

Michèle Benyounes

Crochet de Jacobi non local sur un revêtement et ses applications à l'étude de l'équation de Burgers

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 47 (1997), No. 3, 505–510

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/127374>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1997

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

CROCHET DE JACOBI NON LOCAL SUR UN REVÊTEMENT ET SES APPLICATIONS À L'ÉTUDE DE L'ÉQUATION DE BURGERS

MICHÈLE BENYOUNES, Brest

(Reçu le 1 février 1995)

I. INTRODUCTION

Pour un système \mathcal{Y} d'équations aux dérivées partielles, on rappelle d'abord les notions de revêtement $\tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}_\infty$ et de symétries non locales associées, introduites dans [4], [5]. En utilisant la structure d'algèbre de Lie des symétries non locales de \mathcal{Y} , nous définissons un crochet de Jacobi «non local» sur les caractéristiques de symétries non locales. Nous montrerons dans le Théorème 1 ci-dessous que le crochet ainsi obtenu permet de déduire de nouvelles symétries non locales pour \mathcal{Y} : nous appliquons cette construction à l'étude de l'équation de Burgers (voir paragraphe 5 ci-dessous).

Nous suivons les notations de [4]. En particulier, $\mathcal{Y} = \{F = 0\} \subset J^k\pi$ désignera un système d'équations aux dérivées partielles sur la variété fibrée $E \xrightarrow{\pi} M$ avec $\dim M = n$, $\dim E = n + m$. $J^k\pi$ désigne le fibré des jets d'ordre k sur E , $J^\infty\pi$ le fibré des jets d'ordre infini et $F = (F_1, \dots, F_m)$ où $F_i \in \mathcal{C}^\infty(J^k\pi)$. \mathcal{Y}_∞ est l'extension d'ordre infini de \mathcal{Y} , $\mathcal{Y}_\infty \subset J^\infty\pi$. D_j pour $1 \leq j \leq n$ désignant l'opérateur de dérivation totale par rapport à x_j , on notera \bar{D}_j sa restriction à \mathcal{Y}_∞ (les (x_1, \dots, x_n) sont des coordonnées locales sur M).

On rappelle aussi que la structure de contact sur $J^\infty(\pi)$ (resp. \mathcal{Y}_∞) est déterminée par le système des n champs de vecteurs D_j (resp. \bar{D}_j) qui satisfont les conditions de Frobenius: $[D_i, D_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq n$ (resp. $[\bar{D}_i, \bar{D}_j] = 0$).

Enfin, si $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est la caractéristique d'une symétrie généralisée (locale) $\ni \varphi$ de \mathcal{Y} , φ vérifie alors $\ell_F \varphi = 0$ où ℓ_F désigne l'opérateur de linéarisation universelle pour F : $\ell_F = \sum_{|I| \geq 0} \frac{\partial F}{\partial u_I} D_I$.

II. REVÊTEMENT D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES \mathcal{Y}

Définition. Un revêtement d'un système d'équations aux dérivées partielles \mathcal{Y} est un triplet $(\tilde{\mathcal{Y}}, \tau, \tilde{\mathcal{C}})$ vérifiant les trois propriétés suivantes:

- $\tilde{\mathcal{Y}}$ est une variété de dimension infinie.
- $\tilde{\mathcal{C}}$ est une distribution intégrable de dimension n sur $\tilde{\mathcal{Y}}$.
- τ est une application \mathcal{C}^∞ de $\tilde{\mathcal{Y}}$ dans \mathcal{Y}_∞ qui préserve les structures de contact.

Interprétation locale d'un revêtement (voir [4]). Soient $W \subset \mathbb{R}^N$, $0 \leq N \leq \infty$ un domaine de \mathbb{R}^N et (w_1, \dots, w_N) des coordonnées locales sur W . Alors, localement, un revêtement $\tau: \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}_\infty$ est représenté par $\tilde{\mathcal{Y}} = W \times \mathcal{Y}_\infty \xrightarrow{\tau} \mathcal{Y}_\infty$ où τ désigne la projection naturelle sur \mathcal{Y}_∞ . Le revêtement $\tau: \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}_\infty$ est défini par sa structure de contact de dimension n , qui est déterminée par le système des n champs de vecteurs \tilde{D}_i sur $\tilde{\mathcal{Y}}$:

