Czechoslovak Mathematical Journal, 42 (117) 1992, Praha

REGULARITÄT IN TORSIONSFREIEN ABELSCHEN GRUPPEN

EDGAR MÜLLER und OTTO MUTZBAUER, Würzburg

(Received March 12, 1990)

Eine Untergruppe einer torsionsfreien abelschen Gruppe heißt regulär, wenn sich die Typen ihrer Elemente bzgl. Unter- und Obergruppe gleichen. Der Begriff der regulären Untergruppe spielt eine wesentliche, wenngleich unterschwellige Rolle in Gruppen, für die vermehrt Typenbetrachtungen angestellt werden, wie z. B. in Butlergruppen. So gilt beispielsweise der Satz von Koehler [Ar, 0.1 und 1.9], daß jede torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges mit endlicher Typenmenge eine reguläre Butleruntergruppe B mit Torsionsquotienten A/B enthält.

In dieser Arbeit wird eine Gruppe von Eigenschaften untersucht und verglichen, die der Regularität nahestehen. Insbesondere für die Klassen der Butlergruppen und der fast vollständig zerlegbaren Gruppen endlichen Ranges ergeben sich interessante Zusammenhänge. Stark reguläre Untergruppen von fast vollständig zerlegbaren Gruppen endlichen Ranges werden als Quasi-Summanden erkannt und diese Eigenschaft charakterisiert die fast vollständig zerlegbaren Gruppen. Schreibweise und Bezeichnungen werden von Fuchs [Fu] und von Mutzbauer [M] übernommen.

Eine Untergruppe B einer torsionsfreien abelschen Gruppe A heißt *regulär*, falls $t^B(b) = t^A(b)$ für alle $b \in B$. Reine Untergruppen sind stets regulär und die Regularität ist transitiv. Der zweite Teil der folgenden Proposition wurde uns 1989 von Herrn K.-J. Krapf mitgeteilt.

Proposition 1. *Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Ist U regulär in A und V Untergruppe von A, so ist auch der Durchschnitt $U \cap V$ regulär in V.*

(2) *Seien $V \subset U \subset A$ Untergruppen von A und sei V rein in A. Ist U/V regulär in A/V, so auch U in A.*

B e w e i s . (1) Sowieso gilt $t^{U\cap V}(x) \leqslant t^U(x)$ und $t^{U\cap V}(x) \leqslant t^V(x)$ und somit $t^{U\cap V}(x) \leqslant t^U(x) \cap t^V(x)$. Umgekehrt gilt für $ny = x$ mit $y \in U$ und $ny' = x$ mit $y' \in V$ wegen A torsionsfrei $y = y' \in U \cap V$ und $\chi^{U\cap V}(x) = \chi^U(x) \cap \chi^V(x)$, also auch $t^{U\cap V}(x) = t^U(x) \cap t^V(x)$. Folglich gilt für $x \in U \cap V$, $t^{U\cap V}(x) = t^U(x) \cap t^V(x) = t^A(x) \cap t^V(x) = t^V(x)$, da $t^V(x) \leqslant t^A(x)$, und der Durchschnitt $U \cap V$ ist regulär in V.

(2) Sei U/V regulär in A/V. Dann ist $\langle u + V\rangle_*^{A/V} / \langle u + V\rangle_*^{U/V} \cong \langle u, V\rangle_*^A / \langle u, V\rangle_*^U$ endlich für alle $u \in U$. Somit ist nach Zassenhaus $\langle u\rangle_*^A / \langle u\rangle_*^U = (\langle u, V\rangle_*^A \cap \langle u\rangle_*^A)/(\langle u, V\rangle_*^U \cap \langle u\rangle_*^A) \cong \langle u, V\rangle_*^A / \langle u, V\rangle_*^U$ endlich und U ist schließlich regulär in A. □

Für eine reguläre Untergruppe U der torsionsfreien abelschen Gruppe A und eine reine Untergruppe V, die in U enthalten ist, ist nicht notwendig U/V eine reguläre Untergruppe von A/V. Denn seien $V = \mathbb{Z}a$, $U = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$ und $A = \langle a, b, p^{-\infty}(a + \alpha_p b)\rangle$ mit irrationaler p-adischer ganzer Zahl α_p, vgl. [Fu, §88]. Dann ist U regulär in A, aber wegen $U/V \cong \mathbb{Z} \neq \mathbb{Q}^{(p)} \cong A/V$ ist U/V nicht regulär in A/V.

Proposition 2. *Eine Untergruppe B der torsionsfreien abelschen Gruppe A ist genau dann regulär, wenn für alle Typen t die Gleichung $B(t) = B \cap A(t)$ erfüllt ist.*

B e w e i s . Sei B als regulär in A vorausgesetzt und t ein beliebiger Typ. $B(t) \subset B \cap A(t)$ gilt immer. Für $b \in B \cap A(t)$ gilt $t \leqslant t^B(b) = t^A(b)$, da B regulär ist, und somit $B \cap A(t) \subset B(t)$.

