové řešení soustavy (4.76) je nestabilní.

Dále se omezíme na lineární impulsní soustavy, popsané vektorovou rovnicí (pro vektory $\mathbf{x}_m \in E_n$)

$$(4.83) \quad \mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Jak vyplývá z teorie těchto soustav (viz též odst. 1.2.), je triviální řešení $\mathbf{x}_m = \mathbf{0}$ globálně asymptoticky stabilní, pokud všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} splňují nerov-

nosti

$$(4.84) \quad |\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Jinými slovy, každé řešení soustavy (4.83) při libovolném \mathbf{x}_0 konverguje pro $m \rightarrow \infty$ k nule, pokud platí nerovnosti (4.84).

Analogicky, jako v předchozím odstavci pro spojité soustavy, budeme zde hledat Ljapunovovy funkce (tzn. funkce $V(\mathbf{x})$ z vět 4.2. až 4.4.) jako kvadratické formy. Položíme

$$(4.85) \quad V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}$$

a vypočteme

$$V(\mathbf{x}_{m+1}) - V(\mathbf{x}_m) = \mathbf{x}_{m+1}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_m^T \mathbf{K} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_m^T (\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} - \mathbf{K}) \mathbf{x}_m.$$

Požadujeme-li, aby tato první diference se rovnala zadané kvadratické formě $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$, dostáváme maticovou rovnici

$$(4.86) \quad \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} - \mathbf{K} = \mathbf{Q}.$$

Abychom tuto rovnici převedli na tvar (4.58), položíme

$$(4.87) \quad \mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}$$

a

$$(4.88) \quad \mathbf{R} = (\mathbf{A}^T - \mathbf{E}) \mathbf{K} (\mathbf{A} - \mathbf{E}).$$

Vypočteme, čemu se rovná výraz $\mathbf{B}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{B}$. Postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{B} &= (\mathbf{A}^T - \mathbf{E})^{-1} (\mathbf{A}^T + \mathbf{E}) (\mathbf{A}^T - \mathbf{E}) \mathbf{K} (\mathbf{A} - \mathbf{E}) + \\ &+ (\mathbf{A}^T - \mathbf{E}) \mathbf{K} (\mathbf{A} - \mathbf{E}) (\mathbf{A} + \mathbf{E}) (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} = \\ &= [(\mathbf{A}^T - \mathbf{E}) + 2\mathbf{E}] \mathbf{K} (\mathbf{A} - \mathbf{E}) + (\mathbf{A}^T - \mathbf{E}) \mathbf{K} [(\mathbf{A} - \mathbf{E}) + 2\mathbf{E}] = \\ &= (\mathbf{A}^T + \mathbf{E}) \mathbf{K} (\mathbf{A} - \mathbf{E}) + (\mathbf{A}^T - \mathbf{E}) \mathbf{K} (\mathbf{A} + \mathbf{E}) = 2(\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} - \mathbf{K}), \end{aligned}$$

takže podle (4.86) nutně

$$(4.89) \quad \mathbf{B}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{B} = 2\mathbf{Q}.$$

Vlastní čísla matice \mathbf{B} , označme je μ_i , lze vyjádřit užitím rovnosti (4.87) jako funkce vlastních čísel λ_i matice \mathbf{A} , to jest

$$(4.90) \quad \mu_i = \frac{\lambda_i + 1}{\lambda_i - 1}.$$

Je vidět, že $\operatorname{Re} \mu_i < 0$, právě když $|\lambda_i| < 1$. Podle lemmatu 4.1. má rovnice (4.89) pro neznámou matici \mathbf{R} právě jedno řešení, pokud $\mu_i + \mu_k \neq 0$ pro libovolné indexy $i, k = 1, \dots, n$. Tato podmínka je zřejmě ekvivalentní nerovnosti $\lambda_i \lambda_k \neq 1$, což je splněno, pokud platí nerovnosti (4.84). S využitím těchto poznatků dokážeme ještě větu, podobnou větě 4.1. z předchozího odstavce.

Věta 4.5. *Nechť všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} splňují nerovnosti (4.84). Potom ke každé negativně definitní kvadratické formě ve tvaru (4.62), jež není identicky rovna nule podél žádného nenulového řešení soustavy (4.83), existuje právě jedna pozitivně definitní kvadratická forma (4.85), jejíž (symetrická) matice \mathbf{K} vyhovuje rovnici (4.86).*

Důkaz. S přihlédnutím k výše uvedeným vztahům (4.87), (4.88) a (4.90) je zaručena podle lemmatu 4.1. existence a jednoznačnost řešení \mathbf{R} rovnice (4.89) a tedy i matice \mathbf{K} , jež s \mathbf{R} souvisí vztahem (4.88).

Funkce $V(\mathbf{x}_m)$ podél řešení tvoří klesající posloupnost, protože její diference je negativně definitní. S druhé strany, vzhledem k asymptotické stabilitě, je nutně

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}_m) = 0.$$

Klesající posloupnost $V(\mathbf{x}_m)$ musí tedy být tvořena kladnými čísly, Q.E.D.

Ljapunovovy funkce ve tvaru kvadratických forem nám také umožní dokázat toto jednoduché kritérium stability speciálního typu nelineárních soustav:

Věta 4.6. *Je dána impulsní soustava*

$$(4.91) \quad \mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_m + \mathbf{f}(\mathbf{x}_m),$$

kde $f_i(\mathbf{x})$ pro $i = 1, \dots, n$ jsou funkce, vyjádřené v okolí počátku souřadnic absolutně konvergentními mocninnými řadami, jež neobsahují nižší než druhé mocniny souřadnic vektoru \mathbf{x} .