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{D}_i &= \bar{D}_i + X^i, \quad 1 \leq i \leq n \text{ où} \\ X^i &= \sum_{j=1}^N X_j^i \frac{\partial}{\partial w_j} \text{ avec } X_j^i \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{\mathcal{Y}}). \end{aligned}$$

Les coordonnées (w_1, \dots, w_N) sur la fibre de la projection τ sont appelées variables non locales et N est la dimension du revêtement $\tau: \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}_\infty$. Les n champs de vecteurs \tilde{D}_i satisfont les conditions de Frobenius $[\tilde{D}_i, \tilde{D}_j] = 0$; ils peuvent s'interpréter de façon naturelle comme des opérateurs de dérivation totale sur $\tilde{\mathcal{Y}}$.

III. SYMÉTRIES NON LOCALES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES \mathcal{Y}

De façon indépendante, les symétries non locales ont été étudiées par Bluman et Kumei ([2]), mais sans utiliser le revêtement associé. Nous introduirons ici uniquement les symétries non locales associées à un revêtement $\tilde{\mathcal{Y}}$ donné, en nous référant une nouvelle fois aux travaux de A. M. Vinogradov et I. S. Krasilshchik.

Définition (voir [4]). Soient $\tau: \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}_\infty$ un revêtement de \mathcal{Y} , $D_{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{Y}}$ l'algèbre de Lie des champs de contact (ou \mathcal{C} -champs sur $\tilde{\mathcal{Y}}$), et $\mathcal{C}D(\tilde{\mathcal{Y}})$ l'idéal de $D_{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{Y}})$ formé par les champs de vecteurs triviaux. Alors l'algèbre de Lie des symétries non locales de type τ de \mathcal{Y} , que l'on notera $\text{Sym}_\tau(\mathcal{Y})$, est définie comme l'algèbre de Lie quotient $D_{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{Y}})/\mathcal{C}D(\tilde{\mathcal{Y}})$.

Expression en coordonnées locales d'une symétrie non locale. L'identification du quotient $D_{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{Y}})/\mathcal{C}D(\tilde{\mathcal{Y}})$ avec la sous algèbre de Lie de $D_{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{Y}})$ des champs de contact verticaux sur $\tilde{\mathcal{Y}}$, que l'on notera $D_{\mathcal{C}}^{vert}(\tilde{\mathcal{Y}})$, permet d'obtenir la forme générale d'une symétrie non locale de type τ pour \mathcal{Y} . Notant $\tilde{\ell}_F$ le nouvel opérateur obtenu en substituant \tilde{D}_I à D_I dans ℓ_F , on obtient alors:

Théorème [4]. *Soit $\tau : \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}_{\infty}$ un revêtement de $\mathcal{Y} = \{F = 0\}$. Supposons, pour simplifier les notations, que (x_i, u_i^{α}) ($1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m, 0 \leq |I| \leq \infty$), soit aussi un système de coordonnées locales internes sur \mathcal{Y}_{∞} . Alors toute symétrie non locale de type τ de \mathcal{Y} est de la forme*

$$\tilde{\Xi}_{\psi, \varphi} = \tilde{\Xi}_{\psi} + \sum_{j=1}^N \varphi_j \frac{\partial}{\partial w_j}, \quad \text{où } \tilde{\Xi}_{\psi} = \sum_{\substack{0 \leq |I| \leq \infty \\ 1 \leq \alpha \leq m}} \tilde{D}_I(\psi_{\alpha}) \frac{\partial}{\partial u_i^{\alpha}};$$

les fonctions $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m) \in \mathcal{C}^{\infty}(\tilde{\mathcal{Y}})$ et $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \mathcal{C}^{\infty}(\tilde{\mathcal{Y}})$ satisfont les relations

$$(3) \quad \begin{cases} \tilde{\ell}_F(\psi) = 0, \\ \tilde{D}_i(\varphi_j) = \tilde{\Xi}_{\psi, \varphi}(X_j^i) \text{ pour } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

IV. CROCHET DE JACOBI NON LOCAL

Dans cette partie, nous définissons un crochet de Jacobi sur $\tilde{\mathcal{Y}}$, qui étend le crochet de Jacobi usuel sur \mathcal{Y} , de telle sorte que si $\tilde{\Xi}_{\psi, \varphi}$ et $\tilde{\Xi}_{\psi', \varphi'}$ sont deux symétries non locales de type τ pour \mathcal{Y} , le crochet $\{(\psi, \varphi), (\psi', \varphi')\}_{\sim}$ soit encore la caractéristique d'une nouvelle symétrie non locale de type τ pour \mathcal{Y} .

