Milan Beneš; Jiří Likeš

Faktorové experimenty v průmyslovém výzkumu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 1, 18--30

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137166

c) rovnoměrné užití všech typů

$$\pi_{i,k} = \frac{1}{n} \quad \text{pro všechna } i, k = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{18}$$

Pro $n = 2$ splývají pravidla (16) a (17).

Obdobným postupem dostaneme diferenciální rovnice pro $p_k(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Charakteristické rovnice příslušných diferenciálních rovnic jsou snadným zobecněním rovnic (7), (11) a (14).

Literatura

[1] Leo A. Goodman, *Methods of measuring useful life of equipment under operational conditions*, Journal of the American Statistical Association, roč. 48 (1953), str. 503 až 530.
[2] Dr Ladislav Truksa, *Statistická dynamika* (skripta), Praha 1955.

FAKTOROVÉ EXPERIMENTY V PRŮMYSLOVÉM VÝZKUMU

Ing. MILAN BENEŠ (Ústav pro výzkum rud. Praha),
Ing. JIŘÍ LIKEŠ (Ocelářský výzkumný ústav, Praha)

V článku jsou přehledně shrnuty nejdůležitější methody a theorie pro navrhování a uspořádání faktorových průmyslových experimentů a jejich analysy. V prvých dvou částech jsou ukázány některé charakteristické znaky a zvláštnosti průmyslových experimentů, především ve srovnání se zemědělským výzkumem, a uvedeny výhody faktorových experimentů proti klasickému uspořádání pokusů, které se ve výzkumu dosud běžně provádějí. Po zavedení některých základních pojmů jsou v dalších částech článku osvětleny principy úplných faktorových experimentů, methody spřažení a neúplné faktorové experimenty. Hlavní důraz je při tom kladen na experimenty typu 2^n, které mají v praxi největší význam, a zde jsou vysvětleny obecně pro n faktorů. Dále jsou uvedeny některé jednodušší experimenty typu 3^n. Vlastní analysa těchto experimentů je naznačena velmi stručně, neboť se v podstatě zakládá na určitých aplikacích analysy rozptylu. V závěru práce jsou ukázány nejdůležitější nevýhody dosavadních uspořádání faktorových experimentů a naznačeny cesty k jejich odstranění, což bude předmětem dalšího článku. Matematický výklad method faktorové analysy vyžaduje určitých znalostí z obecné theorie analysy rozptylu.

Úvod

Theoretická i experimentální výzkumná práce je převážně založena na pokusech, kterými se mají ověřit předpoklady, jež jsme o zkoumaných jevech (na př. fysikální, chemické, biologické a jiné povahy) provedli. Účelem pokusů je zpravidla stanovit, které vlivy významě působí na výsledek pokusu, který je možno kvantitativně stanovit, a jakým způsobem tyto vlivy výsledek pokusu ovlivňují.

Prakticky se při provádění pokusů postupuje tak, že se na základě určitých theoretických předpokladů o zkoumaném jevu nebo na základě předcházejících zkušeností vymezí zpravidla z velkého počtu vlivů pouze takové, které působí na zkoumaný výsledek pokusu nejpodstatněji. V technické praxi těchto vlivů je zpravidla více a při jejich zkoumání se většinou postupuje tak, že se mění pouze jeden vliv, zatím co druhé ponecháváme konstantní. Takovým způsobem je možno zjistit, jak působí prvý vliv na výsledek pokusu. Potom měníme další vliv a všechny ostatní vlivy zůstávají stále stejné. Tak postupujeme dále, až vyšetříme všechny vlivy, které jsme předběžně stanovili jako podstatné pro výsledek pokusu. V literatuře se někdy hovoří o takto uspořádaných pokusech jako o klasickém uspořádání.

I když tento způsob provádění pokusů je na prvý pohled logicky samozřejmý, přesto nevýhody takovýchto pokusů jsou značné. Je nutno si především uvědomit, že i při naprosto stejných podmínkách budou výsledky pokusů při jejich opakování kolísat v určitých mezích. Bude-li tato variabilita výsledků dosti značná, bude se tím spolehlivost závěrů, které z výsledků pokusů učiníme, podstatně snižovat. Pro zvýšení spolehlivosti těchto závěrů bude tedy nutno pokusy několikrát opakovat při naprosto stejných podmínkách, čímž však opět značně vzrostou náklady, které na pokusy vynaložíme, čas, který pro ně potřebujeme a j., což především v průmyslovém výzkumu, kde jsou často pokusy značně nákladné, má veliké nevýhody. Kromě toho pokusy, které byly uspořádány tímto způsobem, lze hodnotit pouze co do velikosti jednotlivých vlivů, většinou bez možnosti jakékoli komplexní statistické analysy výsledku pokusů. Celkově lze o takto uspořádaných pokusech říci stručně tolik, že nedávají i při často značném množství pokusů maximum informací, které bychom mohli z nich čerpat.

Význam a principy faktorových experimentů

Všech těchto skutečností o nevýhodách klasicky uspořádaných pokusů si povšiml po prvé R. A. Fisher. Ve svých základních pracích [1, 2] navrhl jiné principy, na základě kterých se mají pokusy uspořádat, a aplikoval je pak sám v zemědělském a biologickém výzkumu. Hodnocení těchto pokusů je založeno na aplikaci anylysy rozptylu, vypracované též R. A. Fischerem.

Podstata Fischerovy methody uspořádání pokusů spočívá v tom, že se současně sleduje více vlivů, působících na výsledek pokusu, a provádějí se pokusy pro všechny kombinace těchto vlivů. Jsou-li pokusy uspořádány tímto způsobem, je možno hodnotit nejen jednotlivé vlivy, které na výsledek pokusu působí, ale též jak rozdílně ovlivní výsledek pokusu různé kombinace studovaných vlivů. Působení těchto kombinací není možno zjistit při klasickém uspořádání pokusů. Tato okolnost má často značný význam při zkoumání složitých jevů fysikální, chemické nebo fysikálně chemické povahy. Další značnou předností Fisherovy methody je možnost hodnocení experimentální chyby a tím i zhodnocení spolehlivosti závěrů, provedených na základě pokusů, což není možné ve většině případů u klasicky uspořádaných pokusů. Lze ukázat, že experimentální chyba se při těchto pokusech značně snižuje a že tyto pokusy dávají maximální množství informací, které je vůbec možno z pokusů získat.

