Václav Medek

Eine Bemerkung über endliche Ovale ungerader Ordnung

Matematický časopis, Vol. 22 (1972), No. 4, 319--322

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127028

Matematický časopis 22 (1972), No. 4

EINE BEMERKUNG ÜBER ENDLICHE OVALE UNGERADER ORDNUNG

VÁCLAV MEDEK, Bratislava

Buekenhout in [1] hat den Begriff des Ovals mittels Involutionen eingeführt. Jedem endlichen Oval $\mathcal{O}$ kann man eine Inzidenzstruktur $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ so zuordnen, dass ihre Punkte teils die Punkte des Ovals $\mathcal{O}$, teils die Involutionen und ihre Geraden gewisse Untermengen der Menge der Punkten sind. Diese Inzidenzstruktur muss nicht eine projektive Ebene sein. Ich zeige eine Art von endlichen Ovalen ungerader Ordnung, für welche die Inzidenzstruktur $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ eine projektive Ebene derselben Ordnung ist.

Wir nehmen an, dass der Oval $\mathcal{O}$ ein endlicher und von ungerader Ordnung n ist. Eine Involution des Ovals kann entweder hyperbolische mit zwei invarianten Punkten, oder elliptische ohne invarianten Punkte sein. Wir werden uns mit solchen Ovalen beschäftigen, welche diese Eigenschaft haben: Seien $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ zwei verschiedene Involutionen, die keinen gemeinsamen invarianten Punkt haben; dann gibt es gerade eine solche Involution $\mathbf{K} \neq \mathbf{I}, \mathbf{J}$, die mit beiden Involutionen $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ vertauschbar ist.

Im weiteren werden wir unter einem Oval nur einen endlichen Oval ungerader Ordnung mit angeführter Eigenschaft verstehen.

Dann gilt.

Lemma 1. *Sei $\mathbf{I}$ eine hyperbolische Involution mit invarianten Punkten A, B; dann ist eine Involution $\mathbf{K} \neq \mathbf{I}$ mit der Involution $\mathbf{I}$ gerade dann vertauschbar, wenn $\mathbf{K}A = B$ ist.*

Beweis. Zuerst setzen wir voraus, dass $\mathbf{K}A = A$ ist; dann muss $\mathbf{K}B = B' \neq A$ und auch $B' \neq B$ sein, da anders $\mathbf{K} = \mathbf{I}$. Sei $\mathbf{I}B' = B'' \neq B'$; dann ist $B = \mathbf{I}B = \mathbf{K}^2\mathbf{I}B = \mathbf{KIK}B = \mathbf{KI}B' = \mathbf{K}B'' \neq B$, da $B = \mathbf{K}B'$. Also muss $\mathbf{K}A = A' \neq A$ sein. Wenn $\mathbf{KIK}A = A$ gelten soll, muss $\mathbf{KIK}A = \mathbf{KI}A' = A$, oder $\mathbf{I}A' = A'$ sein, woraus $A' = B$ folgt. Wenn umgekehrt $\mathbf{K}A = B$, dann ist $\mathbf{KIK}$ eine Involution mit invarianten Punkten A, B und da nur eine solche Involution existiert, ist $\mathbf{KIK} = \mathbf{I}$.

Lemma 2. *Seien $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ zwei verschiedene Involutionen mit einem gemeinsamen* *invarianten Punkte P; dann existiert keine solche Involution, die mit beiden Involutionen* **I**, **J** *vertauschbar ist.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass eine solche Involution **K** existiert, für welche **KIK** = **I** und **KJK** = **J** gilt; seien A, I invariante Punkte der Involution **I** und A, $J \neq I$ seien invariante Punkte der Involution **J**; dann folgt aus Lemma 1, dass **K**$A = I$ und **K**$A = J$ gleichzeitig gelten, was im Widerspruch zu $I \neq J$ ist.

Definition. *Zu jedem Oval $\mathcal{O}$ konstruieren wir eine Inzidenzstruktur $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ in dieser Weise: Die Punkte der Inzidenzstruktur $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ seien 1. die Involutionen des Ovals $\mathcal{O}$ und 2. die Punkte des Ovals $\mathcal{O}$. Die Geraden der Inzidenzstruktur $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ seien 1. die Mengen aller solcher Involutionen, die mit einer Involution* **K** *vertauschbar sind (wenn die Involution* **K** *hyperbolisch ist, ergänzen wir die Menge der Involutionen mit invarianten Punkten der Involution* **K**) *und 2. die Mengen aller solcher Involutionen, die einen gemeinsamen invarianten Punkt haben. Ein Punkt aus $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ ist mit einer Geraden aus $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ gerade dann inzident wenn die Gerade den Punkt enthält.*

Im weiteren, wenn kein Missverständnis entstehen kann, werden wir unter einem Punkt aus $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ einen Punkt aus $\mathcal{O}$ verstehen.

Für die Inzidenzstruktur $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ gilt.

Satz. *Die Inzidenzstruktur $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ ist eine projektive Ebene.*

Beweis. Man soll zeigen, dass in der Inzidenzstruktur $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ die Axiome der projektiven Ebene erfüllt sind.

(i) Seien A, B zwei verschiedene Punkte aus $\mathcal{P}(\mathcal{O})$.

(a) Seien A, B zwei verschiedene Involutionen des Ovals $\mathcal{O}$. Wenn die Involutionen **A**, **B** keinen gemeinsamen invarianten Punkt haben, dann existiert nach Voraussetzung gerade eine Involution, die mit beiden Involutionen **A**, **B** vertauschbar ist und beide gerade einer Geraden 1. Art gehören. Wenn die Involutionen **A**, **B** gerade einen gemeinsamen invarianten Punkt haben, dann existiert nach Lemma 2 keine Gerade 1. Art, die beide Involutionen **A**, **B** enthält und es gibt gerade eine Gerade 2. Art, die sie enthält.

