J. Mikusiński

Nové výsledky v theorii distribucí

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 6, 674--677

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137304

v článku „Nové methody statistické regulace jakosti výroby v SSSR", „Sovětská věda" Strojírenství č. 3 1954. Některé další variace regulačních method jsou popsány v návrhu revidované normy ČSN 2240 „Statistická kontrola jakosti" [*13*]. *Tab. 2 a 3* uvedené v tomto článku jsou převzaty z tohoto návrhu normy, pro který byly vypracovány a napočteny Dr A. Žaludovou a Ing. Žd. Režným.

Literatura

[1] B. V. Gněděnko, *Kurs těorii verojatnostěj.*
[2] N. B. Borodačev, *Osnovnyje voprosy těorii točnosti proizvodstva.*
[3] Prof. Dr Janko, *Tabulky k matematické statistice.*
[4] Harald Cramér, *Mathematical Methods of Statistics.*
[5] Prof. Dr Janko, *Theorie náhodných výběrů — odhady a některé testy významnosti.*
[6] A. Hald, *Statistical Tables and Formulas.*
[7] Kolektiv VÚTT-VT, *Směrnice pro statistickou kontrolu jakosti a regulaci výrobních pochodů.*
[8] Hojo, *Distribution of Median from a Normal Population*, Biometrika, Vol. 23 (1931).
[9] Mašinostrojenije, svazek 15, kapitola 8.
[10] Alkalmazott matematikai intézetének közleményei (svaz. II).
[11] Leslie E. Simon, *An Engineer's Manual of Statistical Methods.*
[12] J. V. Uspensky, *Introduction to Mathematical Probability.*
[13] Kolektiv VÚTT-VT, *Návrh revidované normy ČSN 2240 „Statistická kontrola jakosti".*

NOVÉ VÝSLEDKY V THEORII DISTRIBUCÍ

J. MIKUSIŃSKI[1])

J. Mikusiński referoval při své návštěvě Sovětského svazu o výsledcích v theorii distribucí, získaných v Polsku posledního roku. Část těchto výsledků byla autorem oznámena již na matematickém sjezdu v Praze roku 1955.

A. S.

V Polsku trvá již celý rok seminář věnovaný theorii distribucí (čili zobecněných funkcí, jak je zvykem v SSSR distribuce jmenovat). Seminář probíhal zprvu současně ve Vratislavi a ve Varšavě, nyní trvá jen ve Varšavě, a to za účasti matematiků i z jiných měst. Seminář vznikl vlastně z přání vybudovat jednodušší theorii distribucí výběrem vhodných definicí i method dokazování. V minulém roce byly získány nové výsledky. Nejdůležitějším z nich bylo — podle našeho mínění — zavedení pojmu distribuce v bodě a jeho aplikace.

Dnes známe tři ekvivalentní definice distribucí; jsou uvedeny v práci Templeově v *Proceedings of the London Mathematical Society*. Temple zavedl označení (S) pro definici Sobolevovu a Schwartzovu, (B) pro definici Bôchnerovu a (M) pro definici Mikusińského.

Těmito definicemi se nebudeme obírat a jen připomínáme, že se týkají distribucí nekonečného řádu. V aplikacích však mají hlavní význam mnohem jednodušší distribuce konečného řádu. Podařilo se nám udat další definici, velmi jednoduchou, vyhovující intuitivním představám fysiků. Tato definice se dá kromě toho velmi snadno rozšířit

[1]) J. Mikusiński, *O rabotach polskich matěmatikov po těorii obobščennych funkcij i operacionnomu isčisleniju*, UMN, sv. XI (1956), č. 6.

i na distribuce nekonečného řádu. Pro jednoduchost máme v dalším na mysli jen distribuce jediné proměnné.

Tato definice je analogická Cantorově definici irracionálních čísel. Uvažujme posloupnosti spojitých funkcí $f_n(x)$, definovaných v intervalu $a < x < b$. Posloupnost $f_n(x)$ nazýváme fundamentální, bude-li po několikerém integrování konvergovat skoro stejnoměrně, t. j. stejnoměrně v každém uzavřeném intervalu, ležícím v intervalu $a < x < b$; přesněji formulováno, existuje-li přirozené číslo k a taková posloupnost spojitých funkcí $F_n(x)$, skoro stejnoměrně konvergující v intervalu $a < x < b$, aby $F_n^{(k)}(x) = f_n(x)$. Dvě fundamentální posloupnosti $f_n(x)$ a $g_n(x)$ jsou ekvivalentní, lze-li nalézt číslo k a dvě posloupnosti $F_n(x)$ a $G_n(x)$ takové, aby rozdíl $F_n(x) - G_n(x)$ konvergoval skoro stejnoměrně k nule a aby $F_n^{(k)}(x) = f_n(x)$, $G_n^{(k)}(x) = g_n(x)$.