Theoretické zdůvodnění anylysy rozptylu a vypracování velmi obecné methody, na základě které je možno statisticky vyhodnocovat navržené pokusy, přinesla práce [3] v r. 1935. Další propracování a praktické uplatnění těchto pokusů, které se v literatuře nazývají faktorovými experimenty a hodnocení těchto pokusů faktorová analysa, provedl Yates v r. 1937 v práci [4].

Tento článek je zaměřen na stručné shrnutí některých dosavadních důležitějších výsledků faktorové analysy a určitých praktických poznatků především s ohledem na uplatnění v průmyslovém výzkumu, ať již v laboratorním nebo provozním. Většina dosavadních prací o faktorové analyse byla zaměřena na pokusy biologické a zemědělské, ve kterých faktorová analysa původně vznikla. Tato odlišnost se v průmyslovém výzkumu projevuje většinou v menším počtu pokusů, neboť zde jsou tyto pokusy často nákladnější a v některých dalších rozdílech, o kterých se ještě zmíníme. Je proto pochopitelné, že některé methody, které mají ve výzkumu zemědělském základní význam, nejsou příliš vhodné pro uplatnění v průmyslu. Na druhé straně zejména v poslední době vznikají v průmyslu methody, které by v zemědělství těžko docházely svého uplatnění.

Aby snad nedošlo při dalším výkladu k záměně některých termínů, zavedeme nyní některé pojmy, o které se budeme dále opírat. Zároveň uvedeme některé praktické připomínky k těmto pojmům.

Pokusem budeme nazývat zjištění určité skutečnosti o zákonitosti sledovaného jevu, při kterém dostaneme jeden kvantitativní výsledek (je možno ovšem získat více výsledků při jednom pokusu, jestliže tyto výsledky se od sebe kvalitativně liší).

Souhrn několika pokusů, kterými studujeme celý sledovaný jev, budeme nazývat experimentem. Připomeňme ještě, že je nutno v každém případě pro uplatnění faktorové analysy, aby výsledek pokusu bylo možno kvantitativně vyjádřit.

Vliv, o kterém víme nebo předpokládáme, že má na výsledek pokusu určitý účinek, budeme nazývat faktorem. Každý faktor může být kvantitativní nebo kvalitativní. Počáteční studium obou druhů faktorů je stejné, interpretace výsledků obou faktorů je však odlišná. Při volbě faktorů je důležité, abychom při uspořádání experimentu nezanedbali žádný podstatný faktor, neboť závěry z experimentu vytvořené by mohly být značně skreslené. Počet faktorů je závislý na složitosti studovaného jevu, v praxi bývá nejčastěji tři až pět faktorů, avšak nedoporučuje se více než asi sedm faktorů, neboť provedení a analysa takovýchto experimentů je již značně složitá. Určitému typu kvalitativního faktoru nebo množství u faktoru kvantitativního budeme říkat úroveň faktoru. Efektem faktoru je změna výsledků pokusů při změně jeho úrovní. Interakcí dvou nebo více faktorů se nazývá srovnání výsledků pokusů při měnících se kombinacích úrovní těchto faktorů. Interakce p faktorů $(2 \leqq p \leqq n)$ se nazývá interakce řádu $p - 1$.

Aby celkový počet pokusů v experimentu nebyl příliš velký, volíme nejčastěji pro každý faktor pouze dvě úrovně; potom mluvíme o experimentech typu 2^n, které jsou dosti jednoduché a mají v praxi největší význam. Méně obvyklé je již volit tři úrovně pro každý faktor, kde celkový počet pokusů tedy je 3^n. Někdy je však nutno z praktických důvodů volit pro některé faktory dvě úrovně, pro jiné faktory tři nebo čtyři úrovně. Experimenty o více než čtyřech úrovních se již zpravidla neprovádějí. Jestliže provedeme všechny možné kombinace pokusů pro experiment (na př. typu 2^n, 3^n, a pod.), mluvíme potom o úplných faktorových experimentech a úplné faktorové analyse. Poněvadž však celkový počet experimentů, zvláště pro větší počet faktorů je již značně velký, a poněvadž interakce vyšších řádů (již od třetího řádu výše) jsou dosti nepodstatné, případně jejich vysvětlení v praxi bývá velmi těžké nebo problematické, snižujeme celkový počet pokusů experimentu typu 2^n na polovinu, čtvrtinu, osminu a pod. a typu 3^n na třetinu, devítinu atd. celkového počtu pokusů tím, že zanedbáváme zvolené interakce vyšších řádů. Takové experimenty se nazývají neúplné faktorové experimenty a jejich analysa neúplná faktorová analysa. Tato neúplná analysa má však význam a byla hlavně propracována pro experimenty typu 2^n, méně již pro typ 3^n; pro experimenty se smíšenými úrovněmi faktorů je tato neúplná faktorová analysa velmi obtížná. Je-li úrovní u jednoho faktoru málo, což právě u faktorové anylysy nejčastěji bývá, musíme tyto úrovně (toto platí především pro faktor kvantitativní) volit tak, aby se mohl efekt faktoru, jestliže existuje, také výrazně projevit.

