

Egon Scheffold

Über symmetrische Operatoren auf Banachverbänden und Arens-Regularität

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 48 (1998), No. 4, 747–753

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/133371>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1998

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER SYMMETRISCHE OPERATOREN AUF
BANACHVERBÄNDEN UND ARENS-REGULARITÄT

EGON SCHEFFOLD, Darmstadt

(Eingegangen am 12. Februar 1996)

Ist A eine kommutative Banachalgebra, so ist der Bidual A'' von A , versehen mit dem 1. oder 2. Arens-Produkt, i. a. nicht wieder kommutativ. In dieser Arbeit zeigen wir, daß die Arens-Triadjungierte symmetrischer, regulärer bilinearer Abbildungen, eingeschränkt auf die ordnungsstetigen Biduale, wieder symmetrisch ist. Dies bedeutet, daß bei kommutativen Banachverbandsalgebren der ordnungsstetige Bidual, versehen mit dem 1. oder 2. Arens-Produkt, stets wieder kommutativ ist. Solche Algebren sind also im Hinblick auf den ordnungsstetigen Bidual Arens-regulär.

Die Aussage über die Arens-Triadjungierte erhalten wir als eine Anwendung von Ergebnissen über Symmetrieeigenschaften gewisser Operatoren.

0. VORBEMERKUNGEN

Im folgenden sei E ein Banachverband. Mit E' bzw. E'' bezeichnen wir den topologischen Dual bzw. Bidual von E . Das Band der ordnungsstetigen Linearformen in E'' wird mit $(E')'_n$ bezeichnet. Ist F ein ordnungsvollständiger Banachverband, so bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(E, F)$ den Banachraum der beschränkten linearen Abbildungen von E nach F und mit $\mathcal{L}^r(E, F)$ den Banachverband der regulären linearen Abbildungen von E nach F (s. [5], Kap. IV, §1), wobei eine Abbildung regulär heißt, falls sie Differenz zweier positiver Abbildungen ist. Ansonsten benutzen wir die in der Banachverbandstheorie übliche Bezeichnungsweise.

Ist H ein reeller Hilbertraum, so heißt ein beschränkter linearer Operator T auf H selbstadjungiert, falls für alle $x, y \in H$ die Beziehung $(Tx, y) = (x, Ty)$ gilt, falls also $(x, Ty) = (y, Tx)$ gilt. Dies ist eine Symmetrieeigenschaft von T bezüglich x und y . In der angegebenen Identität der inneren Produkte kommt auch zum Ausdruck, daß

man die Elemente von H mit Elementen des topologischen Duals H' identifizieren kann. Natürlich ist daher folgende Verallgemeinerung.

1. SYMMETRISCHE OPERATOREN

Es sei E ein Banachverband. Wir nennen einen Operator $T \in \mathcal{L}^r(E, E')$ symmetrisch, falls gilt:

$$(Tx)(y) = (Ty)(x)$$

für alle $x, y \in E$.

Ist $T = (t_{ik})$ eine reelle, symmetrische $n \times n$ -Matrix, so ist offensichtlich die Matrix $|T| = (|t_{ik}|)$ wieder symmetrisch. Daá für einen symmetrischen Operator T der Operator $|T|$ wieder symmetrisch ist, ist dagegen keineswegs trivial.

Satz 1. *Es sei E ein Banachverband. Dann bildet die Menge \mathcal{S} der symmetrischen Operatoren einen abgeschlossenen Vektorunterverband im Banachverband $\mathcal{L}^r(E, E')$.*

Beweis. Die Menge \mathcal{S} ist offensichtlich ein abgeschlossener linearer Teilraum. Es sei $T \in \mathcal{S}$. Es genügt zu zeigen, daá dann auch T^+ symmetrisch ist.

Sei nun $x, y \in E_+$. Dann gilt

$$(T^+)(x)(y) = \sup M, \quad \text{mit} \quad M = \{(Tx_1)(y_1) + \dots + (Tx_n)(y_n)\},$$

wobei $\{x_1, \dots, x_n\}$ alle nichtleeren, endlichen Teilmengen des Ordnungsintervalls $[0, x]$ durchläuft und die dazugehörige Menge $\{y_1, \dots, y_n\}$ alle nichtleeren, endlichen Teilmengen des Ordnungsintervalls $[0, y]$ durchläuft und die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n y_i = y$$

erfüllt.