Sei nun $B(t) = B \cap A(t)$ für alle Typen t. Gibt es ein $b \in B$ mit $t^B(b) < t^A(b) = s'$, so folgt wegen $b \in B$ und $b \in A(s')$ nach Voraussetzung $b \in B \cap A(s') = B(s')$ und somit $t^B(b) \geqslant s' = t^A(b)$ im Widerspruch zur Annahme $t^A(b) > t^B(b)$ und B ist regulär. □

Im folgenden werden einige Eigenschaften verglichen, die der Regularität von Untergruppen ähneln. Die Eigenschaft "kritisch regulär" wurde von K.-J. Krapf eingeführt.

Eine Untergruppe B einer torsionsfreien abelschen Gruppe A heißt *kritisch regulär*, falls für alle Typen t gilt: $B(t) \setminus B^*(t)_* \subset A(t) \setminus A^*(t)_*$. Die Untergruppe B heißt *stark regulär*, falls B eine reguläre und eine kritisch reguläre Untergruppe von A ist. Schließlich heißt B ein *Quasi-Summand* von A, falls es eine Untergruppe $D \subset A$ gibt, so daß der Exponent $\exp(A/(B \oplus D))$ endlich ist.

Proposition 3. *Eine Untergruppe B der torsionsfreien abelschen Gruppe A ist genau dann kritisch regulär, wenn für alle Typen t die Gleichung $B^*(t)_* = B(t) \cap A^*(t)_*$ erfüllt ist.*

B e w e i s . Sei $B(t) \setminus B^*(t)_* \subset A(t) \setminus A^*(t)_*$. Dann ist

$$\left[(B(t) \cap A^*(t)_*) \setminus B^*(t)_*\right] \subset \left[(A(t) \cap A^*(t)_*) \setminus A^*(t)_*\right] = \emptyset.$$

Folglich ist $B(t) \cap A^*(t)_* = B^*(t)_*$.

Sei andererseits $B(t) \cap A^*(t)_* = B^*(t)_*$ und $g \in B(t) \setminus B^*(t)_*$. Dann ist $g \notin B^*(t)_* = B(t) \cap A^*(t)_*$ und wegen $g \in B(t)$ somit $g \notin A^*(t)_*$. Folglich ist $g \in A(t) \setminus A^*(t)_*$ und B ist eine kritisch reguläre Untergruppe von A. □

Sei B eine Untergruppe der torsionsfreien abelschen Gruppe A. Ist $B^*(t)_* = B \cap A^*(t)_*$ für alle Typen t, so ist B kritisch regulär, aber nicht notwendig regulär. Insbesondere ist eine kritisch reguläre Untergruppe nicht notwendig regulär. Denn es gilt $B^*(t)_* \subset B(t) \cap A^*(t)_* \subset B \cap A^*(t)_* = B^*(t)_*$ für alle Typen t. Folglich ist B nach Proposition 3 kritisch regulär. B muß aber nicht regulär sein, denn betrachte $B = \mathbb{Q}^{(p)}a \oplus \mathbb{Q}^{(q)}b \subset A = \mathbb{Q}^{(p)}a + \mathbb{Q}^{(r)}(a+b) + \mathbb{Q}^{(q)}b$. Dann ist $B^*(t)_* = 0 = B \cap A^*(t)_*$ für $t > t(\mathbb{Z})$, da hier $A^*(t)_* = 0$ gilt. Für $t = t(\mathbb{Z})$ ist $B^*(t)_* = B = B \cap A = B \cap A^*(t)_*$. Aber B ist nicht regulär in A, da $t^B(a+b) = t(\mathbb{Z}) < t(\mathbb{Q}^{(r)}) = t^A(a+b)$ gilt.

Ist B kritisch regulär, so ist nicht notwendig $B^*(t)_* = B \cap A^*(t)_*$ für alle Typen t. Denn sei $B = \mathbb{Q}^{(p)}a \oplus \mathbb{Q}^{(q)}b \subset A = \mathbb{Q}^{(p)}a + \mathbb{Q}^{(r,s)}(a+b) + \mathbb{Q}^{(q)}b$. Dann ist $B^*(t)_* = B(t) \cap A^*(t)_*$ für alle Typen t und B ist nach Proposition 3 kritisch regulär. Aber für $t = t(\mathbb{Q}^{(r)})$ ist $B^*(t)_* = 0 \neq \mathbb{Z}(a+b) = B \cap A^*(t)_*$.

Ist B stark regulär in A, so ist $B^*(t)_* = B \cap A^*(t)_*$ für alle Typen t erfüllt. Nach Proposition 3 und der Regularität von B gilt $B^*(t)_* = B(t) \cap A^*(t)_* = B \cap A(t) \cap A^*(t)_* = B \cap A^*(t)_*$.

Proposition 4. *Für eine reguläre Untergruppe B der torsionsfreien abelschen Gruppe A sind äquivalent:*

(1) *B ist stark regulär.*

(2) *B ist kritisch regulär, d. h. für alle Typen t gilt $B^*(t)_* = B(t) \cap A^*(t)_*$.*

(3) *Für alle Typen t gilt $B^*(t)_* = B \cap A^*(t)_*$.*

(4) *$(B \cap A^*(t))/B^*(t)$ ist eine Torsionsgruppe für alle Typen t.*

B e w e i s . Nach Proposition 3 und den vorausgegangenen Ausführungen gilt die Äquivalenz der Aussagen (1), (2) und (3).

