Jozef Moravčík

Примечание к одной статье Берковича, Розова и Эйшинского

Matematický časopis, Vol. 22 (1972), No. 3, 226--230

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126515

Matematický časopis 22 (1972), No. 3

ПРИМЕЧАНИЕ К ОДНОЙ СТАТЬЕ БЕРКОВИЧА, РОЗОВА И ЭЙШИНСКОГО

ЙОЗЕФ МОРАВЧИК, Жилина

В статье [1] рассматриваются, кроме других, свойства самосопряженных и приводимых обыкновенных линейных дифференциальных уравнений m-того порядка. (Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение мы будем в дальнейшем писать короче д. уравнением.) Д. уравнение

$$L(D)y = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) D^k y = 0\,, \quad a_k \in C_k(I)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1, \tag{1}$$

$a_m(x) \equiv 1$ в интервале I, $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ называют приводимым в интервале I, если существует преобразование

$$y = \nu(x) z\,, \quad \mathrm{d}t = u(x)\mathrm{d}x\,, \tag{2}$$

$\nu(x)u(x) \neq 0$ в I, $\nu(x)$, $u(x) \in C_m(I)$, приводящее (1) к д. уравнению с постоянными коэффициентами

$$M(D_t)z = \sum_{k=0}^{m} b_k D_t^k z = 0\,, \quad D_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \quad b_k \text{ — постоянные}, \ k = 0, \ldots, m. \tag{3}$$

Для того чтобы д. уравнение (1) было приводимым, по теореме 10 статьи [1] необходимо и достаточно, чтобы существовала факторизация

$$L(D)y = \prod_{k=m}^{1} \left[D - \frac{\nu'}{\nu} - r_k u - (k - 1) \frac{u'}{u} \right] y = 0\,, \tag{4}$$

где r_k — корни характеристического уравнения $M(r) = 0$.

Для д. уравнения четного порядка имеет место следующее предложение:

Теорема 1. *Приводимое д. уравнение* (4) ($m = 2n$) *является самосопряженным тогда и только тогда, когда существует такое упорядочение корней* *характеристического уравнения* $M(r) = 0$ *в последовательность* $\{r_k\}_{k=1}^{m}$, *что для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$ *выполняется равенство* $r_{2n-i+1} = -r_i$ *и имеет место факторизация*

$$(5) \qquad L(D)y = \prod_{k=1}^{n}\left[D - \frac{m-2k+1}{2}\frac{u'}{u} + r_k u\right] \cdot \prod_{k=n}^{1}\left[D + \right.$$

$$\left. + \frac{m-2k+1}{2}\frac{u'}{u} - r_k u\right] y = 0 .$$

Доказательство. В том случае, когда д. уравнение (1) является не только приводимым, но и самосопряженным, в силу теорем 6 и 10 из [1] должна существовать факторизация вида (4) с тем свойством, что выполняется равенство

$$(6) \qquad \prod_{k=m}^{1}\left[D - \frac{v'}{v} - r_k u - (k-1)\frac{u'}{u}\right] y = \prod_{k=1}^{m}\left[D + \right.$$

$$\left. + \frac{v'}{v} + r_k u + (k-1)\frac{u'}{u}\right] y = 0 .$$

Из (6) непосредственно следует $(m = 2n)$

$$-\frac{v'}{v} - r_{2n}u - (2n-1)\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} + r_1 u ,$$

$$-\frac{v'}{v} - r_{2n-1}u - (2n-2)\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} + r_2 u + \frac{u'}{u}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{v'}{v} - r_{n+1}u - n\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} + r_n u + (n-1)\frac{u'}{u} ,$$

откуда мы получаем систему

$$(7) \qquad 2\frac{v'}{v} + \varrho_i u + (2n-1)\frac{u'}{u} = 0 ,$$

где $\varrho_i = r_{2n\ i+1} + r_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ввиду того, что согласно со следствием 1 теоремы 1 из [1] самосопряженное д. уравнение (1) должно быть в полуканонической форме и что по теореме 5 из [2] самосопряженное д. уравнение посредством преобразования (2) можно привести только к самосопряженному д. уравнению, д. уравнение (3) тоже будет в полуканонической форме. Из того, что в случае д. уравнений в полуканонической форме для функций $v(x)$, $u(x)$ в преобразовании (2) выполняется тождество

$$v(x) = c\,|u(x)|^{-(m-1)/2},$$

где $c \neq 0$ постоянная (смотри теорему 2 из [4], стр. 421), следует

$$2\frac{v'}{v} + (2n-1)\frac{u'}{u} = 0\,. \tag{8}$$

Следовательно из (7) мы получаем $\varrho_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Это означает, что для того, чтобы выполнялось равенство (6), корни r_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ характеристического уравнения $M(r) = 0$ должны обладать тем свойством, что их можно распределить в n пар таким образом, что сумма каждой пары равна нулю, и в факторизации (4) они должны быть упорядочены так, что для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется равенство $r_{2n-i+1} = -r_i$. Кроме того, использовав равенство (8), из (4) получим (5).

