Boris Vladimirovich Gnedenko; L. Kalužnin

Boj materialismu s idealismem v matematice [Dokončení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 4, 437--442

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137431

B. V. GNĚDĚNKO, L. KALUŽNIN

BOJ MATERIALISMU S IDEALISMEM V MATEMATICE

(Dokončení)

Věda se nemůže omezit na to, aby podle potřeby vytvářela nové pojmy a nechala je bez vzájemné souvislosti. Musí je naopak uspořádávat v systém a vyzdvihovat společné a rozdílné vlastnosti různých pojmů. Bez významných obecných theorií by se věda stala sbírkou předpisů (jak tomu na nejprimitivnějším stupni vývoje skutečně bylo), přestala by odrážet vztahy skutečnosti; bez obecných theorií by byla znemožněna aplikace a další propracovávání speciálních vědeckých výsledků. V polovině 19. století byly vytvořeny předpoklady pro vybudování obecných theorií, v nichž mohly různé nově vytvořené pojmy najít přiměřené místo. V různých zemích a zčásti nezávisle na sobě podnikali matematikové bádání v tomto směru. Jména Grassmann, Hamilton, Kotělnikov, Frobenius a mnohá jiná stojí na počátku tohoto vývoje, který je významným přínosem k vytvoření moderní algebry a geometrie.

Avšak bouřlivě se rozvíjející fysika vyžadovala stále nových, komplikovanějších pojmů k přesnému popisu fysikálních jevů. Naproti tomu se při zevrubném studiu integrálních rovnic, variačního počtu a jiných disciplin analysy ukázalo, že používání geometrického způsobu vyjadřování značně přispívá k názornosti a obecnosti úvah. To dalo podnět k utvoření pojmů nejprve n-dimensionálního prostoru (připomeňme při této příležitosti pojem fázového prostoru ve fysice), pak nekonečně dimensionálního prostoru Hilbertova a prostorů ještě obecnějších, jako jsou prostory Banachovy, a konečně obecných prostorů topologických atd. Vlastnosti těchto pojmů nebyly tvořeny libovolně v hlavách matematiků a ve formě více méně obecných axiomů postaveny do čela theorií, nýbrž byly připraveny předchozím vývojem vědy a vyplynuly ze studia známých vlastností starších matematických pojmů a výsledků, které v jistém smyslu tvořily konkretní součást matematiky. Jak již bylo řečeno, měly při tom požadavky fysiky nemalou úlohu. Často to byli fysikové, kteří sami razili nové matematické pojmy. Připomeňme jen Maxwellovo a Thomsonovo jméno v souvislosti se vznikem pojmu vektor.

Hlavní kořeny idealistických názorů jsou — jak ukázali klasikové marxismu-leninismu — v ekonomických a společenských jevech. V matematice je pak řada momentů, které vysvětlují, proč podstata právě této vědy byla vykládána idealisticky. Jsou to krajní abstraktnost, jakož i vývoj matematiky, který probíhá bez ohledu na zkušenost, dále důsledně deduktivní způsob výkladu, a konečně sama řeč, v níž jsou matematické theorie vyjadřovány.

Podle názoru materialistů odrážejí matematické pojmy a věty jisté vlastnosti věcí skutečného světa. Tyto vlastnosti však v matematice nejsou zkoumány přímo, nýbrž jsou nejprve převáděny do abstraktních forem. Zde spočívá jedna z nejsilnějších stránek matematiky — její obecnost. Tím jsou umožněny aplikace matematicky zjištěných zákonitostí v nejrůznějších oborech přírodních věd, v technice a v jevech ekonomických. Není obtížné uvést příklady, kdy táž matematická theorie poskytuje uspokojivý popis jevů, které mají na první pohled velmi málo společného, a které patří ke zcela různým oborům. Omezme se na triviální ilustraci. Pojem čísla se nevztahuje na žádnou určitou skupinu jevů. Čísla sama v přírodě neexistují, jsou to abstrakce, které vznikly porovnáváním množin skutečných předmětů. Avšak na druhé straně není oboru lidské činnosti, který by se bez pojmu čísla a jeho vlastností obešel.