Jestliže všechna vlastní čísla λ_i matice \mathbf{A} splňují nerovnosti (4.84), potom nulové řešení soustavy (4.91) je asymptoticky stabilní.

Důkaz. K negativně definitní formě

$$-U(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$$

sestrojíme podle věty 4.5. pozitivně definitní formu (4.85), označenou $V(\mathbf{x})$, v závislosti na lineární části (4.91), tzn. na matici \mathbf{A} . Vypočteme, čemu se rovná první diference této formy $V(\mathbf{x})$ v důsledku soustavy (4.91). Dostáváme

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}_{m+1}) - V(\mathbf{x}_m) &= -U(\mathbf{x}_m) + \mathbf{x}_m^T \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{f}(\mathbf{x}_m) + \\ &+ \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_m) \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{x}_m + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_m) \mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{x}_m). \end{aligned}$$

Protože $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ lze vyjádřit řadami, začínajícími druhými mocninami souřadnic vektoru \mathbf{x} , lze poslední tři členy pravé strany shrnout v řadu, začínající třetími mocninami souřadnic vektoru \mathbf{x} . Potom však zřejmě v dostatečně malém okolí počátku je diference $V(\mathbf{x}_{m+1}) - V(\mathbf{x}_m)$ negativně definitní a podle věty 4.3. je nulové řešení soustavy (4.91) asymptoticky stabilní, Q.E.D.

Poznámka. Za stejných předpokladů jako ve větě 4.6. lze dokázat toto tvrzení: pokud mezi vlastními čísly matice \mathbf{A} je aspoň jedno s absolutní hodnotou větší než 1, potom nulové řešení soustavy (4.91) je nestabilní.

4.6. Konstrukce Ljapunovových funkcí pro některé nelineární problémy

V tomto odstavci seznámíme čtenáře s některými metodami určování Ljapunovových funkcí pro nelineární soustavy. Na prvním místě uvedeme soustavu tvaru

$$(4.92) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}(t)),$$

u nichž matice \mathbf{A} je konstantní a funkce $\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}(t))$ vyhovují požadavku

$$(4.93) \quad \sum_{i=1}^n \varphi_i^2(\mathbf{x}) \leq k^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1+\alpha},$$

kde

$$(4.94) \quad k > 0, \quad \alpha > 0$$

jsou konstanty. Jde tedy o soustavu s klesající nelinearitou, na níž lze užít dříve dokázané věty 3.8. a 3.9. Ukážeme, že v tomto případě vystačíme s Ljapunovovou funkcí, sestavenou pro lineární soustavu

$$(4.95) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t).$$

Nejprve odvodíme důležité pomocné tvrzení:

Lemma 4.2. *Nechť $V(\mathbf{x})$ je pozitivně definitní kvadratická forma a $W(\mathbf{x})$ libovolná kvadratická forma. Necht funkce $\varphi_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, n$, splňují nerovnost (4.93) za předpokladů (4.94). Potom funkce*

$$(4.96) \quad T(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_i} \varphi_i(\mathbf{x})$$

je v jistém (neprázdném) okolí počátku rovněž pozitivně definitní.

Důkaz. Necht v_1 a v_n jsou minimální a maximální vlastní čísla matice formy $V(\mathbf{x})$, potom, jak je známo z maticového počtu, platí nerovnosti (pro Eukleidovskou normu)

$$v_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq v_n \|\mathbf{x}\|^2.$$

Jelikož také výraz $\sum_{i=1}^n (\partial W / \partial x_i)^2$ je kvadratická forma, platí pro ni obdobné nerovnosti tvaru

$$\omega_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} \right)^2 \leq \omega_n \|\mathbf{x}\|^2,$$

kde $\omega_n \geq 0$. Dále je podle Buňakovského-Schwartzovy nerovnosti a podle nerovnosti (4.93)

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_i} \varphi_i(\mathbf{x}) \right| \leq \sqrt{\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} \right)^2 \right]} \sqrt{\left[\sum_{i=1}^n \varphi_i^2(\mathbf{x}) \right]} \leq k \sqrt{(\omega_n) \|\mathbf{x}\|^{2+\alpha}}.$$

Jelikož $V(\mathbf{x})$ je pozitivně definitní, je $v_1 > 0$ a lze psát

$$V + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_i} \varphi_i > (v_1 - k \sqrt{(\omega_n) \|\mathbf{x}\|^\alpha}) \|\mathbf{x}\|^2;$$

pravá strana poslední nerovnosti je však kladná, pokud $\|\mathbf{x}\| \neq 0$ a pokud $k \sqrt{(\omega_n) \|\mathbf{x}\|^\alpha} < v_1$. Odtud okamžitě vyplývá tvrzení lemmatu, Q.E.D.

Jako příklad konstrukce Ljapunovovy funkce pro soustavu (4.92) uvedeme větu pro případ stabilní soustavy.