Наоборот, если корни характеристического уравнения $M(r) = 0$ обладают выше упомянутым свойством и имеет место (5), где $u(x) \in C_{2n}(I)$, $u(x) \neq 0$ в I, то по теореме 10 статьи [1] д. уравнение (1) является приводимым в I, а по теореме 6 той же статьи также самосопряженным.

Для д. уравнения нечетного порядка имеет место следующее предложение, справедливость которого доказывается аналогичным путем.

Теорема 2. *Приводимое д. уравнение* (4) ($m = 2n + 1$) *является самосопряженным тогда и только тогда, когда существует такое упорядочение корней характеристического уравнения* $M(r) = 0$ *в последовательность* $\{r_k\}_{k=1}^m$, *что для всех* $i = 1, 2, \ldots, n+1$ *выполняется равенство* $r_{m+1-i} = -r_i$ *и имеет место факторизация*

$$L(D)y = \prod_{k=1}^{n}\left[D - \frac{m-2k+1}{2}\frac{u'}{u} + r_k u\right] . D . \prod_{k=n}^{1}\left[D + \frac{m-2k+1}{2}\frac{u'}{u} - r_k u\right] y = 0\,.$$

В п. 1 § 3 статьи [1] приведена лемма 3, которая в противоречие с выше доказанной теоремой 1 утверждает:

Если приводимое д. уравнение (4) ($m = 2n$) является самосопряженным, то корни r_k характеристического уравнения $M(r) = 0$ все равны между собой ($= r$), причем имеет место факторизация

$$L(D)y = \prod_{k\ 1}^{n}\left[D + \frac{2n+1-2k}{2n-1}\alpha\right]\cdot\prod_{k=n}^{1}\left[D - \frac{2n+1-2k}{2n-1}\alpha\right]y = 0,$$

где $\alpha = \frac{\nu'}{\nu} + ru.$

Это утверждение авторы получили исходя из предположения, что в случае самосопряженности приводимого д. уравнения (1) факторизация (4) справедлива несмотря на порядок корней r_k. Это предположение, очевидно, эквивалентно предположению, что в рассматриваемом случае всякая факторизация (4) имеет свойство (6), которое неверно, как показывает следующий простой пример:

Д. уравнение $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$ является очевидно самосопряженным и приводимым (при тождественном преобразовании). Свойством (6) обладает, напр., его факторизация $[D-1][D-2][D+2][D+1]y = 0$, в то время как для факторизации $[D+2][D-2][D-1][D+1]y = 0$ это свойство уже очевидно неверно. С другой стороны известно, что приводимое д. уравнение (4) обладающее свойством $r_k = r$ для всех $k = 1, 2, \ldots, 2n$, является самосопряженным тогда и только тогда, когда r 0, т. е. когда оно итерировано (смотри, напр., [3]).

Утверждение леммы 5 статьи [1] аналогично противоречит нашей теореме 2.

Исходя из обеих выше упомянутых лемм авторы цитируемой статьи получают даже несколько других неправильных результатов. Так леммы 4 и 6 и теорема 11 справедливы только как односторонные импликации в том смысле, что итерированное д. уравнение m — того порядка является приводимым и самосопряженным, а к теореме 2 справедлива только обратная теорема 13. Но эти результаты уже известны. Они были приведены в немного другой формулировке (В. Шеда называет итерированное д. уравнение д. уравнением класса C.) в статье [3] (смотри на стр. 248 свойства 1, 4 и терорему 1; на стр. 249 следствие и теорему 2). Надо отметить, что [3] находится также в списке литературы к статье [1].

ЛИТЕРАТУРА

[1] БЕРКОВИЧ, Л. М., РОЗОВ, Н. Х., ЭЙШИНСКИЙ, А. М.: О самосопряженных и приводимых линейных дифференциальных уравнениях высших порядков и о не-

которых уравнениях второго порядка интегрируемых в конечном виде. Publications de la Faculté d'électrotechnique de l'Université à Belgrade, Ser. Mat. i Fiz., 1968, No 230—241, 61—84.
[2] HUSTÝ, Z.: On the Transformation of the Linear Homogeneous Differential Equations of the n-th Order. Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comen., Mathematica, *17*, 1967, 201—211.
[3] ŠEDA, V.: On a Class of Linear Differential Equations of Order n, $n \geqq 3$. Časop. Pěstov. Mat., *92*, 1967, 247—259.
[4] ŠEDA, V.: Über die Transformation der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung, II. Časop. Pěstov. Mat., *92*, 1967, 418—433.

Поступило 12. 8. 1970.

Katedra matematiky
a deskriptívnej geometrie
Fakulty
strojno-elektrotechnickej
Vysokej školy dopravnej,
Žilina

A NOTE ON ONE PAPER OF BERKOVICZ, ROZOV AND EJSHINSKI

Jozef Moravčík

Summary

In this article the necessary and sufficient conditions are derived for a transformable ordinary linear differential equation of the m-th order to be self-adjoint. It deals with the correct results similar to two lemmas of the quoted work.