Někdy se může stát, že některý faktor, který nemá pro výzkum jevu žádný praktický význam, přesto ovlivní značným způsobem výsledek pokusu a projeví se případně jako účinek jiného zkoumaného faktoru. Takový faktor nazýváme blokem a vylučujeme jej jeho znáhodněním vzhledem k jinému sledovanému faktoru. Vznik těchto bloků právě spadá do oblasti zemědělského výzkumu, kde mají velký význam. Dosud se však zdá, že v této formě nejsou tyto bloky jako prostředek pro znáhodnění experimentu v průmyslovém výzkumu ani zdaleka tak důležité, jako ve výzkumu zemědělském. Podobnou úlohu má v průmyslu opakování pokusů za stejných výzkumných podmínek. Zatím co v zemědělském nebo biologickém výzkumu je opakování pokusů většinou nutné, není možno z finančních i časových důvodů toto opakování provádět v průmyslu.

Výsledky pokusů považujeme za odhady skutečnosti o zkoumaných jevech. Tyto odhady jsou v experimentu zatíženy jistými chybami. Experimentální chybou pak nazýváme tu část variability výsledků, kterou není možno vysvětlit působením faktorů, které byly do experimentu zahrnuty.

Theorii faktorové analysy lze nejobecněji formulovat jako test lineárních hypothes. Podrobné propracování této theorie najde čtenář v práci [5]. Analysu faktorových experimentů lze též odvodit jako speciální případ věty Cochranovy (viz na př. [6, 7]). Nebudeme se zde zabývat touto theorií a naznačíme jen krátce theoretické předpoklady, za kterých lze faktorové analysy použít. Základním předpokladem je normální rozdělení hustoty pravděpodobností pro výsledek pokusu pro všechny úrovně jednotlivých faktorů. Ze značné universálnosti platnosti normálního rozdělení je možno velmi často toto rozdělení předpokládat, ale je nutno počítat s tím, že v převážné většině případů není možno tento předpoklad pro malý počet experimentálních výsledků v praxi ověřit. Pro případ, že experimentální výsledky tomuto rozdělení nevyhovují, byly navrženy pro některé případy různé transformace. O některých z nich pojednává práce [8]. Test významnosti efektů faktorů a interakcí se provádí pomocí kriteria F a bylo zjištěno, že ani určitá odchylka od normality nemá na kritické hodnoty kriteria F podstatný vliv, takže předpoklad normálního rozdělení není nutno považovat za příliš omezující. Dalším theoretickým předpokladem pro aplikaci faktorové analysy je požadavek stejného rozptylu pro výsledky pokusů na všech úrovních faktorů. Rovněž i tento předpoklad je v praxi často velmi těžké ověřit, ale někdy lze ze zkušenosti nebo z určitých theoretických důvodů tyto rozptyly považovat za stejné (někdy tohoto požadavku lze též dosáhnout vhodnou transformací). Dále předpokládáme pro aplikaci faktorové analysy statistickou nezávislost výsledků pro různé úrovně faktorů a konečně aditivitu všech faktorů a interakcí, působících na výsledek pokusů. Oba tyto poslední předpoklady je možno přesně matematicky formulovat a v převážné většině případů lze je logicky dostatečně zdůvodnit.

Úplné faktorové experimenty

Theorie úplných faktorových experimentů je dosti podrobně propracována v řadě prací, na př. [4], [9], [10], zejména pokud se týká experimentů typu 2^n. V této kapitole uvedeme pouze souhrnně některé pojmy a výsledky, které budeme potřebovat k dalšímu výkladu.

Pro stručnost se budeme zabývat pouze obecným případem experimentu typu 2^n, kde máme n faktorů

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, (n \geq 2),$$

každý na dvou úrovních

$$a_i^{(0)}, a_i^{(1)}, (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Je velmi výhodné použít při těchto experimentech symboliky, kterou zavedl Yates [4]. Spočívá v tom, že pro každý faktor A_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ označíme úroveň $a_i^{(0)}$ jako 1 a úroveň $a_i^{(1)}$ symbolem a_i. Kombinace úrovní pak vyjádříme při tomto značení jako součin těchto symbolů. Na př. máme-li tři faktory A_1, A_2, A_3, kombinaci $a_1^{(0)}\ a_2^{(1)}\ a_3^{(1)}$ označíme $a_2\ a_3$ a pod. V případě, že každý z faktorů A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ je na úrovni $a_i^{(0)}$, označíme příslušnou kombinaci symbolem (1.)

Stejné symboliky užijeme pro označení skutečných účinků jednotlivých kombinací úrovní n faktorů, t. j. pro výsledky, které bychom dostali při pokusech, aplikovaných na příslušnou kombinaci, kdyby experimentální chyba byla nulová. Nazveme-li hlavním efektem efekt jednotlivého faktoru, písmeny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ budeme značit jednak faktory, jednak hlavní efekty těchto faktorů, resp. jejich interakce.

Z theorie úplných faktorových experimentů je známo, že interakce řádu p-1 faktorů $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}$, $p = 1, 2, \ldots, n$ (hlavní efekt lze zřejmě považovat za interakci řádu nula), kde $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ je určitá vybraná podmnožina p elementů množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, je možno, užijeme-li Yatesova značení, vyjádřit výrazem

$$A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p} = \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} (a_i \pm 1). \tag{1}$$

Při tom znaménka na pravé straně rovnice se určí tak, že pro $i = i_1, i_2, \ldots, i_p$ je v příslušné závorce znaménko —, v ostatních n—p závorkách znaménko +. Po rozvoji pravé strany rovnice a nahrazení číslice 1 symbolem (1), je interakce vyjádřena jako lineární forma účinků všech kombinací úrovní faktorů.

Při tom právě polovina členů má znaménko +, druhá polovina znaménko —.

