Matematický časopis 23 (1973), No. 1

DISKONJUGOVANÁ A NEKRITICKÁ KOMPLEXNÁ DIFERENCIÁLNA ROVNICA

RUDOLF ZIMKA, Žilina

V práci budeme vyšetrovať diferenciálnu rovnicu

$$(Q) \qquad w'' = Q(t)w,$$

ktorej nosič $Q(t) = Q_1(t) + iQ_2(t)$ je komplexná funkcia reálnej premennej, spojitá na otvorenom intervale $j = (c, d)$, $c, d \in E_1^*$.

Ďalej budeme symbolom $[a, b]$ rozumieť nejaký podinterval intervalu j. Uzavretý interval označíme $\langle a, b\rangle$, polootvorené $\langle a, b)$ a $(a, b\rangle$.

Definícia. *Diferenciálnu rovnicu* (Q) *nazývame diskonjugovanou na intervale* $[a, b]$, *ak neexistuje netriviálne riešenie diferenciálnej rovnice* (Q), *ktoré má na intervale* $[a, b]$ *viac ako jeden nulový bod.*

Diferenciálnu rovnicu (Q) *nazývame nekritickou na intervale* $[a, b]$, *ak neexistuje netriviálne riešenie diferenciálnej rovnice* (Q), *ktorého derivácia má na tomto intervale viac ako jeden nulový bod.*

V prvej časti práce odvodíme postačujúce podmienky pre diskonjugovanosť diferenciálnej rovnice (Q) na intervale $[a, b]$ porovnaním nosiča $Q(t)$ s nosičom $q(t)$ rovnice (q), diskonjugovanej na rovnakom intervale. V druhej časti odvodíme postačujúce podmienky pre to, aby diferenciálna rovnica (Q) bola na intervale $[a, b]$ nekritická.

V dôkazoch viet použijeme centrálne disperzie prvého druhu, zavedené O. Borůvkom (pozri [1]), ktoré hovoria o rozložení nulových bodov riešení diferenciálnej rovnice

$$(q) \qquad y'' = q(t)y,$$

ktorej nosič $q(t)$ je spojitý a záporný na intervale j, ďalej výsledky, dosiahnuté v práci J. Krbiľu (pozri [2]) pre kvadratické funkcionály

$$(f) \qquad f(u) = \int_a^b (u'^2 + q(t)u^2)\, \mathrm{d}t.$$

1. Postačujúce podmienky pre diskonjugovanosť

Symbolom (Q) $[(q)]$ budeme rozumieť aj dvojrozmerný lineárny priestor riešení diferenciálnej rovnice (Q) [dif. rov. (q)]. Prvé centrálne disperzie prvého druhu označíme $\varphi(t)$. Pripomeňme, že ide o funkcie spojité a rastúce, a ak $y(t) \in (q)$ je také, že $y(a) = 0 \Rightarrow y[\varphi(a)] = 0$ a $y(t) \neq 0$ pre všetky $t \in (a, \varphi(a))$.

Nasledujúce lemy budú potrebné pri dôkazoch viet.

Lema 1. *Ak $b \in (a, \varphi(a))$, tak funkcionál (f) na prípustných funkciách splňajúcich okrajové podmienky $u(a) = u(b) = 0$ je kladný* (Veta 7 práce [2]).

Lema 2. *Nech $b = \varphi(a)$ a nech $u(t)$ je prípustná funkcia funkcionály (f), splňajúca okrajové podmienky $u(a) = u(b) = 0$. Potom funkcionál (f) je nezáporný a na prípustnej funkcii nadobúda hodnotu nula práve vtedy, keď je tá na intervale $\langle a, b\rangle$ rovná skoro všade riešeniu $y(t)$ diferenciálnej rovnice (q), ktoré splňa okrajové podmienky $y(a) = y(b) = 0$* (Veta 3 práce [2]).

Poznámka. V tejto práci „rovnosť skoro všade" rozumieme v zmysle Lebesguovej miery.

Lema 3. *Nech komplexná funkcia reálneho argumentu $Q(t) = Q_1(t) + iQ_2(t)$, $Q_2(t) \not\equiv 0$, a reálna funkcia $q(t)$ sú spojité na intervale j. Nech $w(t) = w_1(t) + iw_2(t) \in (Q)$, $w(t) \not\equiv 0$. Potom zložky $w_1(t)$, $w_2(t)$ nemôžu byť súčasne riešeniami tej istej diferenciálnej rovnice (q)* (Lema 3 práce [3]).

Veta 1. *Nech komplexná funkcia reálneho argumentu $Q(t) = Q_1(t) + iQ_2(t)$ a reálna záporná funkcia $q(t)$ sú spojité na intervale $j \supset \langle a, b\rangle$. Nech funkcia $\varphi(t)$ je definovaná pre všetky $t \in \langle a, b)$. Ak $b = \varphi(a)$, a ak existuje reálna konštanta γ taká, že pre všetky $t \in (a, b)$ platí nerovnosť*

$$Q_1(t) + \gamma Q_2(t) \geqq q(t), \tag{1}$$

tak je diferenciálna rovnica (Q) diskonjugovaná na intervale $\langle a, b)$ a na intervale $(a, b\rangle$.