Bedingung (3) impliziert (4) offensichtlich. Sei (4) vorausgesetzt. Dann ist $B^*(t)_* \subset B \cap A^*(t)_*$ und $(B \cap A^*(t)_*)/B^*(t)_* = (B \cap A^*(t)_*)/(B^*(t)_* \cap A^*(t)_*) \mathrel{\tilde{\subset}} B/B^*(t)_*$ ist torsionsfrei. Die Gruppe $(B \cap A^*(t)_*)/B^*(t)$ besitzt die Untergruppe $(B \cap A^*(t))/B^*(t)$ mit Torsionsquotienten, da

$$(B \cap A^*(t)_*)/(B \cap A^*(t)) \mathrel{\tilde{\subset}} A^*(t)_*/A^*(t)$$

nach Zassenhaus eine Torsionsgruppe ist. Da

$$\left(B \cap A^*(t)\right)/B^*(t) \quad \text{und} \quad \left(B \cap A^*(t)_*\right)/\left(B \cap A^*(t)\right)$$

Torsionsgruppen sind, ist auch $\left(B \cap A^*(t)_*\right)/B^*(t)$ als Erweiterung zweier Torsionsgruppen eine Torsionsgruppe. Folglich ist auch das homomorphe Bild $(B \cap A^*(t)_*)/B^*(t)_*$ eine Torsionsgruppe und zugleich torsionsfrei, also ist (3) nachgewiesen. □

In homogenen Gruppen sind reguläre Untergruppen schon stark regulär und in t-homogenen Gruppen sind alle t-homogenen Untergruppen regulär und somit auch stark regulär.

Proposition 5. *Quasi-Summanden torsionsfreier abelscher Gruppen A sind stark regulär. Insbesondere sind direkte Summanden bzw. Untergruppen von endlichem Exponenten stark regulär.*

Beweis. Falls für eine Untergruppe B einer torsionsfreien abelschen Gruppe A der Exponent $\exp(A/B)$, oder sogar der Index $[A : B]$ endlich ist, so ist B laut Definition ein Quasi-Summand, d. h. B_*^A/B ist von endlichem Exponenten und für ein $b \in B$ ist $\langle b\rangle_*^A/\langle b\rangle$ lokalzyklisch von endlichem Exponenten, also endlich. Folglich gilt $t^B(b) = t^{B_*^A}(b) = t^A(b)$ für alle $b \in B$ und B ist regulär.

Nach Proposition 4 ist noch zu zeigen, daß $\left(B \cap A^*(t)\right)/B^*(t)$ eine Torsionsgruppe ist. Sei $n := \exp\left(A/(B \oplus D)\right)$ mit geeigneter Untergruppe D. Dann ist $A^*(t)/\left(B^*(t) \oplus D^*(t)\right)$ von endlichem Exponenten, der n teilt, wegen $(B \oplus D)^*(t) = B^*(t) \oplus D^*(t)$. Sei nun $a \in A^*(t)$. Dann ist $a = \sum a_i$ mit $t^A(a_i) > t$ und $na = \sum na_i \in B \oplus D$ mit $t^{B\oplus D}(na_i) = t^A(na_i) = t^A(a_i) > t$, da $B \oplus D$ regulär ist. Somit ist $na \in (B \oplus D)^*(t)$ und $A^*(t)/\left(B^*(t) \oplus D^*(t)\right)$ ist eine Torsionsgruppe von endlichem Exponenten. Deshalb besitzt auch $B^*(t) = \left(B^*(t) \oplus D^*(t)\right) \cap B$ endlichen Exponenten in $A^*(t) \cap B$ und B ist stark regulär in A. □

Stark reguläre Untergruppen sind nicht notwendig Quasi-Summanden, auch nicht in Butlergruppen. Denn $B = \mathbb{Q}^{(p)}a$ ist in der Butlergruppe $A = \mathbb{Q}^{(p)}a + \mathbb{Q}^{(q)}b + \mathbb{Q}^{(r)}(a+b)$ rein und somit auch regulär. B ist sogar stark regulär, da $B^*(t)_* = 0 = B \cap A^*(t)_*$ für $t > t(\mathbb{Z})$ und $B^*\left(t(\mathbb{Z})\right)_* = B = B \cap A = B \cap A^*\left(t(\mathbb{Z})\right)_*$ gilt. Aber B ist kein Quasi-Summand, da $A/B \cong \mathbb{Q}^{(q,r)}$ und es gibt kein Quasi-Komplement von diesem Typ.

Reine Untergruppen vollständig zerlegbarer Gruppen sind nicht notwendig stark regulär oder Quasi-Summanden. Denn die Untergruppe $B = \langle x + y\rangle_*$ der vollständig zerlegbaren Gruppe $A = \mathbb{Q}^{(p)}x \oplus \mathbb{Q}^{(q)}y$ ist rein in A. Aber $B^*\left(t(\mathbb{Z})\right)_* = 0 \neq B =$

$B \cap A = B \cap A^*\big(t(\mathbb{Z})\big)_*$. Somit ist B nicht stark regulär in A, aber auch kein Quasi-Summand. Denn es gilt $A/B \cong \mathbb{Q}^{(p,q)}$, und das kann kein Quasi-Komplement in A sein.

