

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Karel Koutský

O elementární matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 4, 395--398

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137017>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1960

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O ELEMENTÁRNÍ MATEMATICE

Karel Koutský

Úvodní přednáška na konferenci o elementární matematice, pořádané Jednotou čs. matematiků a fyziků ve dnech 30. listopadu až 2. prosince 1959 v Brně.¹⁾

Dnes zahajujeme konferenci o elementární matematice. Zdá se tedy, že všichni zcela přesně víme, co to vlastně elementární matematika je. Avšak, když se jen trochu víc zamyslíme, shledáme k svému překvapení, že většině z nás, a já neváhám říci, že nám všem, je pojem elementární matematiky hodně nejasný a že její přesná definice je nám zcela neznámá. V jednoduchých konkrétních případech ovšem celkem bez váhání řekneme na základě jakési naší neurčité vnitřní představy o „elementárnosti“, zda vyslovená matematická věta či položený problém jsou či nejsou formulovány elementárním způsobem, avšak již zde se vyskytuje značná nejasnost v tom, že vpravdě vůbec nevíme, co znamená výrok „formulovat elementárním způsobem“. Kdybychom se však i velkoryse přes tuto „maličkost“ přencslili, nedostaneme se ani o krok ku předu, neboť stále zůstává otázkou, zda ona věta či položený problém, které lze elementárně formulovat, patří či nepatří do elementární matematiky. Může se totiž stát, že důkaz oné věty či řešení onoho problému bude vyžadovat použití takových metod, po případě takových konstruktivních prostředků, které se budou naprosto vymykat naší naivní představě o „elementárnosti“.

Kdybychom nyní definovali elementární matematiku jako soubor vět, poznatků a konstrukcí, které lze dokázat elementárními metodami, resp. provést elementárními konstruktivními prostředky, nahrazovali bychom jen jeden temný pojem jinými temnými pojmy, neboť ve skutečnosti vůbec nevíme ani co je elementární metoda, ani co je elementární konstruktivní prostředek. Aby předešla definice elementární matematiky měla smysl, museli bychom oba předešlé pojmy mít již předem definovány, což se nestalo. Chceme-li však tyto pojmy přesněji definovat, narazíme zase na naši naivní představu o „elementárnosti“ a přesouváme potíže v definici elementární matematiky pouze na jinou kolej.

Tyto a podobné úvahy vedly mne k tomu, abych se pokusil prozkoumat hlavní názory na elementární matematiku, s nimiž se dnes setkáváme ve veřejnosti.

Velmi často, hlavně u nematematiků, bývá elementární matematika ztotožňována s tzv. školskou matematikou, tj. s tou matematikou, které se vyučuje na všeobecně vzdělávacích školách. Toto ztotožňování je však zřejmě nesprávné. Je sice pravda, že převážná část školské matematiky patří též do matematiky elementární, leč na druhé straně obsahuje elementární matematika četné oddíly, které se vymykají rámci školských možností. Tak je tomu např. s elementární teorií čísel nebo s geometrií trojúhelníka, z nichž se ve školské matematice probírají pouze ty nejprimitivnější základy. Tedy školská matematika neobsahuje celou elementární matematiku a tedy nemůže být s ní totožná.

Jindy zase bývá elementární matematika ztotožňována se starořeckou matematikou, tj. s vývojovým stavem matematiky přibližně kolem počátku našeho letopočtu. Nehledě k tomu, že se ve starořecké matematice vyskytují

¹⁾ Zprávu z této konference viz v tomto časopise, V (1960), č. 3.

i takové úvahy a problémy, které podle našeho naivního názoru o elementárnosti zcela jistě do elementární matematiky nepatří, je předešlý názor příliš úzký, než aby v sobě obsáhl celou bohatost a šíři poznatků, které dnes zařazujeme do elementární matematiky. Kdyby tento názor byl správný, nemohli bychom např. do rámce elementární matematiky vtěsnat nepřehledné množství vynikajících elementárně matematických výsledků, které byly dosaženy během minulého století. Kromě toho v geometrii museli bychom se omezit pouze na euklidovskou geometrii nanejvýš trojrozměrného prostoru. A přece dnes mnohé problémy elementární geometrie jsou řešeny i ve vícerozměrných prostorech, ba někdy se i upouští od požadavku geometrie euklidovské.

Podle dalšího, dosti rozšířeného názoru, bývá elementární matematika pokládána za soubor matematických poznatků, které lze odvodit bez použití infinitesimálního počtu a obecněji bez použití analýsy a teorie funkcí. Není celkem pochyby, že poznatky, které nelze jinak odvodit, než použitím infinitesimálního počtu, analýsy a teorie funkcí, sotva který matematik bude zařazovat mezi poznatky elementárně matematické. Předešlý názor tedy značně omezuje oblast elementární matematiky, nicméně nemůže být přijat za její definici. Pak by totiž do elementární matematiky patřila z převážné části též celá algebra, zejména pak teorie grup a teorie svazů, dále teorie množin, topologie a řada dalších klasických a moderních matematických disciplin. Avšak ani jeden soudný člověk se neodvážá tvrdit, že tomu tak vsukutku je. Předešlý názor o elementární matematice je tedy příliš široký a musel by být upravován dalšími omezujícími dodatky.