Věta 4.7. *Nechť všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} soustavy (4.95) mají reálné části záporné. Nechť $V(\mathbf{x})$ je Ljapunovova funkce druhého druhu, jejíž časová derivace v důsledku soustavy (4.95) je rovna $-\|\mathbf{x}\|_{\text{II}}^2$. Potom $V(\mathbf{x})$ je pozitivně definitní kvadratická forma a zároveň je $V(\mathbf{x})$ Ljapunovovou funkcí druhého druhu pro soustavu (4.92) a nulové řešení soustavy (4.92) je asymptoticky stabilní.*

Důkaz. Existence pozitivně definitní kvadratické formy $V(\mathbf{x})$ pro lineární soustavu soustavu (4.95) vyplývá z vět odstavce 4.4. (srov. větu 4.3.). Zbývá ukázat, že $V(\mathbf{x})$ je Ljapunovovou funkcí druhého druhu pro soustavu (4.92). Časová derivace $V(\mathbf{x})$ v důsledku soustavy (4.92) je rovna

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.92)} = -\|\mathbf{x}\|_{\text{II}}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \varphi_i(\mathbf{x}).$$

Avšak pravá strana této rovnosti je, podle lemmatu 4.2., negativně definitní v jistém okolí počátku, takže $V(\mathbf{x})$ je skutečně Ljapunovova funkce druhého druhu pro soustavu (4.92) a nulové řešení této soustavy je tedy podle věty 3.2. asymptoticky stabilní, Q.E.D.

Všimněme si nyní obecnějších nelineárních soustav. Obecná metoda konstrukce Ljapunovových funkcí zde neexistuje, nieméně pro určité typy úloh byly vypracovány

postupy, jež vedou k cíli. Zde se stručně zmíníme o některých z nich, přičemž je budeme demonstrovat na jednoduchých příkladech.

a) Uvažujme kmity hmotného bodu, na který působí síla $f(x)$, v prostředí, jehož odpor závisí nelineárně na rychlosti. Pohybová rovnice je

$$(4.97) \quad \ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0,$$

přičemž

$$\varphi(0) = f(0) = 0.$$

Rovnice (4.97) je ekvivalentní soustavě ve fázových souřadnicích

$$(4.98) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -f(x_1) - \varphi(x_2). \end{aligned}$$

Má-li hmotný bod jednotkovou hmotu, je celková energie soustavy, daná součtem kinetické a potenciální energie,

$$(4.99) \quad V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} f(\xi) d\xi.$$

Vzhledem k tomu, že vlivem odporu prostředí se mechanická energie mění v tepelnou, musí $V(x)$ podél řešení soustavy (4.98) ubývat. Skutečně, časová derivace $V(x)$ v důsledku soustavy je

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.98)} = -\varphi(x_2) x_2,$$

takže pokud pro $x_2 \neq 0$ je

$$\varphi(x_2) x_2 > 0,$$

je

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.98)} \leq 0.$$

Jestliže dále platí pro sílu $f(x_1)$

$$f(x_1) x_1 > 0,$$

tedy požadavek, aby síla $f(x)$ působila ve směru od „rovnovážné“ polohy $x_1 = 0$, potom funkce (4.99) je pozitivně definitní. Za dosti obecných předpokladů o funkcích f a φ lze tedy energii (4.99) považovat za Ljapunovovu funkci pro danou soustavu (4.98). Uvedená metoda konstrukce Ljapunovovy funkce se nazývá *energetická metoda*.

b) Jiná metoda, náležející I. G. Malkinovi, spočívá v tom, že se Ljapunovova funkce nelineární soustavy konstruuje podle analogie k lineární soustavě. Mějme

např. nelineární rovnici

$$(4.100) \quad \ddot{x} + \varphi(x) \dot{x} + f(x) = 0,$$

ekvivalentní soustavě

$$(4.101) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -f(x_1) - \varphi(x_1) x_2. \end{aligned}$$

Uvažujme lineární soustavu

$$(4.102) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_1 - a_2 x_2. \end{aligned}$$

Pro tuto lineární soustavu sestrojíme (srovnej odst. 4.4.) Ljapunovovu funkci prvního druhu, tzn. budeme požadovat, aby její časová derivace byla negativně semidefinitní, např.

$$(4.103) \quad \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.102)} = -a_2 x_2^2.$$

Najdeme tuto funkci $V(\mathbf{x})$, to jest kvadratickou formu

$$V(\mathbf{x}) = k_{11} x_1^2 + 2k_{12} x_1 x_2 + k_{22} x_2^2.$$

Je nejprve

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.102)} &= 2k_{11} x_1 x_2 + 2k_{12} x_2^2 + 2k_{12} x_1 (-a_1 x_1 - a_2 x_2) + \\ &+ 2k_{22} x_2 (-a_1 x_1 - a_2 x_2) = -2k_{12} a_1 x_1^2 + (2k_{11} - 2k_{12} a_2 - 2k_{22} a_1) x_1 x_2 + \\ &+ (2k_{12} - 2k_{22} a_2) x_2^2, \end{aligned}$$

takže z podmínky (4.103) dostáváme soustavu tří rovnic o třech neznámých k_{11} , k_{12} , k_{22} :

$$\begin{aligned} -2k_{12} a_1 &= 0, \\ 2k_{11} - 2k_{12} a_2 - 2k_{22} a_1 &= 0, \\ 2k_{12} - 2k_{22} a_2 &= -a_2. \end{aligned}$$

Řešení (pro $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$) je

$$k_{11} = \frac{a_1}{2}, \quad k_{12} = 0, \quad k_{22} = \frac{1}{2},$$

takže

$$(4.104) \quad V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(a_1 x_1^2 + x_2^2).$$

Poznamenejme, že tato funkce nezávisí explicitně na koeficientu a_2 , takže ji lze užít jako Ljapunovy funkce prvního druhu např. pro soustavu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_1 - \varphi(x_1) x_2.\end{aligned}$$