Analog gilt $(T^+)(y)(x) = \sup N$, mit $N = \{(T\tilde{y}_1)(\tilde{x}_1) + \dots + (T\tilde{y}_n)(\tilde{x}_n) : 0 \leq \tilde{y}_i \leq y, \tilde{x}_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i = x\}$. Wir zeigen $\sup M = \sup N$, indem wir nachweisen, daá jede Zahl aus M beliebig genau durch eine Zahl aus N approximiert werden kann und umgekehrt.

Sei nun $a := \sum_{i=1}^n (Tx_i)(y_i)$ eine beliebige, aber feste Zahl aus M und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Mit Hilfe der kanonischen Darstellung des Hauptideals E_x als Funktionenverband $C(K)$ und einer geeigneten Partition der Einsfunktion läát sich zeigen, daá

positive Elemente $\tilde{x}_j \in E$, $1 \leq j \leq m$, und Zahlen $\alpha_{ij} \in [0, 1]$ existieren, so daß gilt:

$$\sum_{j=1}^m \tilde{x}_j = x \quad \text{und} \quad \left\| x_i - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \tilde{x}_j \right\| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Setzt man

$$\tilde{y}_j := \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} y_i$$

für $1 \leq j \leq m$, so gilt

$$\tilde{y}_j \leq \sum_{i=1}^n y_i = y \quad \text{und} \quad b := \sum_{j=1}^m (T\tilde{y}_j)(\tilde{x}_j) \in N.$$

Da T symmetrisch ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} b &= \sum_{j=1}^m (T\tilde{y}_j)(\tilde{x}_j) = \sum_{j=1}^m (T\tilde{x}_j)(\tilde{y}_j) \\ &= \sum_{j=1}^m (T\tilde{x}_j) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} y_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} (T\tilde{x}_j)(y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n T \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \tilde{x}_j \right) (y_i). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} |a - b| &= \left| \sum_{i=1}^n (Tx_i)(y_i) - \sum_{j=1}^m (T\tilde{y}_j)(\tilde{x}_j) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n (Tx_i)(y_i) - \sum_{i=1}^n \left(T \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \tilde{x}_j \right) \right) (y_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left(T \left(x_i - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \tilde{x}_j \right) \right) (y_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|T\| \left\| x_i - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \tilde{x}_j \right\| \|y_i\| \\ &\leq \|T\| \cdot \varepsilon \cdot \left(\sum_{i=1}^n \|y_i\| \right). \end{aligned}$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, kann man jede Zahl aus M beliebig genau durch eine Zahl aus N approximieren. Die entsprechende Aussage für N zeigt man analog. Es ist also

$$(T^+)(x)(y) = (T^+)(y)(x).$$

□

Vom Studium Arens-regulärer symmetrischer bilinearer Abbildungen bzw. kommutativer Banachalgebren ist im Prinzip folgende Aussage bekannt ([1], Kap. 4; [3], Theorem 1; [9]):

Sei F ein Banachraum und T ein symmetrischer Operator aus $\mathcal{L}(F, F')$. Es gilt genau dann die symmetrische Beziehung $\nu(T'\mu) = \mu(T'\nu)$ für alle $\mu, \nu \in F''$, wenn T schwachkompakt ist. Interessant ist nun, daß für den ordnungstetigen Bidual diese Beziehung ohne eine zusätzliche Voraussetzung erfüllt ist.

Theorem 2. *Es sei E ein Banachverband und T ein symmetrischer Operator aus $\mathcal{L}^r(E, E')$. Dann gilt*

$$\nu(T'\mu) = \mu(T'\nu)$$

für alle $\mu, \nu \in (E')'_n$.

Beweis. Da mit T auch die Operatoren T^+ und T^- symmetrisch sind, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß T positiv ist. Ferner genügt es, positive Elemente μ und ν zu betrachten.

Seien μ und ν positive Elemente von $(E')'_n$. Wir behandeln zunächst den Fall, daß zu μ ein positives Element $u \in E$ existiert mit $\mu \leq u''$, wobei u'' die kanonische Einbettung von u in E'' bedeutet.

Wir betrachten nun das von u'' erzeugte Hauptideal $E''_{u''}$, versehen mit der absoluten schwachen Topologie $|\sigma|((E')'_n, E')$, welche von den Verbandshalbnormen $\varrho \rightarrow f(|\varrho|)$, ($f \in E'_+$) erzeugt wird. Wie wir im Beweis von ([7], Satz 2) gezeigt haben, ist dann die kanonische Einbettung des Hauptideals E_u ein dichter Vektorunterverband von $E''_{u''}$. Es existiert daher ein Netz (\tilde{x}_α) in E_u mit $\mu = \lim_\alpha \tilde{x}''_\alpha$. Hieraus folgt

$$\mu = \lim_\alpha (|\tilde{x}_\alpha|)''.$$

Setzen wir

$$x_\alpha := \inf(|\tilde{x}_\alpha|, u)$$

für alle α , so gilt $0 \leq x''_\alpha \leq u''$ und $\mu = \lim_\alpha x''_\alpha$. Es gilt somit auch $\mu = \lim_\alpha x''_\alpha$ in der schwachen Topologie $\sigma((E')'_n, E')$.