Abstraknost vědy naprosto neznamená, že její pojmy a výroky jsou odtrženy od skutečnosti a že jsou učenci vymyšleny. Proces abstrakce je nutnou a důležitou etapou každého poznání. Velmi výstižně to formuloval V. I. Lenin: *„Myšlení, stoupajíc od konkretního k abstraktnímu, se nevzdaluje — je-li správné... od pravdy, nýbrž se k ní přibližuje.... všechny vědecké (správné, vážné, ne nesmyslné) abstrakce odrážejí přírodu hlouběji, věrněji, úplněji. Od živého nazírání k abstraktnímu myšlení a od něho k praxi — taková je dialektická cesta poznání pravdy, poznání objektivní reality.“*[11])

Jestliže zdůrazňujeme přednosti matematických method, pak bychom ihned rádi dodali, že jen matematika sama nemůže odrážet skutečné jevy. Možnosti matematiky v poznávacím procesu jsou omezené a pro adekvátní popis skutečnosti je vždy nutné vzít v úvahu též zvláštnosti zkoumaných jevů a podmínky jejich realisace.

V moderních učebnicích a monografiích je dnes obvyklé vykládat matematické theorie deduktivně, bez zřetelného spojení s praxí, ve vědomě abstraktní formě. Stačí připomenout, jak se dnes již v prvních semestrech vysoké školy vyučuje algebře a geometrii. Jako příklad vědomě abstraktního výkladu je často citován začátek *Grundlagen der Geometrie* D. Hilberta. Toto dílo začíná slovy: *„Mysleme si tři systémy předmětů. Předměty prvního systému nazveme body a označíme je A, B, C, . . . , předměty druhého systému nazveme přímkami a označíme je a, b, c, . . . , předměty třetího systému nazveme rovinami a označíme je α, β, γ, . . .“*[12]) Potom přichází výčet vlastností, které těmto vyšetřovaným předmětům náležejí. Takový axiomatický způsob výkladu jako takový není — jak se mnozí domnívají — žádnou známkou idealistického pojetí matematiky. Axiomatická výstavba a axiomatický způsob výkladu přinesly matematice velké možnosti vývoje, a nelze si je dnes vůbec odmyslit. Nesmíme však z jejich existence chybně vyvozovat, že matematik pojmům, které definoval, přikládá nějaké vlastnosti podle své libosti, a že axiomy jsou volné výtvory lidského ducha. Tento názor je mezi matematiky idealisticky smýšlejícími velmi rozšířen, není však ničím odůvodněn a odporuje celým dějinám vědy. Materialisté odmítají tento názor, neodmítají však axiomatickou a abstraktní formu výkladu matematiky.

Způsob výkladu, který Hilbert zvolil v citované klasické práci, měl splnit zvláštní úlohu. Hilbertovým úmyslem bylo odstranit ze základů geometrie všechny názorové představy, aby se sem nemohly vloudit žádné neformulované axiomy, jak by se při názorovém výkladu geometrie mohlo snadno stát. Teprve pak je možno provést logicky bezvadnou výstavbu geometrie. Avšak to, co má Hilbert na mysli, je již existující eukleidovská geometrie, jejíž základní pojmy — body, přímky, roviny, — mají ony vlastnosti, které v průběhu tisíciletí vykrystalisovaly abstrakcí ze skutečnosti. V souvislosti s naším výkladem je užitečné uvést velmi jasná slova V. I. Lenina, která pronesl o axiomech formální logiky. Vztahují se stejně dobře i na systémy axiomů v matematice: *„Praktická činnost člověka musela miliardykrát vést vědomí člověka k opakování různých logických figur, aby tyto figury mohly nabýt významů axiomů.“*[13])

Nemáme dostatek času, abychom se v této přednášce blíže zabývali velkým významem axiomatiky v moderní matematice a abychom v průběhu dějin matematiky sledovali změny toho, co rozumíme systémem axiomů. Chtěli bychom však znovu zdůraznit, že libovolnost nějakého systému axiomů je klamným zdáním. Trvale plodnými a udržitelnými se jeví jen takové systémy axiomů, které obsahují výtažek poznání těch vlast-

---

[11]) V. I. Lenin, *Filosofické sešity*, Praha 1954, str. 140.
[12]) D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 2. vyd., str. 2, 1903.
[13]) V. I. Lenin, *Filosofické sešity*, Praha 1954, str. 158.

ností, které se v praxi osvědčily jako pravdivé. Kdyby se ukázalo, že nějaký systém axiomů, na příklad Peanův, neodráží všechny podstatné vlastnosti popisovaného systému přirozených čísel, nezřekneme se samozřejmě systému přirozených čísel, nýbrž Peanova systému axiomů v jeho nynější podobě. Zdánlivá libovolnost systémů matematických axiomů je však na druhé straně oblíbeným argumentem idealisticky zaměřených matematiků.