Jindy zase se elementární matematika zaměřuje s elementy neboli základy matematiky, tj. přesněji řečeno s axiomatickou výstavbou aritmetiky a geometrie. Avšak i když přiznáme jistou oprávněnost zařazení těchto dvou disciplin do matematiky elementární, přece nás předešlý názor nemůže plně uspokojit, neboť pak by se elementární matematika redukovala na logické zkoumání primitivních aritmetických a geometrických vztahů a odvozování těch nejjednodušších pouček, které celkem bezprostředně plynou z určité soustavy zvolených axiomů a které k onomu logickému zkoumání nutně potřebujeme. Rozvinutější partie aritmetiky a geometrie, jako např. nauka o lineárních a kvadratických rovnicích, nauka o dělitelnosti celých čísel, teorie konstrukcí prováděných pravítkem a kružítkem, jichž k onomu logickému zkoumání základů matematiky vůbec není třeba, by pak podle výše zmíněného názoru nemohly být počítány do oblasti elementární matematiky. A to by přece jen bylo poněkud absurdní.

Je tedy vidět, že definice elementární matematiky, je-li vůbec možná, nebude asi příliš jednoduchá a bude narážet na rozmanité potíže obsahového i formálního rázu. Téměř v každé matematické disciplíně se totiž vyskytují oddíly, které podle naší intuitivní představy o elementárnosti patří i do elementární matematiky, takže elementární matematika není obor přesně ohraničený a ostře oddělený od ostatních oblastí matematiky, nýbrž jimi prolíná a částečně je překrývá. Tato okolnost má však ten nepříjemný důsledek, že každý matematik si může s jistým omezením stanovit v podstatě rozsah elementární matematiky podle svého osobního vkusu nebo podle účelu, který právě sleduje. A skutečně se ve světové matematické literatuře shledáváme u různých autorů s tím nejrůznějším pojetím elementární matematiky.

Všimněme se blíže geometrie. Tradičně bývá zvykem rozlišovat mezi tzv. geometrií synthetickou a geometrií analytickou. Analytická geo-

metrie ve svém klasickém pojetí si klade za úkol vyjadřovat geometrické vztahy početně pomocí souřadnic, nahrazovat geometrické problémy s nimi ekvivalentními problémy početními, tyto pak řešit pomocí algebry a výsledky zpětně interpretovat geometricky. Naproti tomu se synthetická geometrie zabývá studiem geometrických útvarů a jejich vlastností přímo, tj. bez pomocného souřadnicového aparátu. Až dodnes se dost houževnatě udržuje názor, že analytická geometrie ve svém celku do elementární geometrie nepatří, ba docela se vyskytuje i mínění, že elementární geometrie je totožná s geometrií synthetickou. Obě tyto myšlenky mají svůj původ v starodávném nazírání na matematiku, kdy se většinou ostře rozlišovalo mezi poznatky aritmetickými a geometrickými. Objevem analytické geometrie však počíná významná epocha, kterou bychom mohli nazvat „aritmetisací geometrie“. Stará klasická, veskrze synthetická geometrie ztrácí své dominující postavení v matematice a to se přesouvá na aritmetiku, která pak přejímá záruku za správnost veškerého matematického myšlení. Patřila-li tedy synthetická geometrie do geometrie elementární, patří do ní plným právem též geometrie analytická aspoň do té míry, pokud nepřekračuje teorii lineárních útvarů, po případě i jednodušších útvarů druhého stupně.

Toto tvrzení je kromě jiného podepřeno též tzv. Erlangenským programem z roku 1872, v němž slavný německý matematik Felix Klein se pokusil podat analytickou metodou systematiku různých druhů geometrií euklidovského prostoru, rozšířeného o nevlastní prvky, z hlediska geometrických transformací. Je-li dána nějaká grupa geometrických transformací, pak geometrií příslušnou této grupě rozumíme studium těch geometrických vlastností, které jsou invariantní vůči každé transformaci, která do oné grupy patří. Zvláště důležité případy nastanou, kdy jde o nějakou grupu lineárních transformací. Klein pak zavádí pojem tzv. metrické geometrie, v níž se studují ty geometrické vlastnosti, které se nemění shodností a podobností, dále pojem afinní geometrie, která se zabývá zkoumáním geometrických vlastností invariantních vůči afinním transformacím a konečně pojem projektivní geometrie, která vyšetřuje ty geometrické vlastnosti, které jsou invariantní vůči libovolné lineární transformaci.