Proposition 6. *In torsionsfreien abelschen Gruppen A gelten:*

(1) *Die kritische (bzw. starke) Regularität ist transitiv.*

(2) *Ist C kritisch (bzw. stark) regulär in A, und $C \subset B \subset A$, dann ist C auch kritisch (bzw. stark) regulär in B.*

(3) *Reine Hüllen stark regulärer Untergruppen sind stark regulär.*

Beweis. (1) Sei $C \subset B \subset A$ mit C kritisch regulär in B und B kritisch regulär in A, dann gilt $C^*(t)_* = C \cap B^*(t)_* = C \cap \big(B \cap A^*(t)_*\big) = C \cap A^*(t)_*$. Also ist C kritisch regulär in A und mit der Transitivität der Regularität folgt der Zusatz.

(2) Da C kritisch regulär in A ist, folgt $C^*(t)_* \subset C(t) \cap B^*(t)_* \subset C(t) \cap A^*(t)_* = C^*(t)_*$ und wir erhalten $C^*(t)_* = C(t) \cap B^*(t)_*$. Somit ist C auch kritisch regulär in B und mit Proposition 1 folgt der Zusatz.

(3) Reine Hüllen regulärer Untergruppen sind regulär. Sei B stark regulär in A. Wenn $\big(B \cap A^*(t)\big)/B^*(t)$ Torsionsgruppe ist, so auch $\big(B_* \cap A^*(t)\big)/(B_*)^*(t)$ und mit Proposition 4 folgt die starke Regularität der reinen Hülle B_*. $\square$

Vererbungseigenschaften für reine Untergruppen bzw. für reguläre Untergruppen unterscheiden sich von denen für stark reguläre Untergruppen. Der Durchschnitt zweier stark regulärer Untergruppen in einer torsionsfreien abelschen Gruppe A ist i. a. nicht stark regulär. Insbesondere ist der Durchschnitt $U \cap V$ nicht notwendig stark regulär in V, wenn U stark regulär in A ist. Denn betrachte $A = \mathbb{Q}^{(p)}x \oplus \mathbb{Q}^{(q)}y \oplus \mathbb{Q}^{(p,q)}z$ und die Untergruppen $U = \mathbb{Q}^{(p)}x \oplus \mathbb{Q}^{(q)}y$ und $V = \mathbb{Q}^{(p)}(x+z) \oplus \mathbb{Q}^{(q)}(y-z)$. Offensichtlich sind U und V als direkte Summanden stark regulär in A. Aber $U \cap V = \langle x+y \rangle_*$ ist weder in V, noch in A stark regulär, denn $(U \cap V)^*\big(t(\mathbb{Z})\big)_* = 0 \neq U \cap V = U \cap V \cap V^*\big(t(\mathbb{Z})\big)_* = U \cap V \cap A^*\big(t(\mathbb{Z})\big)_*$.

Die direkte Summe zweier stark regulärer Untergruppen ist i. a. keine reguläre und somit auch keine stark reguläre Untergruppe. Denn sei $A = \mathbb{Q}^{(p)}x + \mathbb{Q}^{(q)}y + \mathbb{Q}^{(r)}(x+y)$ und seien $U = \mathbb{Q}^{(p)}x$ und $V = \mathbb{Q}^{(q)}y$ zwei Untergruppen von A. Offensichtlich sind U und V stark regulär in A. Aber $U \oplus V$ ist nicht regulär in A, da $t^{U \oplus V}(x+y) = t(\mathbb{Z}) < t(\mathbb{Q}^{(r)}) = t^A(x+y)$ gilt. Natürlich gilt für eine Quasi-Zerlegung $B \oplus C$ einer torsionsfreien abelschen Gruppe A und stark reguläre Untergruppen U bzw. V von B bzw. C, daß $U \oplus V$ stark regulär in A ist.

Das torsionsfreie homomorphe Bild B/C einer stark regulären Untergruppe B ist i. a. nicht stark regulär in A/C, auch nicht für eine Butlergruppe A. Denn die Butlergruppe

$$A = \mathbb{Q}^{(p)}a + \mathbb{Q}^{(r)}b + \mathbb{Q}^{(r)}c + \mathbb{Q}^{(s)}(a-c) + \mathbb{Q}^{(q)}(a+b+c) \subset \mathbb{Q}a \oplus \mathbb{Q}b \oplus \mathbb{Q}c$$

besitzt die reinen Untergruppen $B = \mathbb{Q}^{(p)}a \oplus \mathbb{Q}^{(r)}b$ und $C = \mathbb{Q}^{(p)}a$. Darüber hinaus ist B stark regulär in A, da $B^*(t)_* = A^*(t)_* = 0$ für alle Typen $t > t(\mathbb{Z})$ und $B^*\big(t(\mathbb{Z})\big)_* = B = B \cap A = B \cap A^*\big(t(\mathbb{Z})\big)_*$ gilt. Das homomorphe Bild $B/C = \mathbb{Q}^{(r)}\bar{b}$ von B ist jedoch nicht stark regulär in $A/C = \mathbb{Q}^{(q,r)}(\bar{b} + \bar{c}) \oplus \mathbb{Q}^{(s,r)}\bar{c}$, da $(B/C)^*\big(t(\mathbb{Q}^{(r)})\big)_* = 0 \neq B/C = (B/C) \cap (A/C) = (B/C) \cap (A/C)^*\big(t(\mathbb{Q}^{(r)})\big)_*$ ist.