Označme $\boldsymbol{A}'$ vektor

$$\boldsymbol{A}' = 2^{n-1} \| A_1, A_2, A_1 A_2, A_3, A_1 A_3, A_2 A_3, A_1 A_2 A_3, \ldots, A_1 A_2 \ldots A_n, 2M \|,$$

kde $2^n M$ je celkový účinek všech kombinací úrovní (to jest při nulové experimentální chybě). Dále označme $\boldsymbol{\alpha}'$ vektor

$$\boldsymbol{\alpha}' = \| (1), a_1, a_2, a_1 a_2, a_3, a_1 a_3, a_2 a_3, a_1 a_2 a_3, \ldots, a_1 a_2 \ldots a_n \|.$$

Potom zřejmě

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{K} \boldsymbol{\alpha}, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{K}$ je čtvercová matice $2^n \times 2^n$, obsahující elementy $\pm$ 1 tak, že jsou splněny rovnice (1) pro systém všech hlavních efektů a interakcí, a dále vztah

$$M = \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^{n} (a_i + 1). \tag{3}$$

Obecný tvar matice $\boldsymbol{K}$ nelze uvést, neboť závisí na počtu faktorů n. Pro dané n lze tuto matici snadno sestrojit. Pro její konstrukci stačí určit elementy, odpovídající v rovnicích (1) jednotlivým faktorům $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Řádky, odpovídající interakcím všech řádů, dostaneme jako součiny elementů řádků příslušejících faktorům, z nichž je interakce složena. Poslední řádek obsahuje elementy vesměs +1. V práci [5] jsou na příklad uvedeny elementy matice $\boldsymbol{K}$ pro $n = 2$ a $n = 3$.

Matice $\boldsymbol{K}$ obecného faktorového experimentu 2^n má tyto vlastnosti:

1. Pro elementy i-tého řádku platí:

$$\sum_{j=1}^{2^n} k_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^n - 1,$$

$$\sum_{j=1}^{2^n} k_{ij} = 2^n, \quad i = 2^n;$$

2. Pro libovolné dva různé řádky matice platí

$$\sum_{j=1}^{2^n} k_{i_1 j} \cdot k_{i_2 j} = 0, \; i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, 2^n, \; i_1 \neq i_2.$$

Z těchto vlastností matice $\boldsymbol{K}$ je zřejmé, že hlavní efekty a interakce všech řádů tvoří systém orthogonálních kontrastů*) účinků kombinací úrovní. Dále je vidět, že všechny hlavní efekty a interakce jsou vyváženy vzhledem ke všem kombinacím úrovní.

Jelikož $\boldsymbol{K}'\boldsymbol{K} = 2^n \boldsymbol{E}$, kde $\boldsymbol{K}'$ je matice, vzniklá transponováním $\boldsymbol{K}$, a $\boldsymbol{E}$ je jednotková matice hodnosti 2^n, lze provést obráceně vyjádření elementů matice $\boldsymbol{\alpha}$ jako lineární kombinace hlavních efektů a interakcí. Tato inverse je dána vztahem

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{K}'\boldsymbol{A}.$$

Předpokládejme nyní, že pro každou kombinaci úrovní provedeme $r \geq 1$ pokusů a označme průměr r výsledků těchto pokusů pro určitou kombinaci symbolem této kombinace v lomené závorce. Tak na příklad pro tři faktory A_1, A_2, A_3 bude $[a_2 a_3]$ značit průměr výsledků r pokusů pro kombinaci $a_2 a_3$.

Označme odhad interakce $A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}$, získaný z výsledků pokusů, znakem $y_{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}}$. Tento odhad, vzhledem ke známé skutečnosti, že nejlepším odhadem lineárního kontrastu skutečných účinků je týž lineární kontrast odhadů těchto účinků (viz na příklad [5], str. 88), je dán vztahem

$$y_{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}} = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\prod_{i=1}^{n} (a_i \pm 1) \right], \tag{5}$$

kde znaménka v závorkách se určí podle dříve uvedeného pravidla.

Odhady veličiny $y_{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}}$ pro všechny možné podmnožiny $\{i_1 i_2, \ldots i_p\}$, $p = 1, 2, \ldots n$ množiny $\{1, 2, \ldots n\}$, tvoří systém náhodných proměnných, které jsou vzájemně nezávislé a z nichž každá má normální rozdělení se střední hodnotou

$$E(y_{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}}) = A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}$$

a rozptylem $\dfrac{\sigma^2}{r \cdot 2^{n-2}}$, kde σ^2 je rozptyl jednotlivých výsledků pokusů. Této vlastnosti se pak využije pro test významnosti jednotlivých hlavních efektů a interakcí pomocí analysy rozptylu.

---

*) Nechť $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ jsou účinky s kombinací úrovní. Potom lineárním kontrastem účinků $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ nazýváme funkci

$$\mu = \sum_{j=1}^{s} l_j \xi_j,$$

kde

$$\sum_{j=1}^{s} l_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{s} l_j^2 > 0.$$

Máme-li $t \geq 2$ lineárních kontrastů

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{s} l_{ij} \xi_j, \; i = 1, 2, \ldots, t,$$

takových, že pro každou dvojici μ_{i_1}, μ_{i_2}, $i_1 \neq i_2$ platí

$$\sum_{j=1}^{s} l_{i_1 j} l_{i_2 j} = 0, \quad i_1, i_2 = 1, 2, \ldots s, \quad i_1 \neq i_2,$$

nazveme $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t$ systémem t orthogonálních lineárních kontrastů.

Výpočet $y_{A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_p}}$ lze provést výhodně pomocí tabelárního vyjádření výsledků, které zavedl také Yates [4]. Toto tabelární vyjádření je vlastně aplikací vztahu (2) a umožňuje rychlou kontrolu provedených výpočtů.

Test významnosti hlavních efektů a interakcí se provede pomocí kriteria F nebo t, jelikož hlavnímu efektu nebo interakci přísluší v analyse rozptylu vždy jeden stupeň volnosti. Máme-li $r > 1$ pokusů pro každou kombinaci, je F založeno na 1 a 2^n $(r - 1)$ stupních volnosti (tudíž t na 2^n $[r - 1]$ stupních volnosti). Odhadem experimentální chyby je v tomto případě residuální součet čtverců, dělený tímto počtem stupňů volnosti.