(b) Sei **A** eine Involution und B ein Punkt des Ovals $\mathcal{O}$. Zuerst setzen wir voraus, dass der Punkt B ein invarianter Punkt der Involution **A** ist; dann muss die Involution **A** noch einen weiteren invarianten Punkt $B' \in \mathcal{O}$ haben, wobei $B' \neq B$. Nach Lemma 1 vertauschen alle Involutionen, die mit der Involution **A** vertauschbar sind, die Punkte B, B' und daher kann keiner von ihnen ihr invarianter Punkt sein .Da aber der Punkt B zur gesuchten Geraden gehören soll, kann diese nicht eine Gerade 1. Art sein. Es gibt doch gerade eine Gerade 2. Art, die den Punkt B und die Involution **A** enthält.

Setzen wir jetzt voraus, dass der Punkt B kein invarianter Punkt der Involution **A** ist; dann bildet die Involution **A** den Punkt B in den Punkt

$B' \neq B$ ab. Die gesuchte Gerade kann nicht eine Gerade 2. Art sein. Aus der Geraden 1. Art kann das nur eine solche Gerade sein, die aus der hyperbolischen Involution $\mathscr{P}$ entsteht, da sie anders keinen Punkt des Ovals enthalten könnte. Nach Lemma 1 muss dann die Involution $\mathscr{P}$ invariante Punkte B, B' haben und eine solche gibt es gerade nur eine.

c) Seien A, B zwei verschiedene Punkte des Ovals $\mathscr{O}$; dann muss die Gerade, die zwei verschiedene Punkte des Ovals enthält, 1. Art sein und eine solche gibt es nur eine einzige, da gerade eine Involution mit zwei invarianten Punkten A, B existiert.

In jedem Fall gibt es also gerade eine Gerade in $\mathscr{P}(\mathscr{O})$, die die Punkte A, $B \in \mathscr{P}(\mathscr{O})$ enthält.

(ii) Seien a, b zwei verschiedene Geraden 1. Art und die Gerade a, resp. b, sei aus der Involution $\mathbf{A}$, resp. $\mathbf{B}$, entstanden. Die Involutionen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ müssen verschieden sein, da die Geraden a, b verschieden sind. Setzen wir voraus, dass die Involutionen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ einen gemeinsamen invarianten Punkt M haben; dann hat die Involution $\mathbf{A}$ noch einen invarianten Punkt $M' \neq M$ und die Involution $\mathbf{B}$ einen weiteren invarianten Punkt $M'' \neq M$ und da $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ ist, muss $M' \neq M''$ sein. Die Geraden a, b haben einen gemeinsamen Punkt M und können keinen weiteren Punkt aus $\mathscr{O}$ zusammen haben, da $a \neq b$. Sie können auch keine gemeinsame Involution haben, da es zu zwei verschiedenen Involutionen mit einem gemeinsamen invarianten Punkt keine gemeinsame vertauschbare Involution gibt.

Setzen wir jetzt voraus, dass die Involutionen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ keinen gemeinsamen invarianten Punkt haben. Dann gibt es gerade eine Involution $\mathbf{K}$, die mit beiden Involutionen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ vertauschbar ist und das ist der einzige gemeinsame Punkt der Geraden a, b.

b) Sei a eine Gerade 1. Art und sei b eine Gerade 2. Art; die Gerade a sei aus der Involution $\mathbf{A}$ entstanden und die Gerade b soll die Involutionen mit gemeinsamen invarianten Punkt B enthalten. Zuerst setzen wir voraus, dass die Gerade a den Punkt B enthält; dann ist die Involution $\mathbf{A}$ hyperbolisch mit den invarianten Punkten B, $B' \neq B$. Jede von den Involutionen der Geraden a muss die Punkte B, B' vertauschen, kann daher den Punkt B nicht für einen invarianten Punkt haben und kann nicht gleichzeitig der Geraden b gehören. Also haben die Geraden a, b gerade den Punkt B gemeinsam.

Setzen wir jetzt voraus, dass die Gerade a den Punkt B nicht enthält. Sei $\bar{B} \neq B$ das Bild des Punktes B in der Involution $\mathbf{A}$ (wenn $\bar{B} = B$ wäre, hätten wir den vorgenannten Fall); nach Lemma 1 ist dann die Involution $\mathbf{A}$ gerade mit der Involution aus der Geraden b, die die invarianten Punkte $B, \bar{B}$, hat, vertauschbar, da alle Involutionen der Geraden b hyperbolisch sind. Solche ist gerade eine.

c) Seien a, b zwei Geraden 1. Art; die Gerade a soll den Punkt $A \in \mathcal{O}$ und die Gerade b soll den Punkt $B \in \mathcal{O}$ enthalten. Dann ist der gemeinsame Punkt der Geraden a, b gerade die einzige Involution mit invarianten Punkten A, B.

Wir haben also gezeigt, dass jede zwei verschiedene Punkte aus $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ gerade einen gemeinsamen Punkt haben.

(iii) Seien A, B, C, D vier willkürliche verschiedene Punkte des Ovals $\mathcal{O}$; dann können keine drei von ihnen auf einer Geraden aus $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ liegen, da jede Gerade aus $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ höchstens zwei Punkte des Ovals $\mathcal{O}$ enthalten kann.

Diesen Satz kann man leicht auf unendliche Ovale erweitern.

LITERATUR

[1] BUEKENHOUT, F.: Étude intrisèque des ovales. Rend. Mat. *25*, 1966, 1—61.

Eingegangen am 30. 7. 1970

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebnej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
Bratislava