Dôkaz. Predpokladajme, že diferenciálna rovnica (Q) nie je na $[a, b]$ diskonjugovaná. Teda existuje $w(t) = w_1(t) + iw_2(t) \in (Q)$, $w(t) \not\equiv 0$ a reálne čísla $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 < t_2$ také, že platí

$$w(t_1) = w(t_2) = 0. \tag{2}$$

Integrujme per partes v medziach od t_1 do t_2 diferenciálnu rovnicu (Q), vynásobenú funkciou $\overline{w}(t) = w_1(t) - iw_2(t)$. Dostaneme

$$[\overline{w}w']_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (|w'|^2 + Q\,|w|^2)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{3}$$

Výraz v zátvorke na základe (2) je nulový. Rozložme vzťah (3) na reálnu a imaginárnu časť, násobme imaginárnu časť konštantou γ a sčítajme ju s reálnou zložkou. Dostaneme vzťah

$$\int_{t_1}^{t_2} [|w'|^2 + (Q_1 + \gamma Q_2)|w|^2] \, dt = 0,$$

z ktorého vzhľadom na predpoklad (1) dostávame nerovnosť

$$\int_{t_1}^{t_2} (|w'|^2 + q\,|w|^2) \, dt \leqq 0. \tag{4}$$

Z (2) máme:

$$w_i(t_1) = w_i(t_2) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Vezmime najskôr prípad $[a, b] = \langle a, b)$, t. j. $a \leqq t_1 < t_2 < b$, teda $t_2 \in \in (t_1, b) \subset (t_1, \varphi(t_1))$, a podľa tvrdenia lemy 1 je funkcionála (f) na prípustných funkciách (5) kladná, teda platia nerovnosti

$$\int_{t_1}^{t_2} (w_i'^2 + q w_i^2) \, dt > 0, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

Ich sčítaním dostávame nerovnosť

$$\int_{t_1}^{t_2} (|w|^2 + q|w|^2) \, dt > 0, \tag{7}$$

ktorá je v spore s nerovnosťou (4).

V prípade $[a, b] = (a, b\rangle$ máme opäť $t_2 \in (t_1, \varphi(t_1))$ a teda zasa dostávame spor. Týmto je dôkaz vety ukončený.

Dôsledok 1.1. *Ak vo vete 1 predpokladáme, že pre všetky $t \in (a, b)$ platí ostrá nerovnosť*

$$Q_1(t) + \gamma Q_2(t) > q(t), \tag{1'}$$

tak je diferenciálna rovnica (Q) diskonjugovaná na intervale $\langle a, b\rangle$.

Dôkaz. Prvá časť dôkazu je analogická dôkazu vety 1. Použitím výrazu (3) a predpokladu (1′) dostávame nerovnosť

$$\int_{t_1}^{t_2} (|w'|^2 + q\,|w|^2) \, dt < 0. \tag{4'}$$

Prípady $t_1, t_2 \in \langle a, b)$ a $t_1, t_2 \in (a, b\rangle$ boli vyšetrené v dôkaze vety. V prípade $t_1 = a$, $t_2 = \varphi(a) = b$ podľa tvrdenia prvej časti lemy 2 máme nerovnosť

$$\int_{t_1}^{t_2} (|w'|^2 + q\,|w|^2) \, dt \geqq 0, \tag{7'}$$

ktorá je v spore s nerovnosťou (4′).

Dôsledok 1.2. *Nech vo vete 1 pre nosič* $Q(t) = Q_1(t) + iQ_2(t)$ *naviac platí* $Q_2(t) \not\equiv 0$. *Potom za predpokladov vo vete 1 je diferenciálna rovnica* (Q) *diskonjugovaná na intervale* $\langle a, b\rangle$.

Dôkaz. Je zrejmé, že nerovnosť (4) opäť platí. Z druhej časti tvrdenia lemy 2 dostávame na základe tvrdenia lemy 3, že zložky $w_i(t)$ nemôžu byť súčasne riešeniami tej istej diferenciálnej rovnice (q), ktorá je *Eulerovou rovnicou* pre funkcionálu (f), platnosť nerovnosti (6) aspoň pre jedno $i = 1, 2$, a teda aj (7) a takto spor so (4).

2. Postačujúce podmienky pre nekritickosť

Najskôr uveďme lemu, ktorú budeme potrebovať v dôkaze vety 2.