Nach der Nakano-Theorie ist das Ordnungsintervall $[0, Tu]$ kompakt in der $\sigma(E', (E')'_n)$ -Topologie (s. [4], S. 38, 1.4.14). Zu dem Netz (Tx_α) gibt es daher ein Teilnetz (x_j) von (x_α) und ein Element $g \in E'$ mit $g = \lim_j Tx_j$ in der $\sigma(E', (E')'_n)$ -Topologie.

Für alle $x \in E$ erhalten wir

$$\begin{aligned} T'\mu(x) &= \mu(Tx) = \lim_{\alpha} x''_{\alpha}(Tx) \\ &= \lim_{\alpha} (Tx)(x_{\alpha}) = \lim_{\alpha} (Tx_{\alpha})(x) \\ &= \lim_j (Tx_j)(x) = g(x). \end{aligned}$$

Dies bedeutet $T'\mu = g$. Es gilt somit $T'\mu = \lim_j Tx_j$ in der $\sigma(E', (E')'_n)$ -Topologie. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} \mu(T'\nu) &= \lim_j (x''_j)(T'\nu) = \lim_j (T'\nu)(x_j) \\ &= \lim_j \nu(Tx_j) = \nu(T'\mu). \end{aligned}$$

Nun sei μ ein beliebiges positives Element in $(E')'_n$. Dann gibt es bekanntlich ein nach oben gerichtetes Netz (μ_{α}) in $(E')'_n$ und ein Netz (u_{α}) in E mit $\mu_{\alpha} \leq u''_{\alpha}$, für alle α und $\mu = \sup_{\alpha} \{\mu_{\alpha}\}$.

Da T' ordnungsstetig ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned} T'\mu &= \sup_{\alpha} \{T'\mu_{\alpha}\}, \\ \nu(T'\mu) &= \sup_{\alpha} \{\nu(T'\mu_{\alpha})\} = \sup_{\alpha} \{\mu_{\alpha}(T'\nu)\} = \mu(T'\nu). \end{aligned}$$

□

2. DIE ARENS-TRIADJUNGIERTE SYMMETRISCHER BILINEARER ABBILDUNGEN

Es seien E, F und G Banachräume. Ferner sei φ eine beschränkte bilineare Abbildung vom Produktraum $E \times F$ nach G . Im Falle $E = F$ heißt die Abbildung φ symmetrisch, falls $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ für alle x und y gilt.

In [1] wird für die Abbildung φ iterativ in drei Schritten die triadjungierte Abbildung $\varphi^{***}: E'' \times F'' \rightarrow G''$ definiert. Zunächst wird die Abbildung $\varphi^*: G' \times E \rightarrow F'$ erklärt durch $\varphi^*(\mu, x)(y) := \mu(\varphi(x, y))$ für alle $(\mu, x) \in G' \times E$ und alle $y \in F$. Analog sind dann die Abbildungen $\varphi^{**}: F'' \times G' \rightarrow E'$ und $\varphi^{***}: E'' \times F'' \rightarrow G''$ definiert.

Die Abbildung φ induziert auch eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi}$ (in [6] mit φ' bezeichnet) von G' nach $\mathcal{L}(E, F')$ durch die folgende Festsetzung: Für $\mu \in G'$ sei

$$(\tilde{\varphi}\mu)(x)(y) := \mu(\varphi(x, y))$$

für alle $x \in E$ und $y \in F$. Wie man leicht verifiziert (vgl. [6], 1.2), läßt sich die

Arens-Triadjungierte φ^{***} mit Hilfe der Abbildung $\tilde{\varphi}$ wie folgt darstellen:

$$(1) \quad \varphi^{***}(\mu, \nu)(g) = \mu((\tilde{\varphi}g)' \nu)$$

für alle $(\mu, \nu) \in E'' \times F''$ und $g \in G'$.

Wie in [1] gezeigt wird, ist die Arens-Triadjungierte φ^{***} einer symmetrischen Abbildung φ i. a. nicht wieder symmetrisch. Mit Hilfe von Theorem 2 läßt sich nun zeigen, daß aber die Symmetrieeigenschaft noch auf die ordnungstetigen Biduale vererbt wird.