Crochet de Jacobi sur \mathcal{Y} . Dans l'étude des symétries locales généralisées d'un système d'équations aux dérivées partielles \mathcal{Y} , si l'on désigne par ψ et ψ' les caractéristiques de deux symétries d'évolution généralisées pour \mathcal{Y} , le crochet de Lie $[\Xi_{\psi}, \Xi_{\psi'}]$ de ces deux symétries est une nouvelle symétrie d'évolution pour \mathcal{Y} , notée $\Xi_{\psi''}$. La nouvelle caractéristique ψ'' est donnée par la formule $\psi'' = \Xi_{\psi}(\psi') - \Xi_{\psi'}(\psi)$. On définit alors le crochet de Jacobi par $\{\psi, \psi'\} = \psi''$, ce qui fournit le résultat suivant: $[\Xi_{\psi}, \Xi_{\psi'}] = \Xi_{\{\psi, \psi'\}} \in \text{Sym } \mathcal{Y}$.

Définition du crochet de Jacobi non local. Soit $\tilde{\mathcal{Y}} \xrightarrow{\tau} \mathcal{Y}_{\infty}$ un revêtement de \mathcal{Y} de dimension N . Soient $\tilde{\Xi}_{\psi, \varphi}, \tilde{\Xi}_{\psi', \varphi'}$ deux symétries non locales de type τ de \mathcal{Y} avec

$$\begin{aligned} \psi &= (\psi_1, \dots, \psi_m) \in \mathcal{C}^{\infty}(\tilde{\mathcal{Y}}); \psi' = (\psi'_1, \dots, \psi'_m) \in \mathcal{C}^{\infty}(\tilde{\mathcal{Y}}), \\ \varphi &= (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \mathcal{C}^{\infty}(\tilde{\mathcal{Y}}); \varphi' = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \mathcal{C}^{\infty}(\tilde{\mathcal{Y}}). \end{aligned}$$

Alors le crochet de Jacobi non local des deux couples de fonctions (ψ, φ) et (ψ', φ') est défini par:

$$(4) \quad \{(\psi, \varphi), (\psi', \varphi')\}_{\sim} = (\psi'', \varphi'') \quad \text{avec} \\ \begin{cases} \psi'' = \tilde{\Xi}_{\psi, \varphi}(\psi') - \tilde{\Xi}_{\psi', \varphi'}(\psi) \text{ et} \\ \varphi'' = \tilde{\Xi}_{\psi, \varphi}(\varphi') - \tilde{\Xi}_{\psi', \varphi'}(\varphi). \end{cases}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre résultat principal:

Théorème 1. Soient $\mathcal{Y} = \{F = 0\}$ un système d'équations aux dérivées partielles et $\tau: \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}_{\infty}$ un revêtement de \mathcal{Y} de dim N . Soient $\tilde{\Xi}_{\psi, \varphi}$ et $\tilde{\Xi}_{\psi', \varphi'}$ deux symétries non locales de type τ de \mathcal{Y} . Alors

- (i) le crochet de Lie de $\tilde{\Xi}_{\psi, \varphi}$ et $\tilde{\Xi}_{\psi', \varphi'}$ est égal à $\tilde{\Xi}_{\{(\psi, \varphi), (\psi', \varphi')\}_{\sim}}$;
- (ii) $\{(\psi, \varphi), (\psi', \varphi')\}_{\sim} = (\psi'', \varphi'')$ est la caractéristique d'une nouvelle symétrie non locale de type τ de \mathcal{Y} .