Ist B/C stark regulär in A/C, so ist nicht notwendig auch B stark regulär in A, auch nicht für eine vollständig zerlegbare Gruppe A. Denn die vollständig zerlegbare Gruppe $A = \mathbb{Q}^{(p)}a \oplus \mathbb{Q}^{(q)}b \oplus \mathbb{Q}^{(r)}c$ besitzt die reinen Untergruppen $B = \mathbb{Z}(a+b) \oplus \mathbb{Q}^{(r)}c$ und $C = \mathbb{Z}(a+b)$. Die Gruppe $B/C = \mathbb{Q}^{(r)}\bar{c}$ ist als direkter Summand stark regulär in $A/C = \mathbb{Q}^{(p,q)}\bar{a} \oplus \mathbb{Q}^{(r)}\bar{c}$. Aber B ist nicht stark regulär in A, da $B^*\big(t(\mathbb{Z})\big)_* = \mathbb{Q}^{(r)}c \neq B \cap A^*\big(t(\mathbb{Z})\big)_* = B$ gilt.

Satz 7. *Die Typenuntergruppen $A(t)$, $A^*(t)$ und $A^*(t)_*$ sind stets stark reguläre Untergruppen in torsionsfreien abelschen Gruppen.*

Beweis. Seien A eine torsionsfreie abelsche Gruppe und t ein beliebiger Typ. $A(t)$ ist eine reine und deshalb reguläre Untergruppe. $A(t)$ ist auch kritisch regulär, denn für $s \neq t$ ist $\big(A(t)\big)(s) = \big(A(t)\big)^*(s)_*$, da für $a \in \big(A(t)\big)(s)$ der Typ $t^A(a) \geqslant t \cup s$ ist und somit sowohl $t^A(a) > t$, als auch $t^A(a) > s$ gelten und folglich auch $a \in \big(A(t)\big)^*(s)_*$. Für $s = t$ sind $\big(A(t)\big)(s) = A(s)$ und $\big(A(t)\big)^*(s)_* = A^*(s)_*$. Also gilt $\big(A(t)\big)(s) \setminus \big(A(t)\big)^*(s)_* \subset A(s) \setminus A^*(s)_*$ für alle Typen s und $A(t)$ ist kritisch regulär.

$A^*(t)$ ist regulär in A. Sei dazu $a \in A^*(t)$. Falls $t^A(a) > t$ gilt, so ist $\langle a\rangle_*^A \subset A^*(t)$ und $t^{A^*(t)}(a) = t^A(a)$. Ist $t^A(a) = t$, so ist wegen $a = \sum a_i$ mit $t^A(a_i) > t$ und $\langle a_i\rangle_*^A \subset A^*(t)$ auch $t^{A^*(t)}(a) \geqslant \bigcap t^{A^*(t)}(a_i) = \bigcap t^A(a_i) \geqslant t$. Somit ist $t^{A^*(t)}(a) = t^A(a) = t$, und $A^*(t)$ ist regulär in A. Die Typenuntergruppe $A^*(t)$ ist schließlich auch kritisch regulär in A, denn für $s \neq t$ ist $\big(A^*(t)\big)(s) = \big(A^*(t)\big)^*(s)_*$, da für $a \in \big(A^*(t)\big)(s)$ wieder $t^A(a) > s$ und folglich $a \in \big(A^*(t)\big)^*(s)_*$ gelten. Für $s = t$ ist offensichtlich $\big(A^*(t)\big)(s) = A^*(t) = \big(A^*(t)\big)^*(s)_*$. Somit erhalten wir insgesamt $\big(A^*(t)\big)(s) = \big(A^*(t)\big)^*(s)_*$ für alle Typen s und $A^*(t)$ ist kritisch regulär. Die reine Hülle $A^*(t)_*$ von $A^*(t)$ ist nach Proposition 6 stark regulär in A. □

Satz 8. [Ar, 1.10] *In Butlergruppen besitzen reguläre Untergruppen endlichen Index in ihrer reinen Hülle. Insbesondere sind reguläre Untergruppen stark reguläre Untergruppen ihrer reinen Hülle.*

Umgekehrt sind nach Koehler [Ar, 0.1 und 1.9] torsionsfreie abelsche Gruppen endlichen Ranges mit endlicher Typenmenge, deren reguläre Untergruppen endlichen Index in ihrer reinen Hülle haben, stets Butlergruppen.