Abychom sestrojili Ljapunovovu funkci pro soustavu (4.101), je třeba nahradit člen $\frac{1}{2} a_1 x_1^2$ ve vyjádření (4.104). Veličina $a_1 x_1$ resp. $f(x_1)$ znamená, jak víme z předchozího příkladu (řešení stability soustavy (4.98)), sílu působící na hmotný bod, která jej udržuje v pohybu. Veličina $\frac{1}{2} a_1 x_1^2$ odpovídá potenciální energii. Uvažujme proto funkci

$$(4.104') \quad \bar{V}(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} x_2^2,$$

shodnou s funkcí (4.104), pokud $f(x_1) = a_1 x_1$. Snadno se přesvědčíme, že

$$\left. \frac{d\bar{V}}{dt} \right|_{(4.101)} = -\varphi(x_1) x_2^2.$$

Pokud je např. splněna podmínka

$$\varphi(x_1) \geq 0$$

a zároveň pro $x \neq 0$

$$f(x) x > 0,$$

je funkce $\bar{V}(\mathbf{x})$ Ljapunovovou funkcí prvního druhu pro daný problém, neboť potom je pravá strana rovnosti (4.104') pozitivně definitní.

c) Uvažujme nelineární rovnici

$$(4.105) \quad \ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + g(x)f(x) = 0,$$

ekvivalentní soustavě

$$(4.106) \quad \begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -f(x_1)g(x_2) - \varphi(x_2).\end{aligned}$$

Hledejme Ljapunovovu funkci ve tvaru součtu

$$(4.107) \quad V(\mathbf{x}) = \Phi(x_1) + \Psi(x_2).$$

Pro časovou derivaci v důsledku soustavy obdržíme výraz

$$(4.108) \quad \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.106)} = \frac{d\Phi(x_1)}{dx_1} x_2 - \frac{d\Psi(x_2)}{dx_2} [f(x_1)g(x_2) + \varphi(x_2)].$$

Budeme požadovat, aby i tato derivace byla rovna součtu funkcí jedné proměnné. Pokusíme se proto anulovat na pravé straně výrazu (4.108) všechny členy, jež obsahují obě proměnné, neboli požadujeme, aby

$$\frac{d\Phi(x_1)}{dx_1} x_2 - \frac{d\Psi(x_2)}{dx_2} f(x_1) g(x_2) = 0,$$

neboli

$$\frac{1}{f(x_1)} \frac{d\Phi(x_1)}{dx_1} = \frac{g(x_2)}{x_2} \frac{d\Psi(x_2)}{dx_2}.$$

To je možné jen tehdy, když obě strany jsou konstanty. Položme proto obě strany rovné 1, takže

$$\begin{aligned} \Phi(x_1) &= \int_0^{x_1} f(\xi) d\xi, \\ \Psi(x_2) &= \int_0^{x_2} \frac{\eta}{g(\eta)} d\eta. \end{aligned}$$

Hledaná funkce (4.107) je tedy dána výrazem

$$(4.109) \quad V(x) = \int_0^{x_1} f(\xi) d\xi + \int_0^{x_2} \frac{\eta}{g(\eta)} d\eta,$$

přičemž

$$(4.110) \quad \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.106)} = - \frac{x_2 \varphi(x_2)}{g(x_2)}.$$

Pokud jsou splněny např. podmínky pro $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x) x &> 0, \\ g(x) &> 0, \\ \varphi(x) x &> 0, \end{aligned}$$

je derivace (4.110) negativně semidefinitní a sama funkce (4.109) pozitivně definitní, je to tedy Ljapunova funkce prvního druhu a nulové řešení soustavy (4.106) je podle věty 3.1. stabilní v Ljapunově smyslu. Uvedená metoda, náležející J. A. Barbašinovi, se nazývá *metoda separace proměnných*.

d) N. N. Krasovskému náleží tento postup pro sestavení Ljapunovy funkce: Necht' nelineární soustava je popsána vektorovou diferenciální rovnicí

$$(4.111) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

kde pravá strana splňuje podmínku

$$(4.112) \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Zvolíme symetrickou konstantní matici \mathbf{B} s kladnými vlastními čísly takovou, aby symetrická matice

$$(4.113) \quad \mathbf{P} = \left(\mathbf{B} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} \right)^T + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

byla negativně definitní; matice $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$ je Jakobiho matice. K tomu je podle známé Silvestrovy věty nutné a stačí, aby platily nerovnosti pro subdeterminanty determinantu matice \mathbf{P}

$$(4.114) \quad -p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad (-1)^n |\mathbf{P}| > 0,$$

kde symbol $|\mathbf{P}|$ značí determinant matice \mathbf{P} .

Ljapunovovu funkci hledáme ve tvaru

$$(4.115) \quad V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{B} \mathbf{f}(\mathbf{x});$$

snadno lze ukázat, že

$$(4.116) \quad \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.111)} = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Skutečně

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.111)} &= \dot{\mathbf{f}}^T \mathbf{B} \mathbf{f} + \mathbf{f}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{f}} = \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} \mathbf{f} \right)^T \mathbf{B} \mathbf{f} + \mathbf{f}^T \mathbf{B} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} \mathbf{f} = \\ &= \mathbf{f}^T \left\{ \left(\mathbf{B} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} \right)^T + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} \right\} \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Je vidět, že pokud se podaří najít matici \mathbf{B} uvedených vlastností, je zaručena asymptotická stabilita nulového řešení. Jako příklad vyšetříme rovnici

$$(4.117) \quad \ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + cx = 0,$$

kde c je kladná konstanta a kde pro funkci $\varphi(x)$ platí $\varphi(0) = 0$. Tato rovnice je ekvivalentní soustavě

$$(4.118) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -cx_1 - \varphi(x_2). \end{aligned}$$