Démonstration. (i) En suivant la notation de (2) pour $\tilde{\Xi}_{\psi, \varphi}$ et $\tilde{\Xi}_{\psi', \varphi'}$ on a:

$$\begin{aligned} [\tilde{\Xi}_{\psi, \varphi}, \tilde{\Xi}_{\psi', \varphi'}] &= \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq m \\ 0 \leq |I| \leq \infty}} (\tilde{\Xi}_{\psi, \varphi}(\tilde{D}_I(\psi'_\alpha)) - \tilde{\Xi}_{\psi', \varphi'}(\tilde{D}_I(\psi_\alpha))) \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \\ &\quad + \sum_{j=1}^N (\tilde{\Xi}_{\psi, \varphi}(\varphi'_j) - \tilde{\Xi}_{\psi', \varphi'}(\varphi_j)) \frac{\partial}{\partial w_j} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq m \\ 0 \leq |I| \leq \infty}} \tilde{D}_I(\psi''_\alpha) \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} + \sum_{j=1}^N \varphi''_j \frac{\partial}{\partial w_j} \quad \text{avec les notations de (4)} \end{aligned}$$

et $[\tilde{\Xi}_{\psi, \varphi}, \tilde{\Xi}_{\psi', \varphi'}] = \tilde{\Xi}_{\{(\psi, \varphi), (\psi', \varphi')\}_{\sim}}$ d'où le résultat.

(ii) Maintenant, il suffit de montrer que φ'' et ψ'' vérifient (3): mais le résultat découle du fait que les opérateurs $\tilde{\ell}_F$ et $\tilde{\Xi}_{\psi, \varphi}$ d'une part, \tilde{D}_i et $\tilde{\Xi}_{\psi, \varphi}$ d'autre part, commutent entre eux. □

V. APPLICATION À L'ÉTUDE DE L'ÉQUATION DE BURGERS

Considérons l'équation de Burgers $\mathcal{Y} = \{u_t = u_{xx} + uu_x\}$ et son prolongement d'ordre infini \mathcal{Y}_{∞} avec des coordonnées internes $(x, t, p_0 = u, \dots, p_k = u_k, \dots)$ où $u_k = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$. La transformation de Cole-Hopf est un revêtement de l'équation de Burgers par l'équation de la chaleur. On a $\tau: \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}_{\infty}$, où $\tilde{\mathcal{Y}}$ est l'équation de la chaleur $w_t = w_{xx}$.

Le revêtement considéré, de dimension 1, (la variable non locale est notée w) est ici déterminé par un opérateur Δ défini par $u = \Delta(w) = \frac{2w_x}{w}$. La transformation Δ associe à toute solution de $\tilde{\mathcal{Y}}$ une solution de \mathcal{Y} . Dans ce cas particulier, trouver les symétries non locales de \mathcal{Y} se réduit donc à expliciter les symétries (locales) de $\tilde{\mathcal{Y}}$: Ainsi, si $\varphi = \varphi(w)$ est une fonction génératrice d'une symétrie (locale) de $\tilde{\mathcal{Y}}$, la fonction $\psi = \bar{\ell}_{\Delta(w)}(\varphi)$ est une solution non locale de l'équation $\bar{\ell}_F = 0$ (où $F = u_t - u_{xx} - uu_x$ et $\bar{\ell}$ est l'opérateur de linéarisation universelle restreint à \mathcal{Y}_∞). Alors $\tilde{\Xi}_{\psi, \varphi}$ est une symétrie non locale de l'équation de Burgers. Il n'est pas difficile de montrer que toute symétrie d'ordre inférieur ou égal à 2 de l'équation de la chaleur s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \varphi = & \left[\frac{1}{2}at^2 + bt + c \right] w_{xx} + \left[\frac{1}{2}(at + b)x + dt + e \right] w_x \\ & + \left[\frac{1}{8}ax^2 + \frac{1}{2}dx + \frac{1}{4}at + f \right] w + \mu(t, x) \end{aligned}$$

où a, b, c, d, e, f sont des constantes arbitraires et $\mu(t, x)$ une solution de l'équation de la chaleur. L'algèbre de Lie est donc engendrée par sept générateurs:

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi_1 = \mu(t, x); \varphi_2 = w; \varphi_3 = w_x; \varphi_4 = tw_x + \frac{1}{2}xw; \varphi_5 = w_{xx}; \\ \varphi_6 = tw_{xx} + \frac{1}{2}xw_x; \varphi_7 = t^2w_{xx} + tw_x + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}t\right)w. \end{aligned}$$