Proposition 9. *Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges. Besitzen alle regulären Untergruppen endlichen Index in ihren reinen Hüllen, so gilt für alle Typen t die Zerlegung $A(t) = A_t \oplus A^*(t)_*$ mit vollständig zerlegbarer t-homogener Gruppe A_t.*

Beweis. Sei A_t eine maximale Untergruppe in $A(t)$ mit $A^*(t)_* \cap A_t = 0$, d. h. A_t ist rein und t-homogen und $A(t)/(A_t \oplus A^*(t)_*)$ ist eine Torsionsgruppe. Sei V_t eine vollständig zerlegbare t-homogene Untergruppe von A_t mit Torsionsquotienten A_t/V_t. Da V_t regulär in der t-homogenen Gruppe $A_t = \langle V_t \rangle_*$ ist, folgt, daß A_t/V_t nach Voraussetzung endlich ist, und A_t ist nach [Fu, 98.1] vollständig zerlegbar t-homogen. Da weiter sowohl alle Elemente in $A(t) \setminus A^*(t)_*$, als auch alle Elemente in $(A_t \oplus A^*(t)_*) \setminus A^*(t)_*$ den Typ t haben, ist $A_t \oplus A^*(t)_*$ regulär in $A(t)$ und $A(t)/(A_t \oplus A^*(t)_*)$ ist nach Voraussetzung endlich und $A(t)/A^*(t)_*$ ist vollständig zerlegbar homogen vom Typ t nach [Fu, 98.1]. Nach dem Lemma von Baer [Fu, 86.6] ist daher $A^*(t)_*$ ein direkter Summand in $A(t)$ und es gibt vollständig zerlegbare t-homogene Gruppen A_t mit $A(t) = A_t \oplus A^*(t)_*$. $\square$

Beispiel E_4 in [M, 2.7] und Proposition 9 zeigen, daß für eine Umkehrung von Satz 8 die Voraussetzung einer endlichen Typenmenge ganz wesentlich ist. Denn die quotienten-divisible und vollständig anisotrope Gruppe

$$E_4 = \langle p^{-\infty} v_p \mid p \text{ prim} \rangle \subset V_2 = \mathbb{Q}x_1 \oplus \mathbb{Q}x_2,$$

mit $v_p = a_p x_1 + b_p x_2 \in V_2$ und $a_p, b_p \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{ggT}(a_p, b_p) = 1$ derart, daß $\{\mathbb{Q}v_p \mid p \text{ prim}\}$ die Menge aller Unterräume von V_2 der Dimension 1 ist, besitzt die unendliche Typenmenge $T(E_4) = \{t(\mathbb{Q}^{(p)}) \mid p \text{ prim}\}$. Offensichtlich besitzen alle rationalen regulären Untergruppen von E_4 endlichen Index in ihren reinen Hüllen. Sei nun B eine reguläre Untergruppe von E_4 des Ranges 2 und X eine reine rationale Untergruppe von B vom Typ $t(\mathbb{Q}^{(p)})$. Dann besitzt X endlichen Index in seiner reinen Hülle X_* in A und auch die homomorphen Bilder B/X und E_4/X_* haben denselben Typ $t(\mathbb{Q}_p)$ und $B/X = B/(B \cap X_*) \cong (B + X_*)/X_* \subset E_4/X_*$ mit endlichem Index. Also ist die Gruppe E_4/B endlich, da X_*/X endlich ist. Folglich besitzen alle regulären Untergruppen von E_4 endlichen Index in ihren reinen Hüllen.

Das Bild B/C einer regulären Untergruppe B von A ist i. a. nicht regulär in A/C, wobei A/C torsionsfrei ist. Butlergruppen besitzen jedoch diese Eigenschaft, wie die folgende Überlegung zeigt. Sei A eine Butlergruppe mit einer Untergruppe B und einer reinen Untergruppe C, welche in B enthalten ist. Ist B regulär in A, so auch B/C in A/C. Denn nach Proposition 1 ist B regulär in seiner reinen Hülle B_*^A. Nach [Fu, 26.1.(ii)] ist auch B_*^A/C rein in A/C. Wegen der Transitivität der Regularität müssen wir nur noch B/C als regulär in B_*^A/C nachweisen. Nach Satz 8 ist aber B_*^A/B endlich für Butlergruppen und alles ist gezeigt.

Quasi-Summanden sind stark regulär nach Proposition 5. Aber nicht einmal in Butlergruppen sind stark reguläre Untergruppen Quasi-Summanden, wohl aber in fast vollständig zerlegbaren Gruppen von endlichem Rang. Denn die Klasse der fast vollständig zerlegbaren Gruppen endlichen Ranges ist genau die Klasse der torsionsfreien abelschen Gruppen endlichen Ranges, für welche die stark regulären Untergruppen bereits Quasi-Summanden sind.

Satz 10. *In fast vollständig zerlegbaren Gruppen endlichen Ranges sind die stark regulären Untergruppen genau die Quasi-Summanden. Umgekehrt sind torsionsfreie abelsche Gruppen endlichen Ranges, deren stark reguläre Untergruppen allesamt Quasi-Summanden sind, fast vollständig zerlegbar.*