Jestliže však $r = 1$, což v průmyslových experimentech zpravidla přichází v úvahu, používá se většinou za odhad experimentální chyby interakcí nejvyšších řádů. Tohoto postupu jsme však oprávněni použít jen tehdy, můžeme-li předpokládat, že tyto interakce jsou nulové. Jestliže tomu tak není, je porušena nestrannost odhadu experimentální chyby a tím také závěry učiněné o hlavních efektech a interakcích nižšího řádu pomocí kriteria F, závisejícího na takovémto odhadu, mohou být nespolehlivé. V každém případě je proto zapotřebí v maximální míře využít theoretických znalostí a zkušeností z předcházejících experimentů o interakcích vyšších řádů.

Tato problematika správného určení odhadu experimentální chyby pomocí interakcí nejvyšších řádů odpadá v tom případě, kdy je známa ze zkušenosti velikost směrodatné odchylky σ, a lze ji proto použít k testu hlavních efektů a interakcí. Potom používáme místo kriteria F nebo t kriteria založeného na normálním rozdělení.

Velmi často se hovoří o tom, zdali lze zkoumat hlavní efekty a interakce nižších řádů, jestliže příslušné interakce řádů vyšších jsou významné. Problematika těchto otázek s theoretického i praktického hlediska je velmi složitá. Lze však stručně o tom říci jen tolik, že s formálního hlediska nelze proti testům všech interakcí a hlavních efektů nic namítat, i když interakce vyšších řádů jsou významné. Je nutno si ovšem uvědomit, že jestliže určitou interakci jsme klasifikovali jako významnou, potom odpovídající hlavní efekty a interakce nižších řádů ztrácejí z praktického hlediska svůj význam. Existence velké interakce totiž znamená, že účinek jednoho faktoru je závislý na úrovni ostatních faktorů, a když tedy posuzujeme určitý faktor, je nutné specifikovat úrovně faktorů ostatních.

Jsou-li faktory kvantitativní, velká interakce zpravidla znamená, že úrovně faktorů v experimentu jsme zvolili příliš daleko od sebe a je nutno provést další pokusy na bližších úrovních. Jsou-li faktory kvalitativní, je nutno provést detailní rozbor odděleně pro každou úroveň faktoru zvlášť.

Tato problematika se však netýká pouze experimentů typu 2^n, ale faktorových experimentů vůbec.

Nyní se budeme zabývat některými jednoduššími případy experimentů typu 3^n, kdy každý faktor A_i je dán na třech úrovních

$$a_i^{(0)}, a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

V tomto případě již vyjádření hlavních efektů a interakcí není tak jednoduché, jak je tomu u experimentů typu 2^n.

Budeme v dalším výkladu značit $a_i^{(j_i)}$, $j_i = 0, 1, 2$ jednak j_i — tou úroveň faktoru A_i, jednak skutečný výsledek (nezatížený experimentální chybou) této úrovně.

Je-li $n = 2$, obsahuje úplný faktorový experiment devět kombinací úrovní faktorů

$$a_1^{(j_1)} a_2^{(j_2)}, \quad j_1, j_2 = 0, 1, 2.$$

Hlavní efekt faktoru A_1 dostaneme tak, že provedeme srovnání tří skupin

$$a_1^{(0)} a_2^{(j_2)}, a_1^{(1)} a_2^{(j_2)}, a_1^{(2)} a_2^{(j_2)}, \quad j_2 = 0, 1, 2,$$

to jest srovnáme skutečné účinky mezi jednotlivými úrovněmi faktorů A_1 při všech kombinacích s úrovněmi faktoru A_2. Podobně hlavní efekt faktoru A_2 dostaneme ze srovnání tří skupin kombinací úrovní

$$a_1^{(j_1)} a_2^{(0)}, a_1^{(j_1)} a_2^{(1)}, a_1^{(j_1)} a_2^{(2)}, j_1 = 0, 1, 2 .$$

Srovnání těchto skupin lze provést několika rozličnými způsoby. Jeden z nich je takový, že vyjádříme účinek určité úrovně jako odchylku od průměrného účinku všech úrovní. Tento způsob nebude však experimentátora většinou tak zajímat, jelikož odpoví pouze na otázku, zda je rozdíl mezi účinky jednotlivých úrovní. Experimentátora bude obvykle zajímat přímo porovnání mezi jednotlivými úrovněmi, na příklad porovnání nejlepší úrovně faktorů s ostatními úrovněmi a pod.

Aby toto porovnání jednotlivých úrovní faktorů bylo možné, provedeme rozklad hlavního efektu na určité složky. Přitom toto rozdělení na složky provedeme tak, abychom dostali odpověď na otázky, které si experimentátor před provedením pokusu položil. Jeden z nejobvyklejších způsobů rozkladu hlavních efektů faktorů experimentu 3^2 v případě kvantitativních faktorů je založen na předpokladu, že faktory jsou ve svých efektech přibližně lineární.

Budeme dále předpokládat, že úrovně faktorů jsou zvoleny takto:

$$a_i^{(0)} + d_i = a_i^{(1)} = a_i^{(2)} - d_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

kde d_i je nějaká vhodně zvolená jednotka faktoru A_i, což je v praxi velmi obvyklé a výhodné pro experimenty tohoto typu.

Potom definujeme lineární efekt faktoru A_1 jako výraz

$$A_1' = \frac{1}{3} (a_1^{(2)} - a_1^{(0)}) (a_2^{(0)} + a_2^{(1)} + a_2^{(2)})$$

a kvadratický efekt

$$A_1'' = \frac{1}{6} (a_1^{(2)} - 2 a_1^{(1)} + a_1^{(0)}) (a_2^{(0)} + a_2^{(1)} + a_2^{(2)}),$$

neboť, je-li faktor A_1 ve svých efektech lineární, je

$$a_1^{(1)} = \frac{1}{2} (a_1^{(0)} + a_1^{(2)}).$$

Tímto způsobem jsme rozložili hlavní efekt faktoru A_1 na dvě složky — na lineární a kvadratický efekt.