Lema 4. *Nech v diferenciálnej rovnici* (Q) *je nosič* $Q(t) \in C^2$, $Q(t) \neq 0$ *na intervale* j. *Ak* $w(t) \in (Q)$, *tak funkcia*

$$\tilde{w}(t) = w'(t) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int \frac{Q'(t)}{Q(t)}\,\mathrm{d}t\right\} \tag{8}$$

je riešením diferenciálnej rovnice

$$\tilde{w}'' = \tilde{Q}(t)\tilde{w} \tag{$\tilde{Q}$}$$

na intervale j, *pričom*

$$\tilde{Q}(t) = \tilde{Q}_1(t) + i\tilde{Q}_2(t) = Q(t) + \frac{3}{4}\left[\frac{Q'(t)}{Q(t)}\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{Q''(t)}{Q(t)}.$$

Dôkaz. O pravdivosti tvrdenia sa presvedčíme dosadením do diferenciálnej rovnice $(\tilde{Q})$.

Veta 2. *Nech pre komplexnú funkciu reálneho argumentu* $Q(t) = Q_1(t) + iQ_2(t)$ *na intervale* $j \supset \langle a, b\rangle$ *platí:* $Q(t) \in C^2$, $Q(t) \neq 0$. *Nech* $\tilde{Q}(t) = \tilde{Q}_1(t) + i\tilde{Q}_2(t) = Q(t) + \frac{3}{4}\left[\frac{Q'(t)}{Q(t)}\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{Q''(t)}{Q(t)}$.

Nech reálna funkcia $q(t)$ *je spojitá a záporná na intervale* j *a nech pre všetky* $t \in \langle a, b)$ *je definovaná funkcia* $\varphi(t)$. *Ak* $b = \varphi(a)$ *a ak existuje reálna konštanta* γ *taká, že pre všetky* $t \in (a, b)$ *platí nerovnosť*

$$\tilde{Q}_1(t) + \gamma\tilde{Q}_2(t) \geqq q(t), \tag{9}$$

tak je diferenciálna rovnica (Q) *nekritická na intervale* $\langle a, b)$ *a na intervale* $(a, b\rangle$.

Dôkaz. Podľa vety 1 je diferenciálna rovnica $(\tilde{Q})$ diskonjugovaná na intervale $\langle a, b)$ aj $(a, b\rangle$. Zo vzťahu (8) vyplýva $\tilde{w} = 0 \Leftrightarrow w' = 0$ a teda diferenciálna rovnica (Q) je nekritická na intervale $\langle a, b)$ aj $(a, b\rangle$.

Záverom uvedieme dva dôsledky vety 2, ktorých dôkazy sú analogické dôkazom dôsledkov vety 1.

Dôsledok 2.1. *Ak vo vete 2 predpokladáme platnosť ostrej nerovnosti*

$$\tilde{Q}_1(t) + \gamma\tilde{Q}_2(t) > q(t) \tag{9'}$$

pre všetky $t \in (a, b)$, *tak je diferenciálna rovnica* (Q) *nekritická na intervale* $\langle a, b\rangle$.

Dôsledok 2.2. *Nech vo vete 2 pre nosič* $Q(t) = Q_1(t) + iQ_2(t)$ *naviac platí* $\tilde{Q}_2(t) \not\equiv 0$. *Potom za predpokladov vo vete 2 je diferenciálna rovnica*(Q) *nekritická na intervale* $\langle a, b\rangle$.

LITERATÚRA

[1] BORŮVKA, O.: Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung. Berlin, 1967.

[2] KRBIĽA, J.: Vyšetrovanie kvadratických funkcionál. In: Sborník prací Vysoké školy dopravní a Výskumného ústavu dopravního, *25*, 1969.

[3] KRBIĽA, J.: Sufficient conditions for definiteness of linear differential equation of the second order. In: Sborník prácí Vysokej školy dopravní a Výskumného ústavu dopravního (to appear).

Došlo 16. 7. 1971

Katedra matematiky
a deskriptívnej geometrie
Fakulty strojno-elektrotechnickej
Vysokej školy dopravnej
Žilina

DISCONJUGATE AND NON-CRITICAL COMPLEX DIFFERENTIAL EQUATION

Rudolf Zimka

Summary

Let us have the differential equation

$$w'' = Q(t)w, \tag{Q}$$

$Q(t) = Q_1(t) + iQ_2(t)$, $t \in j = (c, d)$, c, $d \in E_1^*$.

The differential equation (Q) is called disconjugate on the interval $[a, b]$, if there does not exist any non-trivial solution of the differential equation (Q), which has more than one zero point on the interval $[a, b]$.

The differential equation (Q) is called a non-critical one on the interval $[a, b]$, if there does not exist any non-trivial solution of the differential equation (Q), whose derivative has more than one zero point on the interval $[a, b]$.

In the paper sufficient conditions are derived for the differential equation (Q) on the interval $[a, b]$ $(\subset j)$ to be disconjugate (the first part of the paper) and sufficient conditions for it to be non-critical (the second part of the paper). The relsuts can be obtained by comparing the bearer $Q(t)$ with the real negative and continuous function $q(t)$ in the interval j, which is the bearer of the differential equation $(q) : y'' = q(t)y$.