Beweis. Quasi-Summanden sind nach Proposition 5 immer stark regulär. Sei nun B stark regulär in A. Auf Grund der Transitivität der starken Regularität nach Proposition 6 und der Transitivität der Eigenschaft Quasi-Summand laut Definition und der Vererbung dieser beiden Eigenschaften auf Untergruppen von endlichem Index genügt es diesen Satz für vollständig zerlegbare Gruppen A endlichen Ranges zu zeigen. Weiter genügt es nach Proposition 6 und nach Satz 8 die stark reguläre Untergruppe B als rein anzunehmen. B ist also eine Butlergruppe und es gibt nach [Ar, 1.1] eine vollständig zerlegbare t-homogene Gruppe B_t derart, daß $B(t) = B_t \oplus B^*(t)_*$ gilt. Da B stark regulär in A ist, folgt $0 = B_t \cap B^*(t)_* = B_t \cap (B \cap A^*(t)) = B_t \cap A^*(t)$. Da alle Elemente in $A(t) \setminus A^*(t)$ vom Typ t sind, gibt es eine vollständig zerlegbare t-homogene Untergruppe $C_t \subset A(t)$ mit $B_t \subset C_t$ und $A(t) \doteq C_t \oplus A^*(t)$. Nach [Fu, 86.6] ist B_t ein direkter Summand in C_t. Sei $A = \bigoplus_{i=1}^{k} A_{t_i}$ eine vollständige Zerlegung mit einer Anordnung der Typen, sodaß t_i minimal in der Menge $\{t_i, \ldots, t_k\}$ ist für alle i . Dann ist $A = \sum_{i=1}^{k} A(t_i) \doteq C_{t_1} + A^*(t_1) + \sum_{i=2}^{k} A(t_i) = C_{t_1} \oplus \sum_{i=2}^{k} A(t_i)$, da $A^*(t_1) \subset \sum_{i=2}^{k} A(t_i) = \bigoplus_{i=2}^{k} A_{t_i}$. Wiederholung dieses Arguments ergibt $A \doteq \bigoplus_{i=1}^{k} C_{t_i}$ und $\bigoplus_{i=1}^{k} B_{t_i}$ ist ein Quasi-Summand in A. Nach [Ar, 1.1] ist der Quotient $B / \bigoplus_{i=1}^{k} B_{t_i}$ endlich und somit ist auch B ein Quasi-Summand in A.

Seien umgekehrt in der torsionsfreien abelschen Gruppe A alle stark regulären Untergruppen bereits Quasi-Summanden. Dann sind nach Satz 7 alle Typenuntergruppen $A(t)$, $A^*(t)$ und $A^*(t)_*$ Quasi-Summanden. Somit ist auch $A^*(t)_*$ Quasi-Summand von $A(t)$ und es gibt eine Quasizerlegung $A(t) \doteq A_t \oplus A^*(t)_*$ mit reiner t-homogener Gruppe A_t. Die Voraussetzung, daß alle stark regulären Untergruppen Quasi-Summanden sind, vererbt sich nach den Propositionen 5 und 6 stets auf Quasi-Summanden. In der t-homogenen Gruppe A_t sind alle reinen Untergruppen stark regulär, also Quasi-Summanden. Also gilt $A_t \doteq \langle x \rangle_* \oplus K$ für jedes $x \in A_t \setminus 0$.

Die Gruppe K ist wieder ein Quasi-Summand. Folglich gilt die Voraussetzung auch für K und reine rationale Untergruppen lassen sich sukzessive abspalten, so daß A_t nach [Fu, 98.1] vollständig zerlegbar t-homogen ist. Durch Induktion über den Rang von A wird nun gezeigt, daß A fast vollständig zerlegbar ist. Für rationale Gruppen A ist nichts zu zeigen. Seien Gruppen des Ranges $< n$ mit der vorausgesetzten Eigenschaft fast vollständig zerlegbar. Sei A vom Rang n. Da A endlichen Rang besitzt, gibt es maximale Typen in der Typenmenge von A, da Elemente $x_1, \ldots, x_n$ mit linear geordneten Typen $t(x_1) < t(x_2) < \ldots < t(x_n)$ linear unabhängig sind. Für solch einen maximalen Typ t ist $A(t) = A_t \neq 0$ vollständig zerlegbar und Quasi-Summand. Also gilt $A \doteq A_t \oplus K$ und der Quasi-Summand K ist von kleinerem Rang und nach Induktionsvoraussetzung fast vollständig zerlegbar. Somit ist auch A fast vollständig zerlegbar. $\square$

Reine stark reguläre Untergruppen von vollständig zerlegbaren Gruppen mit sogar linear geordneten Typenmengen müssen i. a. keine direkten Summanden sein, wie das Beispiel $\mathbb{Z}(a+b) \subset_* \mathbb{Z}r^{-1}a \oplus \mathbb{Q}^{(p)}b$ mit verschiedenen Primzahlen r und p zeigt. In fast vollständig zerlegbaren Gruppen von endlichem Rang sind Typenuntergruppen schon Quasi-Summanden. In Butlergruppen dagegen gibt es Typenuntergruppen, die keine Quasi-Summanden sind, wie schon im Anschluß an Proposition 5 gezeigt wurde. Ferner gibt es stark reguläre Untergruppen von Butlergruppen, die weder Typenuntergruppen, noch Quasi-Summanden sind. Denn die Butlergruppe $A = \mathbb{Q}^{(p)}a + \mathbb{Q}^{(q)}b + \mathbb{Q}^{(r)}(a+b) + \mathbb{Q}^{(p)}c$ besitzt die stark reguläre Untergruppe $B = \mathbb{Q}^{(p)}a$. Aber B ist kein Quasi-Summand, da $A/B \cong \mathbb{Q}^{(q,r)} \oplus \mathbb{Q}^{(p)}$ gilt und B kein derartiges Quasi-Komplement besitzt. B ist auch keine Typenuntergruppe, da $A^*\big(t(\mathbb{Z})\big) = A^*\big(t(\mathbb{Z})\big)_* = A \neq B$ und $A\big(t(\mathbb{Q}^{(p)})\big) = \mathbb{Q}^{(p)}a \oplus \mathbb{Q}^{(p)}c \neq B$ gilt.