Podobně pro druhý faktor A_2 dostaneme

$$A_2' = \frac{1}{3} (a_1^{(0)} + a_1^{(1)} + a_1^{(2)}) (a_2^{(2)} - a_2^{(0)}),$$

$$A_2'' = \frac{1}{6} (a_1^{(0)} + a_1^{(1)} + a_1^{(2)}) (a_2^{(2)} - 2 a_2^{(1)} + a_2^{(0)}),$$

lineární resp. kvadratický efekt faktoru A_2.

Stejným způsobem rozdělíme interakci $A_1 A_2$ na čtyři složky. Lineární efekt faktoru A_1 na úrovni $a_2^{(0)}$ faktoru A_2 je

$$a_1^{(2)} a_2^{(0)} - a_1^{(0)} a_2^{(0)},$$

a na úrovni $a_2^{(2)}$

$$a_1^{(2)} a_2^{(2)} - a_1^{(0)} a_2^{(2)}.$$

Poloviční rozdíl těchto dvou výrazů

$$A_1' A_2' = \frac{1}{2} (a_1^{(2)} - a_1^{(0)}) (a_2^{(2)} - a_2^{(0)}),$$

nazveme lineární $\times$ lineární interakci faktorů A_1, A_2.

Podobně dostaneme dvě lineárně $\times$ kvadratické interakce

$$A_1' A_2'' = \frac{1}{4} (a_1^{(2)} - a_1^{(0)}) (a_2^{(2)} - 2\, a_2^{(1)} + a_2^{(0)}),$$

$$A_1'' A_2' = \frac{1}{4} (a_1^{(2)} - 2\, a_1^{(1)} + a_1^{(0)}) (a_2^{(2)} - a_2^{(0)})$$

a jednu kvadratickou $\times$ kvadratickou interakci

$$A_1'' A_2'' = \frac{1}{8} (a_1^{(2)} - 2\, a_1^{(1)} + a_1^{(0)}) (a_2^{(2)} - 2\, a_2^{(1)} + a_2^{(0)}).$$

Lze tudíž efekty a interakce faktorového experimentu 3^2, tímto způsobem analysovaného, vyjádřit v maticové formě

$$\begin{Vmatrix} 3A_1' \\ 6A_1'' \\ 3A_2' \\ 6A_2'' \\ 2A_1'A_2' \\ 4A_1''A_2' \\ 4A_1'A_2'' \\ 8A_1''A_2'' \\ 9M \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 4 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_1^{(0)} a_2^{(0)} \\ a_1^{(0)} a_2^{(1)} \\ a_1^{(0)} a_2^{(2)} \\ a_1^{(1)} a_2^{(0)} \\ a_1^{(1)} a_2^{(1)} \\ a_1^{(1)} a_2^{(2)} \\ a_1^{(2)} a_2^{(0)} \\ a_1^{(2)} a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} a_2^{(2)} \end{Vmatrix}. \qquad (6)$$

kde $9\,M$ je celkový skutečný výsledek všech devíti kombinací.

Jednotlivé efekty a složky interakcí dají se tedy vyjádřit pomocí $a_1^{(0)}\, a_2^{(0)}, \ldots, a_1^{(2)}\, a_2^{(2)}$ tak, že označíme-li Z_i element i-tého řádku vektoru na levé straně matice (6) a z_j element j-tého řádku vektoru na pravé straně, je

$$Z' = \sum_{j=1}^{9} k_{ij} Z_j, \quad i = 1, 2, \ldots, 9, \qquad (7)$$

kde k_{ij} je element i-tého řádku a j-tého sloupce matice typu 9×9 na pravé straně rovnice (6). Při tom platí

1) $\sum_{j=1}^{9} k_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 8,$

$\sum_{j=1}^{9} k_{9j} = 9,$

2) $\sum_{j=1}^{9} k_{i_1 j} k_{i_2 j} = 0, \quad i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, 9, i_1 \neq i_2.$

To znamená, že $Z_1, Z_2, \ldots, Z_8$ tvoří systém orthogonálních kontrastů skutečných účinků jednotlivých kombinací a tudíž také $A_1', A_1'', A_2', \ldots, A_1'' A_2''$ tvoří systém osmi orthogonálních kontrastů parametrů $a_1^{(0)} a_2^{(0)}, \ldots, a_1^{(2)} a_2^{(2)}$.

Podobným postupem jako při faktorovém experimentu 2^n lze vyjádřit transponováním matice v rovnici (6) kombinace úrovní pomocí efektů a složek interakcí. Ze vztahů (6) je vidět, že vyváženost, která byla u experimentu typu 2^n, je při experimentech typu 3^2 porušena.

Provedeme-li nyní pro každou z devíti kombinací $r > 1$ pokusů a označíme-li opět $[a_1^{(j_1)} a_2^{(j_2)}]$ průměr výsledků pro kombinaci j_1-té úrovně faktoru A_1 a j_2-té úrovně faktoru A_2 ($j_1, j_2 = 0, 1, 2$), odhady efektů a interakcí dostaneme tak, že do vztahu (6) dosadíme místo $a_1^{(j_1)} a_2^{(j_2)}$ průměr $[a_1^{(j_1)} a_2^{(j_2)}]$.

Veličiny $y_{A_1'}, y_{A_1''}, \ldots, y_{A_1'' A_2''}$ tvoří systém nezávislých proměnných. Odhadem Z_i ze vztahu (7) bude veličina

$$y_{Z_i} = \sum_{j=1}^{9} k_{ij} [Z_j]$$

a tato veličina má normální rozdělení

$$N\left(Z_i, \frac{\sigma^2}{r} \sum_{j=1}^{9} k_{ij}^2\right).$$

Odhady a rozdělení příslušných efektů a složek interakcí jsou z těchto vztahů zřejmé. Efekty a složky interakcí lze pak již testovat methodou analysy rozptylu tak, že použijeme kriteria F s 1 a 9 (r — 1) stupni volnosti, nebo kriteria t s 9 (r — 1) stupni volnosti. Tímto postupem jsme totiž rozdělili hlavní efekty a interakce na složky tak, že při analyse rozptylu přísluší každé složce jeden stupeň volnosti.