Vezměme za \mathbf{B} diagonální matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

potom

$$V(\mathbf{x}) = \beta_1 x_2^2 + \beta_2 (cx_1 + \varphi(x_2))^2$$

a dále

$$\frac{dV}{dt}_{(4.118)} = 2 \left[(-\beta_1 + c\beta_2)(cx_1 + \varphi(x_2))x_2 - \beta_2 \frac{d\varphi(x_2)}{dx_2} (cx_1 + \varphi(x_2))^2 \right].$$

Tento výraz se značně zjednoduší, zvolíme-li (kladná) čísla $\beta_1 = c$, $\beta_2 = 1$; potom bude

$$\frac{dV}{dt}_{(4.118)} = -2 \frac{d\varphi(x_2)}{dx_2} (cx_1 + \varphi(x_2))^2$$

a nerovnost

$$\frac{d\varphi(x_2)}{dx_2} > 0$$

dává postačující podmínku asymptotické stability.

e) Jako poslední uvedeme metodu konstrukce Ljapunovovy funkce, náležející V. I. Zubovovi. Mějme opět nelineární soustavu ve tvaru (4.111) za předpokladu (4.112). Položme

$$(4.119) \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \left[\int_0^1 \frac{\partial f_i(\tau \mathbf{x})}{\partial x_j} d\tau \right].$$

Ukážeme, že potom platí identita

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Zvolíme libovolný index i , kde $1 \leq i \leq n$, a máme ukázat, že

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i(\tau \mathbf{x})}{\partial x_j} d\tau \cdot x_j \right) = f_i(\mathbf{x}).$$

Výraz na levé straně upravíme a dostáváme

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\tau \mathbf{x})}{\partial x_j} d\tau \cdot x_j = f_i(\mathbf{x}),$$

tento vzorec však platí podle známého pravidla o integrování totálního diferenciálu s přihlédnutím k rovnosti (4.112). Tím jsme převedli soustavu (4.111) na tvar

$$(4.120) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x},$$

kde matice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ je dána vzorcem (4.119). Ljapunovovu funkci hledáme nyní ve tvaru

$$(4.121) \quad V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{x},$$

kde $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ je symetrická matice. Časová derivace funkce $V(\mathbf{x})$ v důsledku soustavy (4.120) je zřejmě

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.120)} = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{x},$$

kde matice

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}).$$

Na tuto matici lze užít Silvestrovy věty a získat podmínky stability ve tvaru nerovností. Aplikace této metody v konkrétních případech může být značně komplikovaná. Podrobněji se čtenář o uvedené problematice poučí např. v monografii [45].

4.7. Problém optimální stabilizace řízených soustav

Budeme vyšetřovat nejprve obecnou soustavu, popsanou vektorovou diferenciální rovnicí

$$(4.122) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t))),$$

kde vektory $\mathbf{x}, \mathbf{f} \in E_n$, vektor $\mathbf{u} \in E_r$, $1 \leq r \leq n$. Předpokládáme, že $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a že $\mathbf{u}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Funkce $u_i(t, \mathbf{x}(t))$, $i = 1, \dots, r$, představují „řídící“ parametry, jejichž volbou můžeme zajistit, aby řešení soustavy mělo určité požadované vlastnosti. Jejich závislost na řešení $\mathbf{x}(t)$ znamená zpětnou vazbu. Všimneme si zde jedné speciální úlohy syntézy optimálního řízení. Předně budeme požadovat, aby na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ bylo nulové řešení soustavy (4.122) asymptoticky stabilní. Tuto vlastnost můžeme zajistit obecně různými funkcemi $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t))$. Budeme však ještě požadovat, aby nabýval své minimální hodnoty integrál z nezáporné funkce $q(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$

$$(4.123) \quad J = \int_0^{\infty} q(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t))) dt.$$

Budeme pak říkat, že funkce $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t))$ *optimálně* (ve smyslu kritéria (4.123)) *stabilizuje* soustavu (4.122). Dokážeme větu (viz např. [27]), která dává postačující podmínky pro optimální stabilizaci v uvedeném smyslu.

Věta 4.8. *Nechť je dána soustava popsaná vektorovou diferenciální rovnicí (4.122) pro $t \in \langle 0, +\infty \rangle$, přičemž funkce $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ je spojitá pro $\|\mathbf{x}\| < H$ a $\|\mathbf{u}\| < U$, kde $H > 0$, $U > 0$ a taková, že*

$$(4.124) \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}.$$

Nechť existuje pozitivně definitní funkce $V(t, \mathbf{x})$, spojitě derivatelná podle všech proměnných pro $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ a $\|\mathbf{x}\| < h \leq H$, přičemž pro $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ konverguje $V(t, \mathbf{x})$ k nule stejnoměrně na intervalu $\langle t_0, +\infty \rangle$, kde $t_0 \geq 0$, a nechť dále existuje funkce $\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$, jež má pro $t \in \langle 0, +\infty \rangle$, $\|\mathbf{x}\| < H$ tyto vlastnosti:

- (1) Funkce $q(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}))$ je pozitivně definitní vzhledem k \mathbf{x} .
- (2) Platí nerovnost

$$(4.125) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + q(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0,$$

přičemž pro $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0$ platí zde znamení rovnosti.