Fundamentální posloupnosti jmenujeme representantem distribuce a třídu ekvivalentních posloupností pak označujeme jako distribuci. Téměř stejně je tomu v Cantorově theorii, kde ekvivalentní posloupnosti racionálních čísel jmenujeme čísly reálnými Distribuci representovanou posloupností $f_n(x)$, označíme $f(x) = [f_n(x)]$. Symbol $f(x)$ pro distribuci je přirozenější než symbol $T(\varphi)$, zavedený Schwartzem.

Dá se pak snadno dokázat věta:

Libovolnou distribuci lze vyjádřit ve tvaru $[w_n(x)]$, kde $w_n(x)$ označuje posloupnost mnohočlenů.

Definice: *Derivací distribuce $f(x) = [w_n(x)]$ rozumíme distribuci $f'(x) = [w_n'(x)]$.*

Věta: *Libovolná distribuce $f(x)$ je derivací (v udaném smyslu) jistého řádu* k *spojité funkce $F(x)$*:

$$f(x) = F^{(k)}(x).$$

Definice: *Posloupnost distribucí $f_n(x)$ konverguje k distribuci $f(x)$, lze-li udat číslo k a takovou posloupnost spojitých funkcí $F_n(x)$, skoro stejnoměrně konvergující k funkci $F(x)$ tak, aby*

$$F_n^{(k)}(x) = f_n(x) \text{ a } F^{(k)}(x) = f(x),$$

při čemž derivace je zobecněná v udaném smyslu.

Snadno lze definovat význam označení: $f(x) + g(x)$, $\alpha f(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ — kde $g(x)$ je dostatečně hladká funkce, $f(\alpha x + \beta)$.

Na příklad, $f(\alpha x + \beta) = [f_n(\alpha x + \beta)]$,
kde $f(x) = [f_n(x)]$. Podobně je tomu se symbolem

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} f_\alpha(x) = f(x),$$

kde $f_\alpha(x)$ závisí spojitě na parametru α.

Platí pak tato netriviální věta:

Existuje-li limita $\lim\limits_{\alpha \to 0} f(\alpha x + \beta)$, je tato limita konstantní funkcí.

Hodnotu této funkce definujeme jako hodnotu distribuce v bodě β; označíme ji $f(\beta)$.

Tak distribuce $\delta(x)$, Diracova funkce, má hodnotu 0 ve všech bodech $x \neq 0$. V bodě 0 nemá žádnou hodnotu, což však nijak nepřekvapuje, neboť na příklad v theorii Lebesgueova integrálu rovněž nemá smysl připisovat funkci hodnotu v každém jednotlivém bodě.

Uvedeme několik vět o hodnotách distribucí.

1°. *Má-li distribuce všude hodnotu 0, pak je ekvivalentní funkci rovné 0.* Obecněji: *Je-li hodnota distribuce spojitou funkcí, je tato distribuce ekvivalentní této funkci.*

Další zobecnění: *Má-li distribuce všude hodnotu a je-li tato hodnota funkcí lokálně sumace schopnou, je distribuce ekvivalentní této funkci.*

2°. *Má-li distribuce všude hodnotu, je tato hodnota funkcí první Baireovy třídy.*

3°. *Hodnota distribuce $f(x)$ existuje v bodě x_0 tehdy a jen tehdy, lze-li nalézt takové* k *a takovou spojitou funkci $F(x)$, aby $F^{(k)}(x) = f(x)$ a*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x - x_0)}{(x - x_0)^k} = 0,$$

kde se limita rozumí v obvyklém významu.

4°. *Má-li funkce $f(x)$ derivaci v bodě x_0 v obvyklém významu, je tato derivace hodnotou zobecněné derivace v tomto bodě.*

Je ovšem možné, že neexistuje derivace v obvyklém významu, zatím co hodnota zobecněné derivace existuje; je tedy hodnota zobecněné derivace rozšířením pojmu obyčejné derivace.

Zavedeme nyní definici integrálu. Libovolná distribuce $f(x)$ má ovšem neurčitý integrál $F(x)$. Je to ona distribuce $F(x)$, jejíž derivace je rovna $f(x)$: $F'(x) = f(x)$. Má-li distribuce $\Phi(x) = F(b + x) - F(a + x)$ hodnotu v bodě 0, je pak zcela přirozené chápat tuto hodnotu jako určitý integrál distribuce $f(x)$

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \Phi(0).$$

Hodnotou určitého integrálu je vždy číslo. Je-li distribuce $f(x)$ funkcí integrace schopnou ve smyslu Lebesgueově, pak její Lebesgueův integrál se shoduje s integrálem právě zavedeným; avšak naše definice je širší a zahrnuje na př. i integrál Denjoyův.