Jestliže však $r = 1$, odhadujeme opět experimentální chybu pomocí interakce tak, jak již to bylo naznačeno v experimentech typu 2^n. Při tom problematika odhadu experimentální chyby pomocí interakce je obdobná jako u faktorových experimentů 2^n.

Pro $n = 3$ a více faktorů, každý o třech úrovních, je postup rozkladu hlavních efektů a interakcí zcela obdobný případu 3^2. Na př. pro $n = 3$ dostaneme

3 lineární efekty,
3 kvadratické efekty,
3 lineární × lineární interakce,
6 lineárních × kvadratických interakcí,
3 kvadratické × kvadratické interakce,
1 lineární × lineární × lineární interakci,
3 lineární × lineární × kvadratické interakce,
3 lineární × kvadratické × kvadratické interakce,
1 kvadratickou × kvadratickou × kvadratickou interakci.

Těchto 26 efektů a složek interakcí tvoří opět systém orthogonálních kontrastů skutečných účinků kombinací, a lze je vyjádřit maticově podobně jako (6). Odhady těchto kontrastů jsou tudíž opět nezávislé veličiny, které mají normální rozdělení a každému přísluší při analyse rozptylu jeden stupeň volnosti. Jejich významnost se opět ověří pomocí kriteria F nebo t.

Tak lze postupovat pro libovolný počet faktorů, rozklady jsou ovšem velmi komplikované a numerické výpočty složité.

Uvedený postup při rozkladu hlavních efektů a interakcí na složky, jímž při analyse rozptylu přísluší vždy jeden stupeň volnosti, není jediný. Rozklad lze provádět též jinými způsoby. Principem i těchto způsobů zůstává však rozklad efektů a interakcí ve složky, které tvoří systém orthogonálních kontrastů. Na příklad ve faktorovém pokusu 3^2 je místo rozkladu hlavního efektu faktoru A_1 na lineární a kvadratický efekt možné rozložit ho tak, že provedeme tato dvě srovnání:

$$A_1^* = (a_1^{(2)} - a_1^{(1)})\,(a_2^{(0)} + a_2^{(1)} + a_2^{(2)}),$$

$$A_1^{**} = \frac{1}{2}\,(a_1^{(2)} + a_1^{(1)} - 2\,a_1^{(0)})\,(a_2^{(0)} + a_2^{(1)} + a_2^{(2)}),$$

takže

$$\left\|\begin{matrix} A_1^* \\ 2A_1^{**} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} a_1^{(0)}\, a_2^{(0)} \\ a_1^{(0)}\, a_2^{(1)} \\ a_1^{(0)}\, a_2^{(2)} \\ a_1^{(1)}\, a_2^{(0)} \\ a_1^{(1)}\, a_2^{(1)} \\ a_1^{(1)}\, a_2^{(2)} \\ a_1^{(2)}\, a_2^{(0)} \\ a_1^{(2)}\, a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)}\, a_2^{(2)} \end{matrix}\right\| . \qquad (8)$$

Tohoto rozkladu hlavního efektu je výhodné použít zejména tehdy, když srovnáváme dvě úrovně faktorů ($a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$) s další úrovní $a_1^{(0)}$, která slouží především k účelům kontrolním.

Ze vztahu (8) je zřejmé, že A_1^*, A_1^{**} tvoří systém dvou orthogonálních kontrastů $a_1^{(0)}\, a_2^{(0)}, \ldots, a_1^{(2)}\, a_2^{(2)}$. V analyse rozptylu pak lze zvlášť vyhodnotit A_1^* a $A_1{}^*$, neboť odhady těchto efektů jsou nezávislé a každému přísluší jeden stupeň volnosti.

Lze tedy pro úplné faktorové experimenty 3^n podle povahy konkretního experimentu a požadavků experimentátora nalézt vždy postup, pomocí něhož rozložíme hlavní efekty a interakce ve složky, tvořící systém orthogonálních kontrastů. Odhady těchto složek jsou nezávislé náhodné proměnné a každému přísluší v analyse rozptylu jeden stupeň volnosti.

Jiný způsob hodnocení experimentu typu 3^n navrhl Kempthorne[11]. Spočívá v tom, že se interakce rozdělí na složky, jímž přísluší vždy dva stupně volnosti.

Použijeme-li v tomto případě pro úroveň $a_i^{(j_i)}$,$i = 1, 2, \ldots, n$, $j_i = 0, 1, 2$ symbolu j_i, vyjádříme jednotlivé kombinace pomocí n-tic čísel. Tak na příklad, máme-li faktorový experiment 3^2, lze jednotlivé kombinace vyjádřit jako devět dvojic čísel

$$\begin{matrix} (0, 0), & (1, 0), & (2, 0), \\ (0, 1), & (1, 1), & (2, 1), \\ (0, 2), & (1, 2), & (2, 2). \end{matrix}$$

Těchto devět dvojic si můžeme představit jako body v rovině, se souřadnicovými osami a_1, a_2, při čemž první souřadnice představuje úroveň faktoru A_1, druhá souřadnice úroveň faktoru A_2.

Hlavní efekt faktoru A_1 lze tímto způsobem vyjádřit jako srovnání tří skupin kombinací; první skupinu tvoří ty kombinace úrovní, pro které $a_1 = 0$, druhé dvě ty kombinace, pro něž je $a_1 = 1$ resp. $a_1 = 2$. Podobně hlavní efekt faktoru A_2 dostaneme ze srovnání skupin, pro které $a_2 = 0$ resp. $a_2 = 1$ resp. $a_2 = 2$.