Potom funkce $\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}(t))$ optimálně stabilizuje soustavu (4.122) ve smyslu kritéria (4.123) a minimální hodnota kritéria je pak rovna výrazu $V(0, \mathbf{x}(0))$.

Důkaz. Funkce $V(t, \mathbf{x})$ splňuje předpoklady druhé Ljapunovy věty (věty 3.2), takže funkce $\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$ předpokládaných vlastností zaručuje asymptotickou stabilitu nulového řešení. Zbývá dokázat optimálnost uvedeného řešení. Časová derivace funkce $V(t, \mathbf{x})$ v důsledku soustavy (4.122) je podle předpokladu (2) rovna

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.122)} = -q(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0).$$

Tuto rovnost budeme integrovat v mezích $0, +\infty$, přičemž použijeme asymptotickou stabilitu řešení a okolnost, že pro $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ funkce $V(t, \mathbf{x})$ konverguje k nule stejnoměrně. Je tedy

$$(4.126) \quad V(0, \mathbf{x}(0)) = \int_0^{\infty} q(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}(t))) dt.$$

Vezmeme nyní libovolné $\tilde{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(t))$, pro něž je nulové řešení soustavy (4.122) asymptoticky stabilní a nechť mu odpovídá řešení $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ s počáteční podmínkou $\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\| < h$. Díky asymptotické stabilitě pro dostatečně velká t je splněna nerovnost

$$(4.127) \quad \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| < h.$$

Pokud vztah (4.127) platí pro všechna $t \geq 0$, integrujeme nerovnost (4.125) v mezích $0, +\infty$ a dostáváme

$$(4.128) \quad V(0, \tilde{\mathbf{x}}(0)) \leq \int_0^{\infty} q(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t, \tilde{\mathbf{x}}(t))) dt.$$

Jestliže vztah (4.127) pro některá $t > 0$ neplatí, najdeme číslo $k \in (0, h)$, tak, aby platilo

$$\sup_{t \geq 0, \|\tilde{\mathbf{x}}\| < k} V(t, \tilde{\mathbf{x}}) \leq \inf_{t \geq 0, \|\tilde{\mathbf{x}}\| = h} V(t, \tilde{\mathbf{x}}).$$

Vzhledem k pozitivní definitnosti $V(t, \mathbf{x})$ a její stejnoměrné konvergenci k nule pro $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ takové k existuje. Omezíme se na řešení, pro něž $\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\| < k$. Existují-li i nadále $t > 0$, pro něž nerovnost (4.127) neplatí, existuje díky asymptotické stabilitě nulového řešení nejmenší $T > 0$ takové, že nerovnost (4.127) neplatí pro T a platí pro všechna $t > T$. Integrací nerovnosti (4.125) v mezích $T, +\infty$ dostáváme

$$V(T, \tilde{\mathbf{x}}(T)) \leq \int_T^{\infty} q(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t, \tilde{\mathbf{x}}(t))) dt$$

a odtud vzhledem k volbě $\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\| < k$ a vzhledem k nezápornosti funkce $q(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ opět dostáváme nerovnost (4.128).

Srovnáme-li nyní řešení $\mathbf{x}(t)$ odpovídající $\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}(t))$ s řešením $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ odpovídajícím $\tilde{\mathbf{u}}(t, \tilde{\mathbf{x}}(t))$, vidíme podle vztahů (4.126) a (4.128), že při stejné v normě dostatečně malé počáteční podmínce $\mathbf{x}(0)$ je

$$V(0, \mathbf{x}(0)) = \int_0^{\infty} q(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}(t))) dt \leq \int_0^{\infty} q(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t, \tilde{\mathbf{x}}(t))) dt.$$

jak se tvrdí ve větě, Q.E.D.

Užití této věty ukážeme na příkladu lineární soustavy

$$(4.129) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

kde \mathbf{A} resp. \mathbf{B} je konstantní matice typu $n \times n$ resp. $r \times r$, $\mathbf{x} \in E_n$, $\mathbf{u} \in E_r$, jsou funkce proměnné t a $n \geq r \geq 1$. Budeme požadovat, aby funkce $\mathbf{u}(t)$ soustavu (4.129) optimálně stabilizovala ve smyslu kritéria

$$(4.130) \quad J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt,$$

kde \mathbf{Q} resp. \mathbf{R} je konstantní symetrická pozitivně definitní matice typu $n \times n$ resp. $r \times r$. Funkce $q(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ z věty 4.8. je zde rovna podintegrální funkci ve výrazu (4.130). Funkci $V(\mathbf{x})$ budeme hledat rovněž ve tvaru kvadratické formy s pozitivně definitní maticí

$$(4.131) \quad V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}.$$

Pro optimálně stabilizující „řídící“ funkci $\mathbf{u}^0(t)$ musí tedy platit rovnost v (4.125), to jest

$$(\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T + \mathbf{u}^{0T} \mathbf{B}^T) \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}^0) + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^{0T} \mathbf{R} \mathbf{u}^0 = 0$$

a po úpravě

$$(4.132) \quad \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{A} + \mathbf{Q}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^{0T} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^{0T} \mathbf{R} \mathbf{u}^0 = 0.$$