Theorem 3. *Es seien E und F Banachverbände. Ferner sei φ eine symmetrische, reguläre bilineare Abbildung von $E \times E$ nach F . Dann ist die Arens-Triadjungierte*

$$\varphi^{***}: (E')'_n \times (E')'_n \rightarrow (F')'_n$$

wieder symmetrisch.

Beweis. Zunächst verifiziert man, daß der Wertevorrat von φ^{***} , eingeschränkt auf $(E')'_n \times (E')'_n$, in $(F')'_n$ enthalten ist (vgl. [8], Theorem 3).

Wir betrachten die zu φ gehörige Abbildung $\tilde{\varphi}$. Sei nun $f \in F'$. Dann gilt $\tilde{\varphi}f \in \mathcal{L}^r(E, E')$. Da φ symmetrisch ist, ist nunmehr auch $\tilde{\varphi}f$ symmetrisch. Wenden wir Theorem 2 auf die Abbildung $\tilde{\varphi}f$ an, so erhalten wir aufgrund der Darstellung (1) für $(\mu, \nu) \in (E')'_n \times (E')'_n$:

$$\begin{aligned} \varphi^{***}(\mu, \nu)(f) &= \mu((\tilde{\varphi}f)' \nu) = \nu((\tilde{\varphi}f)' \mu) \\ &= \varphi^{***}(\nu, \mu)(f). \end{aligned}$$

Es ist also $\varphi^{***}(\mu, \nu) = \varphi^{***}(\nu, \mu)$. □

Es sei A eine kommutative Banachverbandsalgebra. Die Multiplikation auf A kann dann als eine positive, symmetrische bilineare Abbildung m von $A \times A$ nach A betrachtet werden. Mit der Arens-Triadjungierten m^{***} von m läßt sich das 1. Arens-Produkt auf A'' wie folgt darstellen:

$$F * G = m^{***}(F, G)$$

für alle $F, G \in A''$.

Bekanntlich ist A'' , versehen mit dem 1. Arens-Produkt, eine Banachverbandsalgebra. Ferner ist der ordnungstetige Bidual $(A')'_n$ eine Subalgebra und somit, für sich selbst betrachtet, eine Banachverbandsalgebra. Wenden wir Theorem 3 auf die symmetrische Abbildung m an, so erhalten wir sofort:

Satz 4. *Es sei A eine kommutative Banachverbandsalgebra. Dann ist der ordnungsstetige Bidual $(A')'_n$, versehen mit dem 1. Arens-Produkt, wieder kommutativ.*

Eine Banachalgebra heißt Arens-regulär, falls die beiden Arens-Produkte übereinstimmen. Eine kommutative Banachalgebra B ist bekanntlich Arens-regulär, falls das 1. oder 2. Arens-Produkt auf B'' wieder kommutativ ist. Kommutative Banachverbandsalgebren, bei denen der Bidual mit dem ordnungsstetigen Bidual übereinstimmt, sind also stets Arens-regulär, z. B. alle kommutativen Banachverbandsalgebren, bei denen der topologische Dual eine ordnungsstetige Norm besitzt (z. B. alle Banachverbandsalgebren $C_0(X)$).

Bibliographie

- [1] *R. Arens*: The adjoint of a bilinear operation. Proc. A. M. S. 2 (1951), 839–848.
- [2] *R. Cristescu*: Ordered Vector Spaces and Linear Operators. Ed. Academiei-Abacus Press, Kent, 1976.
- [3] *J. Duncan, S. A. R. Hosseiniun*: The second dual of a Banach algebra. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 84 (1979), 309–325.
- [4] *P. Meyer-Nieberg*: Banach Lattices. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.
- [5] *H. H. Schaefer*: Banach Lattices and Positive Operators. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.
- [6] *E. Scheffold*: Über Bimorphismen und das Arens-Produkt bei kommutativen D -Banachverbandsalgebren. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 39 (1994), no. 3, 259–270.
- [7] *E. Scheffold*: Über den ordnungsstetigen Bidual von FF -Banachverbandsalgebren. Arch. Math. 60 (1993), 473–477.
- [8] *E. Scheffold*: Über die Arens-triadjungierte Abbildung von Bimorphismen. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 41 (1996), no. 9–10, 697–701.
- [9] *A. Ülger*: Weakly compact bilinear forms and Arens regularity. Proc. A. M. S. 101 (1987), 697–704.

Anschrift des Verfassers: Fachbereich Mathematik, Technische Hochschule, Schloágartenstraáe 7, D-64289 Darmstadt, Deutschland.