Interakci $A_1 A_2$ přísluší čtyři stupně volnosti. Rozklad ve dvě složky po dvou stupních volnosti se provede tak, že první složka, kterou označíme $A_1 A_2$, se dostane porovnáním skupin kombinací, pro které

$$a_1 + a_2 = 0 \pmod 3,$$
$$a_1 + a_2 = 1 \pmod 3,$$
$$a_1 + a_2 = 2 \pmod 3.$$

Podobně druhá složka se dostane porovnáním skupin kombinací, pro které

$$a_1 + 2\,a_2 = 0 \pmod 3,$$
$$a_1 + 2\,a_2 = 1 \pmod 3,$$
$$a_1 + 2\,a_2 = 2 \pmod 3.$$

Tuto složku označíme $A_1 A_2^2$. Odůvodnění tohoto rozkladu lze podat pomocí orthogonálního řeckolatinského čtverce 3×3; je uvedeno na příklad v [10].

Interakce $A_1 A_2$ by se dala rozložit do dvou složek zřejmě ještě tak, že bychom dostali složky $A_2 A_1$ a $A_2 A_1^2$. Je ihned zřejmé, že složka $A_2 A_1$, kterou dostaneme srovnáním tří skupin kombinací úrovní, pro které

$$a_2 + a_1 = 0 \pmod 3,$$
$$a_2 + a_1 = 1 \pmod 3,$$
$$a_2 + a_1 = 2 \pmod 3.$$

je identická se složkou $A_1 A_2$.

Druhá složka $A_2 A_1^2$ je dána srovnáním tří skupin kombinací, určených rovnicemi

$$a_2 + 2\,a_1 = 0 \pmod 3,$$
$$a_2 + 2\,a_1 = 1 \pmod 3,$$
$$a_2 + 2\,a_1 = 2 \pmod 3.$$

Avšak kombinace splňující rovnici

$$a_2 + 2\,a_1 = j \pmod 3\,, \quad j = 0, 1, 2\,,$$

splňuje též rovnici

$$a_1 + 2\,a_2 = (3 - j) \pmod 3\,, \quad j = 0, 1, 2\,,$$

tudíž skupiny pro $A_1 A_2^2$ a $A_2 A_1^2$ jsou tytéž.

Tím máme pro úplný faktorový experiment 3^2 čtyři složky a každé z nich přísluší dva stupně volnosti.

U faktorového experimentu 3^3 pro hlavní efekty a interakce prvního řádu dostaneme stejné vztahy jako v experimentu 3^2. Interakci druhého řádu lze rozložit do čtyř složek; každá z nich se dostane opět srovnáním tří skupin kombinací úrovní. Označíme-li tyto složky $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_2^2 A_3$, $A_1 A_2 A_3^2$, $A_1 A_2^2 A_3^2$, dostaneme $A_1 A_2^{k_2} A_3^{k_3}$ pro dané $k_2, k_3 = 1, 2$ srovnáním tří skupin, pro které platí

$$a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0 \pmod 3,$$
$$a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 1 \pmod 3,$$
$$a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 2 \pmod 3.$$

Je možno opět ukázat, že
$$A_1 A_2^{k_2} A_3^{k_3} = A_1^2 A_2^{3-k_2} A_3^{3-k_3}.$$

Podobně lze postupovat pro $n = 4, 5, \ldots$ faktorů. Obecně rozdělíme při experimentu 3^n všechny interakce na složky, z nichž každé přísluší dva stupně volnosti, takže všechny hlavní efekty a interakce se rozloží do $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ složek.

Aby rozložení do složek bylo jednoznačné, přijmeme pravidlo, že pořádek písmen v interakcích je vybrán předem, dále že mocnina prvního písmene je vždy rovna jedné. V případě, že mocnina prvního písmene je rovna dvěma, umocníme symbol, představující příslušnou složku, na druhou a třetí mocninu každého písmene nahradíme číslicí 1.

Tento způsob rozkladu interakcí se jeví výhodným tehdy, jestliže provádíme spřažení některých z nich s rozdíly mezi bloky, jak o tom ještě bude hovořeno v další kapitole.

Při tomto postupu se hlavní efekty vyhodnotí normálním způsobem; jednotlivé složky interakcí, které by experimentátor chtěl vyhodnotit, musí si pak upravit tak, aby tvořily s hlavními efekty opět systém orthogonálních kontrastů. Závisí to tedy na jednotlivých případech a proto nelze udat obecný postup.

Pro volbu postupu rozkladu hlavních efektů a interakcí při experimentech typu 3^n je nutno především rozlišovat, jde-li o faktory kvalitativní nebo kvantitativní. Na příklad rozklady na lineární a kvadratické efekty a složky interakcí by pro kvalitativní faktor neměly reálný smysl. Naproti tomu uvedeného rozkladu (8) hlavního efektu A_1 faktorového experimentu 3^2 lze použít pro oba typy faktorů.

Pro praktické používání jsou důležitá taková uspořádání, kdy počet úrovní není stejný pro všechny faktory. Jsou to tak zvané smíšené faktorové experimenty. Z nich nejdůležitější jsou experimenty typu $2^m \times 3^n$, t. j. takové experimenty, v nichž m faktorů je dáno o 2 úrovních a n faktorů o 3 úrovních a dále experimenty, v nichž se vyskytují jen některé faktory na 4 nebo 5 úrovních.

Analysa těchto pokusů je založena na podobných principech jako pokusy s 2 resp. s 3 úrovněmi. Hlavní myšlenka i zde zůstává vhodný rozklad na jednotlivé efekty a interakce tak, aby složky tvořily systém orthogonálních kontrastů a aby z nich mohl experimentátor získat co nejvíce informací.

Aplikace více faktorů, z nichž některé jsou na více než 4 úrovních, jsou příliš komplikované jak vzhledem k jejich uspořádání, tak i k jejich analyse, a proto s hlediska použití nemají již takový význam.

V literatuře se v případech experimentů smíšených nebo o větším počtu úrovní pro různé možnosti faktorů kvalitativních nebo kvantitativních postupuje většinou tak, že se pro konkretní případ konstruuje uspořádání experimentu spolu s jeho analysou. Obecná theorie těchto nejsložitějších experimentů nebyla dosud vypracována a zřejmě by pro praxi neměla velký význam. (Pokračování)