Věta: *Má-li distribuce $f(x)$ hodnotu v bodech a* a b, *pak existuje integrál*

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Jiná věta: *Integrál libovolné periodické distribuce existuje v každém intervalu, jehož délka je rovna periodě.*

Pojem integrálu je velmi důležitý v theorii Fourierových řad. Víme, že libovolná periodická distribuce se dá rozložit ve Fourierovu řadu, která konverguje (v širším smyslu) k této distribuci. Zavedením pojmu integrálu je umožněno koeficienty rozvoje vyjádřit klasickým vzorcem, na př.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, \mathrm{d}x.$$

Jen jako poznámku uvádím, že definici hodnoty distribuce v bodě i integrálu lze zavést i jiným ekvivalentním způsobem.

Největší zásluhu o rozvoj této nové theorie má S. Lojasiewicz, neboť jako první zavedl pojem hodnoty distribuce a vyšetřil hlavní vlastnosti tohoto pojmu. Theorii dále rozvinuli Z. Zieleźny, K. Urbanik a J. Wloka. Nebudu však uvádět ostatní výsledky, dosažené v semináři, který byl veden R. Sikorskim a mnou.

Zmíním se ještě krátce o některých nepublikovaných výsledcích z minulého roku, které se týkají operátorového počtu. Především byla vypracována theorie operátorů na konečném intervalu. Konstrukce těchto operátorů je analogická konstrukci operátorů na konečném intervalu, jak je provedena v mé knize. Pro konečný interval je však tato theorie obtížnější, neboť výchozí okruh funkcí má nulové dělitele. Je proto v této theorii možné, že algebraická rovnice n-tého stupně má nekonečně mnoho řešení. Rovněž neplatí věta o unicitě řešení diferenciální rovnice prvního řádu. Je však možné jinou cestou dokázat, že diferenciální rovnice n-tého řádu má nejvýše n lineárně nezávislých řešení.

Theorie operátorů na konečném intervalu umožňuje efektivní řešení klasických parciálních rovnic s konstantními koeficienty. Na rozdíl od operátorů na nekonečném intervalu lze tedy tyto rovnice řešit i v těch oborech, kde interval proměnné t je konečný a v těchto oborech provádět důkazy o existenci a unicitě řešení úlohy Cauchyovy i úlohy smíšené. Dostáváme tak věty silnější než pro operátory, u nichž interval proměnné t je nekonečný. Lze pak na příklad podat přesný důkaz věty Tichonovovy.

Mému algebraickému pojetí operátorového počtu předcházelo zpracování pomocí Laplaceovy transformace. Pro třídu funkcí, u nichž existuje Laplaceova transformace, jsou obě pojetí ekvivalentní. Avšak pro třídu funkcí, definovaných na konečném intervalu, je to jediná transformace Laplaceova z lineárních transformací, která převádí transcedentní úlohu v algebraickou. Neboť žádná jiná transformace nepřevede v obyčejný součin konvoluční integrál

$$\int_0^t f(t-\tau) f(\tau) \, d\tau,$$

kde $f(t) = 0$ v první polovině intervalu, ježto tento konvoluční integrál je roven nule.

Přeložil Antonín Srovnal

PŮVOD SLUNEČNÍ SOUSTAVY*)

V. A. KRAT

Během tří let, jež uplynula od předložení autorovy hypothesy o vzniku sluneční soustavy, byly nashromážděny četné nové poznatky kosmogonické a astrofysikální. Třebaže se proti této hypothese nevyskytly dosud vážnější námitky, je třeba podložit základní teoretické závěry co nejpřesněji i kvantitativními výpočty, opírajícími se o větší množství fakt.

1. Mezigalaktické prostředí. Tvoření galaxií

V současné době se u některých autorů objevila tendence ztotožňovat prvotní látku, z níž se v galaxiích tvoří hvězdy a planety, s plyno-prachovými mlhovinami. S našeho hlediska jsou však tyto mlhoviny samy produktem procesu vznikání hvězd z tuhých těles poměrně velkých rozměrů.

*) V. A. Krat, *Proischožděnije solněčnoj sistěmy*, Izv. Glavnoj astr. obs. v Pulkove, sv. XX, seš. 3, č. 156, 1956.