Jelikož nula je minimem uvedeného výrazu vzhledem k \mathbf{u} , musí být v rovnosti (4.132)

výraz, explicitně závislý na \mathbf{u} , minimální. Označme tento výraz

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}.$$

Tento výraz je skalár. Jeho parciální derivace podle souřadnic vektoru \mathbf{u} musí být v bodě minima rovné nule, neboli musí platit pro $i = 1, \dots, r$

$$\frac{\partial F(\mathbf{u})}{\partial u_i} = \mathbf{e}_i^T \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{e}_i = 0,$$

kde \mathbf{e}_i je r -rozměrový vektor, jehož i -tá souřadnice je rovna 1 a ostatní jsou rovny 0. Jednotlivé sčítance jsou zřejmě skaláry, přičemž vždy dva a dva jsou vzájemně transponované a tedy sobě rovné. Platí tedy ekvivalentní vztahy (pro $i = 1, \dots, r$)

$$\mathbf{e}_i^T (\mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{R} \mathbf{u}) = 0$$

a jejich sečtením, uvážme-li ještě, že

$$\sum_{i=1}^r \mathbf{e}_i^T = \mathbf{E}_r,$$

kde \mathbf{E}_r je jednotková matice typu $r \times r$, dostáváme

$$(4.133) \quad \mathbf{u}^0 = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{x}.$$

Můžeme tedy tvrdit toto: Pokud existuje optimálně stabilizující řízení $\mathbf{u}^0(t)$, je dáno výrazem (4.133) a platí zároveň rovnost (4.132). Z této rovnosti určíme matici \mathbf{K} . Dosadíme tedy do (4.132) za \mathbf{u}^0 jeho vyjádření (4.133). Dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{A} + \mathbf{Q}) \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{B} (\mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{x} + \\ + \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{B} (\mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = 0 \end{aligned}$$

neboli, uvážme-li, že vzhledem k symetrii \mathbf{R} je také \mathbf{R}^{-1} symetrická,

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}) \mathbf{x} = 0$$

a tato rovnost platí pro $t > 0$. Pro spojitě nenulové řešení $\mathbf{x}(t)$ je tedy nutně

$$(4.134) \quad \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} - \mathbf{A}^T \mathbf{K} - \mathbf{K} \mathbf{A} - \mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

Výsledek, k němuž jsme dospěli, lze shrnout takto: Jestliže existuje pozitivně definitní matice \mathbf{K} , jež je řešením Riccatiho maticové rovnice (4.134), pak vektorová funkce $\mathbf{u}^0(t)$, daná výrazem (4.133), řeší úlohu optimální stabilizace pro soustavu (4.129) podle kritéria (4.130). Hodnota kritéria (4.130), odpovídající optimálnímu $\mathbf{u}^0(t)$, je přitom rovna

$$J_{\text{opt}} = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{K} \mathbf{x}(0).$$

LITERATURA

Níže uvedený seznam literatury zdaleka nevyčerpává problematiku teorie stability. Další literaturu nalezneme čtenář např. v knihách [11], [13], [14], [16], [19], [27] a [45], zejména však v knize [5].

V seznamu jsou uvedeny jednak všechny prameny, z nichž jsme čerpali materiál při zpracování textu, dále publikace, které mohou čtenáři pomoci pro rozšíření vědomostí, získaných četbou této práce, a konečně některá díla, která si zasluhují pozornosti z hlediska historického. Omlouváme se však, že zdaleka ne ve všech případech zde najde čtenář odkaz na původní práci, v níž byl uveřejněn některý z výsledků, o nichž byla řeč výše.

Pro snadnější orientaci nakonec uvedeme, ve kterých učebnicích a monografiích se čtenář může podrobněji poučit o materiálu jednotlivých kapitol:

1. Kapitola: [11], [13], [37], [46].
 2. Kapitola: [5], [11], [27], [47], [55].
 3. Kapitola: [5], [10], [11], [14], [19], [22], [27], [44], [53], [54].
 4. Kapitola: [1], [4], [14], [16], [17], [18], [19], [24], [27], [45], [46], [52], [53].
-
- [1] Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.: Абсолютная устойчивость регулируемых систем. Изд. АН СССР, Москва 1963.
 - [2] Babuška I., Práger M., Vitásek E.: Numerical processes in Differential Equations. SNTL, Praha 1966.
 - [3] Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.: О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. ПММ 78, (1954), 3, 345—350.
 - [4] Боголюбов Н. Н., Крылов Н. М.: Новые методы нелинейной механики, ОНТИ, Москва 1934.
 - [5] Cezari L.: Asymptotic behaviour and stability problems in ordinary differential equations. Springer Verlag, Berlin 1963.
 - [6] Coddington E. A., Levinson N.: Theory of ordinary differential equations. McGraw Hill, New York 1955.
 - [7] Conti R.: Sulla stabilità dei sistemi di equazioni differenziali lineari. Riv. mat. Univ. Parma 6 (1955), 3—35.
 - [8] Cremer L.: Beiträge zur Beurteilung linearer Regelsysteme. ZAMM 25/27 (1947), 5.
 - [9] Cremer L.: Ein neuer Verfahren zur Beurteilung der Stabilität linearer Regelungssystemen. ZAMM 25/27 (1947), 6, 161.
 - [10] Четаев Н. Г.: Устойчивость движения, Гостехиздат, Москва 1955.
 - [11] Демидович Б. П.: Лекции по математической теории устойчивости. Изд. Наука, Москва 1967.
 - [12] Еругин Н. П.: Приводимые системы. Труды мат. инст. АН СССР XIII, Москва 1946.
 - [13] Гантмахер Ф. Р.: Теория матриц. Наука, Москва 1967.
 - [14] Hahn W.: Theorie und Anwendung der direkten Methoden von Ljapunow. Springer Verlag, Berlin 1959.
 - [14a] Heller B., Veverka A.: Michajlovo-Leonhardovo kriterium stability. Elektrotechnický obzor 42 (1953), 9, 468—478.
 - [15] Hurwitz A.: Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt. Math. Ann. 46 (1895), 273—284.
 - [16] Hale J. K.: Nonlinear oscillations McGraw Hill, New York 1963.
 - [17] Кожешник J.: Základy teorie přístrojů. Teoretická knižnice inženýra. SNTL, Praha 1965.
 - [18] Кожешник J.: Динамика strojů. SNTL, Praha 1958.