Korollar 11. *In vollständig zerlegbaren Gruppen endlichen Ranges mit linear geordneter Typenmenge sind die regulären Untergruppen genau die Quasi-Summanden. Umgekehrt sind die torsionsfreien abelschen Gruppen endlichen Ranges, deren reine Untergruppen allesamt Quasi-Summanden sind, vollständig zerlegbar mit linear geordneter Typenmenge.*

Beweis. Da für jede Typenuntergruppe $A^*(t)_*$ ein Typ s mit $A^*(t)_* = A(s)$ existiert, sofern die Typenmenge linear geordnet ist, ist jede reguläre Untergruppe schon stark regulär und nach Satz 10 ein Quasi-Summand.

Sei umgekehrt vorausgesetzt, daß alle reinen Untergruppen der torsionsfreien abelschen Gruppe A endlichen Ranges Quasi-Summanden sind. Durch Induktion über den Rang von A wird gezeigt, daß A fast vollständig zerlegbar ist. Für rationale Gruppen ist nichts zu zeigen. Seien Gruppen des Ranges $< n$ mit der vorausgesetzten Eigenschaft fast vollständig zerlegbar. Sei A vom Rang n. Eine reine Untergruppe B vom Rang $n-1$ erfüllt wieder die Voraussetzung und ist nach Induktionsannahme fast vollständig zerlegbar. Da B nach Voraussetzung auch ein Quasi-Summand war, ist schließlich A fast vollständig zerlegbar. Es wird nun gezeigt, daß die Typenmenge von A linear geordnet ist. Seien dazu zwei Typen s und t aus der Typenmenge als unvergleichbar angenommen und x und y zwei Elemente aus A mit $t(x) = s$ und $t(y) = t$. Die reine Untergruppe $\langle x, y\rangle_*$ erfüllt die Voraussetzung und ist wieder fast vollständig zerlegbar. Die reine Untergruppe $\langle x + y\rangle_*$ besitzt den Typ $s \cap t$ und ist nach Voraussetzung ein Quasi-Summand in A und somit auch in $\langle x, y\rangle_*$. Daher müßte es in $\langle x, y\rangle_*$ ein Quasi-Komplement vom Typ $s \cup t$ geben. Das ist jedoch ein Widerspruch und die Typenmenge ist linear geordnet. Nach [Ar, 1.11] ist A schließlich vollständig zerlegbar mit linear geordneter Typenmenge. $\square$

Die Klasse der Gruppen, in denen alle regulären Untergruppen bereits stark regulär sind, umfaßt die Klasse der homogenen Gruppen.

Korollar 12. *Sei A eine fast vollständig zerlegbare Gruppe endlichen Ranges mit stark regulärer Untergruppe B und reiner Untergruppe C. Sei $C \subset B \subset A$. Dann ist B/C stark regulär in A/C.*

Beweis. Nach Satz 10 ist B ein Quasi-Summand von A, d. h. es existiert eine Untergruppe $D \subset A$, so daß der Quotient $A/(B \oplus D)$ endlich ist. Somit ist auch $(A/C)/((B \oplus D)/C)$ endlich und wegen $(B \oplus D)/C \cong (B/C) \oplus D$ existiert zu B/C ein Komplement X/C derart, daß $B/C \oplus X/C$ endlichen Index in A/C besitzt. Folglich ist B/C ein Quasi-Summand in A/C und deshalb nach Proposition 5 stark regulär in A/C. $\square$

In Butlergruppen A ist das torsionsfreie homomorphe Bild B/C einer stark regulären Untergruppe B nach einer reinen Untergruppe C von A i. a. nicht stark regulär in A/C. Wenn in einer vollständig zerlegbaren Gruppe A endlichen Ranges das torsionsfreie homomorphe Bild B/C stark regulär in A/C ist, so muß B nicht stark regulär in A sein. Beide Aussagen werden durch das dritte bzw. vierte Beispiel im Anschluß an Proposition 6 belegt.

References

[Ar] *D. M. Arnold*: Pure subgroups of finite rank completely decomposable groups, Lecture Notes in Mathematics *874* (1981), 1–31.

[Fu] *L. Fuchs*: Infinite Abelian Groups I+II, Academic Press, 1970, 1973.

[M] *O. Mutzbauer*: Type invariants of torsion-free abelian groups, Contemporary Mathematics 87 (1989), 133–154, Abelian Group Theory, Proceedings, Perth.

Anschrift der Verfasser: Mathematisches Institut, Universität Würzburg, Am Hubland, 8700 Würzburg, Bundesrepublik Deutschland.