Bien que $\tilde{\Xi}_{\psi_1, \varphi_1}$ soit la seule symétrie non locale de \mathcal{Y} , le crochet de Jacobi non local $\{(\psi_1, \varphi_1), (\psi_j, \varphi_j)\}_\sim$ ($2 \leq j \leq 7$) donne à nouveau des symétries non locales pour l'équation de Burgers. Le calcul de ces nouvelles symétries non locales peut être résumé de la façon suivante: on note

$$(\psi_{1,j}, \varphi_{1,j}) = \{(\psi_1, \varphi_1), (\psi_j, \varphi_j)\}_\sim, \quad 2 \leq j \leq 7.$$

On a alors:

$$(6) \quad \begin{aligned} \psi_1 = \frac{1}{w}[2\mu_x - \mu u]; \psi_2 = 0; \psi_3 = u_x; \psi_4 = tu_x + 1; \psi_5 = u_{xx} + uu_x; \\ \psi_6 = t(u_{xx} + uu_x) + \frac{1}{2}xu_x + \frac{1}{2}u; \psi_7 = t^2(u_{xx} + uu_x) + txu_x + tu + x. \end{aligned}$$

En utilisant (5), (6) et le théorème 1, on obtient:

$$\begin{aligned} \psi_{12} = \psi_1; \psi_{13} = \frac{1}{w}[2\mu_{xx} - \mu_x u]; \\ \psi_{14} = \frac{1}{w} \left[u(\mu_x(t-2) - \frac{1}{2}x\mu - \frac{1}{2}\mu u(t-1)) + (t-1)\mu u_x + 2\mu_{xx} + x\mu_x + \mu \right]; \\ \psi_{15} = \frac{1}{w}[2\mu_{xxx} - \mu_{xx}u]; \psi_{16} = \frac{1}{w} \left[t(2\mu_{xxx} - \mu_{xx}u) + \mu_x + x \left(\mu_{xx} - \frac{1}{2}\mu_x u + \frac{3}{4}\mu u^2 \right) \right]; \\ \psi_{17} = \frac{1}{w} \left[t^2(2\mu_{xxx} - \mu_{xx}u) + t \left(3\mu_x - \frac{1}{2}\mu u \right) + tx(2\mu_{xx} - \mu_x u) + \frac{1}{4}x^2(2\mu_x - \mu u) + x\mu \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_{12} = \varphi_1; \quad \varphi_{13} = \mu_x; \quad \varphi_{14} = \frac{1}{2}x\mu + t\mu_x; \quad \varphi_{15} = \mu_{xx}; \quad \varphi_{16} = \frac{1}{2}x\mu_x + t\mu_{xx}; \\ \varphi_{17} = t^2\mu_{xx} + tx\mu_x + \frac{1}{4}\mu(2t + x^2).\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] *I. S. Akhatov, R. K. Gazizov et N. Kh. Ibragimov*: Bäcklund transformations and non local symmetries. *Soviet. Math. Dokl.* 36, 3 (1988), 393–395.
- [2] *G. W. Bluman et S. Kumei*: Symmetry based algorithms to relate partial differential equations: II. Linearization by non local symmetries. *Euro. Jnl. of Applied Mathematics* 1 (1990), 217–223.
- [3] *N. G. Khor'kova*: Conservation laws and non local symmetries. *Math. Notes translated from Matematicheskije Zametki* 44 (1988), 134–144.
- [4] *A. M. Vinogradov et I. S. Krasil'shchik*: Non local trends in the geometry of differential equations: Symmetries, conservation laws and Bäcklund transformations. *Acta Applicandae Mathematicae* 15 (1989), 161–209.
- [5] *A. M. Vinogradov et I. S. Krasil'shchik*: Nonlocal symmetries and the theory of coverings. *Acta Applicandae Mathematicae* 2 (1984), 79–96.
- [6] *A. M. Vinogradov, I. S. Krasil'shchik et Lychagin*: *Geometry of Jet Spaces and Non-linear Partial Differential Equations*. Gordon and Breach, 1986.

L'adresse de l'auteur: Université de Bretagne Occidentale, Département de Mathématiques, 6, avenue Le Gorgeu – BP 809, 29285 Brest Cédex, France.