- [19] Красовский Н. Н.: Некоторые задачи теории устойчивости движения. Гостехиздат, Москва 1959.
- [20] Kurzweil J.: On the inversion of the second theorem of Lyapunov on stability of motion. Czechosl. Math. J. 6 (81), (1956), 217—259.
- [21] Kurzweil J.: On the reversibility of the first theorem of Lyapunov concerning the stability of motion. Czechosl. Math. J. 5 (80) (1955), 382—398.
- [22] La Salle J., Lefschetz S.: Stability by Lyapunov's direct method. Academia Press, New York 1961.
- [23] Leonhard A.: Ein neues Verfahren zur Stabilitäts-Untersuchungen. Archiv für Elektrotechnik 38 (1944), 17—29.
- [24] Летов А. М.: Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Физматгиз, Москва 1962.
- [25] Liénard A., Chipart E.: Sur la signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique. J. de Math. pure et appl. (6) 10 (1914), 291—346.
- [26] Ляпунов А. М.: Общая задача об устойчивости движения. (Харьков 1892.) Гостехиздат 1950.
- [27] Малкин И. Г.: Теория устойчивости движения. Гостехиздат, Москва 1966.
- [28] Maxwell J. C.: On Governors. Proc. of the Royal Soc. of London 16 (1868), 270—283.
- [29] Михайлов А. В.: Метод гармонического анализа в теории регулирования. Автоматика и телемеханика 3 (1938), 27—81.
- [30] Nekolný J.: Jednoduchý důkaz Schurova kriteria stability. Elektrotechnický obzor 45 (1956), 1, 17—21.
- [30a] Nyquist H.: Regeneration theory, Bell. Syst. Techn. Journ. 11 (1932), 126—147.
- [31] Perron O.: Über eine Matrixtransformation. Math. Zeitschrift, 32 (1930), 465—473.
- [32] Routh E. J.: Die Dynamik der Systeme der starren Körper. II, 1898, 225—234, 290—307 (překlad z angličtiny).
- [33] Schur J.: Über die charakteristischen Wurzeln. Math. Ann. 66 (1909), 488—510.
- [34] Stodola A.: Über die Regulierung von Turbinen. Schweitzer Bauzeitg. 22 (1893), 113; 23 (1894), 108.
- [35] Strejc V. a kol.: Syntéza regulačních obvodů s číslicovým počítačem. NČSAV, Praha 1965.
- [36] Strejc V.: Druhy regulovaných soustav a volba regulátoru. Souhrn prací o automatizaci. NČSAV, Praha 1955.
- [37] Strejc V., Šalamon M., Kotek Z., Balda M.: Základy teorie samočinné regulace. SNTL Praha 1958.
- [38] Vejvoda O.: On the existence and stability of the periodic solution of the second kind of a certain mechanical systems. Czechoslov. math. Journal 9 (84) (1959), 390—415.
- [39] Wazewski T.: Sur la limitation des integral des systèmes d'equations differentielles linear ordinaires. Studia Math. 10 (1948), 48—58.
- [40] Zadeh L. A.: Circuit analysis of linear varying parameter networks. Journ. App. Ph. 21 (Nov. 1950).
- [41] Zadeh L. A.: Frequency analysis of variable networks. PIRE 38 (March 1950).
- [42] Zadeh L. A.: The determination of the impulsive response of variable networks. Journ. App. Ph. 21 (1950).
- [43] Zadeh L. A.: On stability of linear varying parameter systems. Journ. App. Ph. 22 (April 1951).
- [44] Зубов В. И.: Методы А. М. Ляпунова и их применение. Изд. ЛГУ, Ленинград 1957.
- [45] Барбашин Е. А.: Функции Ляпунова. Изд. Наука, Москва 1970.
- [46] Бромберг П. В.: Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. Изд. Наука, Москва 1967.
- [47] Bellman R.: Stability theory of differential equations, McGraw-Hill, New York 1953.

- [48] Bellman R.: Kronecker products and the second method of Ljapunov, *Math. Nachrichten* 20 (1959) 1—2.
- [49] Kurzweil J., Vrkoč I.: Об обращении теоремы Ляпунова об устойчивости и теоремы Персидского о равномерной устойчивости. *Czechoslovak Math. Journal* 7 (82) (1957).
- [50] Летов А. М.: Аналитическое конструирование регуляторов. *Автоматика и телемеханика* 21 (1960), 4—6; 22 (1961), 4; 23 (1962), 11.
- [51] Strejc V.: Stavové rovnice v teorii regulace. *Kybernetika* 5 (1969), 4—6 (příloha).
- [52] Гантмахер Ф. Р.: Лекции по аналитической механике. Физматгиз, Москва 1960.
- [53] Понтрягин Л. С.: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Физматгиз, Москва 1961.
- [54] Bhatia N. P., Szegő G. P.: *Stability theory of dynamical system*. Springer-Verlag, Berlin 1970.
- [55] Hartman Ph.: *Ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, New York 1964.