Někteří autoři leckdy ztotožňují elementární geometrii s geometrií metrickou ve smyslu Kleinově, kdežto afinní a projektivní geometrie pokládají za nauku neelementární. Tento názor pochází z doby bouřlivého rozkvětu projektivní geometrie, jež často bývala nazývána „geometrií polohy“ nebo též „vyšší geometrií“ na rozdíl od tzv. „geometrie nižší“, tj. předcházejícího vývojového stadia geometrického bádání, které především směřovalo k prozkoumání metrických vlastností dvojrozměrného a trojrozměrného euklidovského prostoru. Nyní však grupa všech podobností a shodností je podgrupou grupy všech transformací afinních a tato je podgrupou grupy všech transformací lineárních. A je zřejmé, že každá geometrická vlastnost, která je invariantní vůči všem transformacím lineárním, je invariantní též vůči všem transformacím afinním, a každá vlastnost invariantní vůči všem transformacím afinním je též invariantní vůči všem podobnostem a shodnostem. Přidržíme-li se tedy důsledně Kleinovy systematiky, vychází, že projektivní geometrie je součástí geometrie afinní a obě jsou pak součástmi geometrie metrické. Ztotožníme-li tedy elementární geometrii s geometrií metrickou, nemůžeme současně jedním dechem tvrdit, že projektivní a afinní geometrie jsou nauky neelementární.

Situace je však mnohem komplikovanější. Roku 1859 dokázal totiž slavný

anglický matematik Cayley, že jak metrickou, tak i afinní geometrii lze pokládat za zvláštní případy geometrie projektivní. Patří-li tedy aspoň část metrické geometrie do geometrie elementární, a o tom celkem nikdo nepochybuje, patří do ní i část geometrie projektivní. Záleží ovšem na tom, zda tato elementární část projektivní geometrie obsahuje či neobsahuje více poznatků než ona elementární část geometrie metrické. To však nelze jinak rozhodnout než pomocí naší neurčitě intuitivní představy o elementárnosti.

Zdá se tedy, že jedině východisko, jak vybřednout z této svízelné situace, je vymezit obsah i rozsah elementární geometrie, a obecněji celé elementární matematiky, na základě konvence. Tento proces probíhá ve skutečnosti již od nejstarších dob. V jednotlivých vývojových epochách byl pojem elementární matematiky chápán velmi rozdílným způsobem a dozvuky tohoto chápání, jak jsme viděli, leckde doznívají ještě i dnes. Pokroky matematického bádání a vznik nových matematických disciplin, který byl vynucen potřebami neustále se rozvíjející vědy, techniky a společnosti, mají ovšem svůj ohlas i v matematice elementární. Její rozsah ustavičně vzrůstá, její metody se zdokonalují, prohlubují a zpřesňují a její obsah nabývá nových a nových forem. S tím souvisí též to, že dnešní elementárně matematická problematika se rozrostla do neobyčejné šíře i hloubky a dotýká se velmi subtilních a těžkých otázek, které bývaly dříve z oboru elementární matematiky prostě vylučovány. To však je přirozený vývojový zákon každé vědy.

Nedovedeme-li tedy ani dnes uspokojivě odpovědět na otázku, co to vlastně elementární matematika je, nemusíme proto ještě věšet hlavu. Naše konference, která je jakousi přehlídkou temat z oboru moderní i klasické elementární matematiky, na nichž se u nás v současné době pracuje, podá nám dosti názorný, byť i ne zcela úplný obrázek o tom, co se dnes za elementární matematiku pokládá.

Avšak tato přehlídka, třebaže již sama o sobě je velmi užitečná a důležitá, není jediným cílem našeho konferenčního jednání. Jde též o to, aby byl podchycen zájem o vědeckou práci v matematice i o mimo matematická pracoviště, která jsou v ústavech ČSAV a na vysokých školách, tj. především v řadách středoškolských učitelů matematiky. Je nám ovšem známo, že prvořadě úkoly, které v dnešní době budování socialismu jsou plným právem ukládány učitelům škol všech stupňů, někdy jim značně ztěžují, aby se kromě své pedagogické a politicko-výchovné práce mohli soustavně věnovat i práci vědecké. Nicméně si nelze dobře představit socialistického učitele školy jakéhokoli typu, který by ztratil veškerý zájem o pokroky současného vědeckého bádání. Je ovšem třeba vytvořit takové podmínky, aby i sám se aspoň částečně mohl pokusit o vědeckou práci. A to není nesnadné ani v matematice. Mezi matematickými disciplinami jsou totiž i takové, které vyžadují poměrně málo předběžných znalostí, nebo u nichž předběžné znalosti jsou ve velmi úzkém vztahu s látkou, která se na střední škole vykládá a s níž je učitel povětšinou velmi dobře seznámen. Takovými disciplinami jsou na příklad klasická elementární geometrie a aritmetika, základy kombinatoriky a mnoho jiných. Nutné předpoklady pro vědeckou práci v těchto oborech učitelé mají, ani zájem by jim nescházel, a tak jde jenom o to, předložit jim rozmanité otázky a problémy, na nichž by mohli vyzkoušet své síly. Toto hledisko bylo též vodítkem pro přípravu této konference, které přeji nejen mnoho zdaru v jednání, ale i to, aby se stala podnětem k ještě intenzivnějšímu a hlubšímu pěstění elementární matematiky v naší zemi.