

Matematicko-fyzikálny časopis

Josef Kaucký

Poznámka k jednomu článku P. Turána

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 12 (1962), No. 3, 212--216

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/126328>

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1962

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

POZNÁMKA K JEDNOMU ČLÁNKU P. TURÁNA

JOSEF KAUCKÝ, Bratislava

1. P. Turán v článku [1] dokazuje kombinatorickou identitu

$$(1) \quad \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2,$$

kterou v roce 1867 bez důkazu uveřejnil čínsky matematik Le-Jen Shoo.

Jeho důkaz spočívá v tom, že dvojnásobkem zúsobem počítá hodnotu výrazu

$$A = -\frac{1}{k!} \left\{ \frac{d^k}{dz^k} (z^k(z+x)^{-k-1}) \right\}_{z=-1}.$$

Jedním způsobem získává vztah

$$(2) \quad A = \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} \binom{2k+v}{2k} x^v \right\} \times \left\{ \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \binom{k+v}{k} (x-1)^{k-v} \right\},$$

druhým způsobem dostává rovnici

$$(3) \quad A = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n}{k}^2 x^n.$$

2. K úpravě výrazu (2) užívá vztahu

$$(4) \quad \sum_{v=0}^k \binom{k}{v}^2 x^v = \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \binom{k+v}{k} (x-1)^{k-v},$$

který dokazuje na základě některých vlastností Legendreových polynomů.

Je-li

$$P_k(x) = \frac{1}{k!2^k} \frac{d^k}{dx^k} (x^2-1)^k$$

k -tý Legendreův polynom, pak Hurwitzova formule dává

$$(5) \quad (1-x)^k P_k \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \sum_{v=0}^k \binom{k}{v}^2 x^v.$$

Z diferenciální rovnice

$$(1 - x^2) P_k''(x) - 2xP_k'(x) + k(k + 1) P_k(x) = 0$$

a z podmínek

$$P_k(1) = 1, \quad P_k(-1) = (-1)^k$$

se dále dostane vztah

$$P_k(t) = \sum_{v=0}^k (-1)^{k-v} \binom{k}{v} \binom{k+v}{k} \left(\frac{1+t}{2}\right)^v,$$

odkud pomocí substituce

$$t = \frac{1+x}{1-x}$$

vychází

$$(6) \quad (1-x)^k P_k\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \binom{k+v}{k} (x-1)^{k-v}.$$

Porovnáním výsledků (5) a (6) vychází vztah (4).

Pomocí (4) nabývá výraz (2) tvaru

$$A = \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} \binom{2k+v}{2k} x^v \right\} \cdot \left\{ \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^2 x^j \right\}$$

a porovnáním koeficientů u x^n v rozvoji tohoto výrazu a výrazu (3) vychází identita (1).

3. Nyní ukáži, jak lze vztah (4) odvodit elementárním způsobem přímo.

Položíme-li v součtu na levé straně této rovnice $(x-1) + 1$ za x a užijeme-li binomické věty, máme předně

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^k \binom{k}{v}^2 x^v &= \sum_{v=0}^k \binom{k}{v}^2 [(x-1) + 1]^v = \\ &= \sum_{v=0}^k \binom{k}{v}^2 \sum_{l=0}^v \binom{v}{l} (x-1)^l. \end{aligned}$$

Vyměníme-li pořadí sumací ve dvojnásobném součtu na pravé straně podle pravidla

$$\sum_{v=0}^k \sum_{l=0}^v \dots = \sum_{l=0}^k \sum_{v=l}^k \dots,$$

máme dále

$$(7) \quad \begin{aligned} & \sum_{v=0}^k \binom{k}{v}^2 x^v = \\ & = \sum_{l=0}^k (x-1)^l \sum_{v=l}^k \binom{k}{v} \binom{v}{l} \binom{k}{v}. \end{aligned}$$

Jde tedy jen o úpravu vnitřního součtu.

Avšak podle vzorce

$$\begin{aligned} & \binom{m+p}{m} \binom{n}{m+p} = \\ & = \frac{(m+p)!}{m!p!} \cdot \frac{n!}{(m+p)!(n-m-p)!} = \\ & = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{p!(n-m-p)!} = \\ & = \binom{n}{m} \binom{n-m}{p} \end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned} \binom{v}{l} \binom{k}{v} & = \binom{k}{l} \binom{k-l}{v-l} = \\ & = \binom{k}{l} \binom{k-l}{k-v}, \end{aligned}$$

takže pro vnitřní součet na pravé straně rovnice (7) vychází

$$\binom{k}{l} \sum_{v=l}^k \binom{k}{v} \binom{k-l}{k-v}.$$

Je tedy

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^k \binom{k}{v}^2 x^v = \\ & = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (x-1)^l \sum_{v=l}^k \binom{k}{v} \binom{k-l}{k-v} \end{aligned}$$

a položíme-li ještě $(k-l)$ za l na pravé straně, máme

$$(8) \quad \begin{aligned} & \sum_{v=0}^k \binom{k}{v}^2 x^v = \\ & = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (x-1)^{k-l} \sum_{v=k-l}^k \binom{k}{v} \binom{l}{k-v}. \end{aligned}$$

K dokončení důkazu vypočítáme hodnotu vnitřního součtu na pravé straně. Předně je

$$\binom{l}{k-v} = 0$$

pro

$$v < k - l,$$

takže

$$\sum_{v=k-l}^k \binom{k}{v} \binom{l}{k-v} = \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \binom{l}{k-v}.$$

Podle Cauchyova vzorce

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}$$

máme konečně

$$\sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \binom{l}{k-v} = \binom{k+l}{k}$$

a po dosazení tohoto výsledku do rovnice (8) vychází žádaný vztah

$$\sum_{v=0}^k \binom{k}{v}^2 x^v = \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \binom{k+v}{k} (x-1)^{k-v}.$$

LITERATURA

- [1] Turán P., *A kínai matematika történetének egy problémájáról*, Matematikai Lapok V (1954), 1-6.

Došlo 17. 1. 1962.

*Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied
v Bratislave*

REMARQUES À UN TRAVAIL DE M. P. TURÁN

Josef Kaucký

Résumé

L'article précédent contient une démonstration élémentaire de la relation

$$\sum_{v=0}^k \binom{k}{v}^2 x^v = \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \binom{k+v}{k} (x-1)^{k-v}.$$

En effet, en substituant $(x-1) + 1$ au lieu de x dans la somme à gauche et en tenant compte du théorème des binômes, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^k \binom{k}{v}^2 x^v &= \sum_{v=0}^k \binom{k}{v}^2 [(x-1) + 1]^v = \\ &= \sum_{v=0}^k \binom{k}{v}^2 \sum_{l=0}^v \binom{v}{l} (x-1)^l = \\ &= \sum_{l=0}^k (x-1)^l \sum_{v=l}^k \binom{k}{v} \binom{v}{l} \binom{k}{v} = \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (x-1)^l \sum_{v=l}^k \binom{k}{v} \binom{k-l}{k-v} = \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (x-1)^{k-l} \sum_{v=k-l}^k \binom{k}{v} \binom{l}{k-v} = \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (x-1)^{k-l} \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \binom{l}{k-v} = \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \binom{k+l}{k} (x-1)^{k-l}. \end{aligned}$$

P. Turán a démontré cette relation à l'aide des quelques propriétés des polynômes de Legendre dans son travail [1].