I když je v učebnicích a monografiích výklad matematických výsledků deduktivní a příslušná theorie se odvozuje jako logický důsledek ze systému axiomů stojících v čele, přece má základní úlohu ve vývoji matematiky praxe. Tato skutečnost byla často zdůrazňována význačnými matematiky, kteří usilovali o to, odkrýt kořeny své vědy. Tak na příklad začíná P. L. Čebyšev svou přednášku „O kreslení zeměpisných map" těmito slovy: „*Od nejdávnějšího starověku upoutávaly matematické vědy na sebe zvláštní zájem. Dnes se tento zájem vzhledem k vlivu matematiky na umění a na průmysl ještě zvětšil. Sblížení theorie s praxí přináší velmi blahodárné výsledky a není to jen praxe sama, která při tom získává; i vědy se vyvíjejí pod jejím vlivem: otevírá jim jednak nová pole bádání, jednak ukazuje nové stránky na předmětech již dlouho známých. Přes vysoký stupeň vývoje, kterého matematické vědy pracemi velkých geometrů v posledních třech stoletích dosáhly, ukazuje praxe jasně v mnohém směru jejich neúplnost; předkládá vědě podstatně nové otázky a vyvolává tím hledání zcela nových method. Ačkoli theorie získává mnoho z používání a nového rozvíjení starších method, přece mnohem více jí poskytuje objevování method nových, při čemž věda nachází v praxi bezpečného vůdce.*"[14])

Jiný význačný matematik z počátku 20. století, A. M. Ljapunov, na totéž thema napsal: „*. . . smysl má jen takové bádání, které bylo vyvoláno aplikacemi (vědeckými či praktickými), a jen takové theorie jsou skutečně užitečné, které se vyvinuly z pozorování zvláštních případů.*

Podrobné propracování těch otázek, které jsou s hlediska aplikací důležité a zároveň jsou theoreticky zvláště obtížné, vyžaduje vynalézání nových method a vzestup k principům vědy, na to pak navazující zobecnění nalezených výsledků a tak vytvoření více či méně obecné theorie".[15])

Podtrhujeme důležitost praxe pro vývoj matematiky; zároveň je však třeba varovat před vulgárním prakticismem.

Řešení speciálních, praxí položených úkolů, je záslužnou a důležitou úlohou vědy, avšak zdaleka ne úlohou jedinou. Působení praxe na vědu se nemůže a nemá omezovat na to, že věda řeší dílčí problémy, které se v průběhu praktické činnosti jednou zde, jednou onde v některém oboru vynoří. Z praxe vycházející problematika se stává velkým a důležitým vědeckým objektem, podaří-li se ve zvláštních otázkách rozpoznat společné, typické a pro četné obory praxe podstatné stránky. Bez toho věda nemůže praxi vést a proměňuje se v hromadění skutečností a receptů. Opravdová věda naproti tomu nachází v konkretních požadavcích praxe látku pro výstavbu důležitých theorií, a vycházejíc z těchto theorií nachází neomezené možnosti pro řešení vždy znovu se vynořujících otázek praktické činnosti. Vlastní hodnota vědeckých konstrukcí je podmíněna šířkou a mnohotvárností jejich spojení s ostatními disciplinami, možností aplikace na nejrozmanitější otázky průmyslové a vědecké praxe. Matematické discipliny, které se uzavírají do úzké skořápky vlastních zájmů a které nemají žádný vztah k ostatním matematickým disciplinám, k fysice, k jiným přírodním vědám a technice, velmi brzy degenerují a prakticky odumírají. Na konec bychom však chtěli ještě jednou zdůraznit, že dialektický materialismus chápe požadavky praxe ve velmi širokém smyslu a požadavky, které vyplývají z vývoje vědy samé, včetně matematiky, pokládá rovněž za praxi.

[14]) P. L. Čebyšev, *Polnoje sobranije sočiněnij*, sv. 5, str. 150, Moskva 1951.
[15]) *Zprávy Charkovské matematické společnosti*, II. řada, sv. 4, č. 5—6, str. 271—272, 1895.

Skutečnost, že matematické pojmy jsou abstrakcemi skutečných věcí a jejich vztahů, nebo i abstrakcemi takových abstrakcí, a že proto co nejúžeji souvisí se skutečností, vysvětluje a jedině to vysvětluje použitelnost matematiky a jejich výsledků na přírodní jevy. Tato použitelnost není žádnou náhodou, jak si to představuje Boutroux a mnozí jiní idealisticky zaměření matematikové, nýbrž vyplývá z toho, že matematické theorie správně odrážejí pravou povahu určité stránky skutečnosti. Velmi výstižně to formuloval Engels na jednom místě v „Anti-Dühringovi": *„Že čistá matematika má platnost nezávislou na zvláštní zkušenosti jednotlivcově, je ovšem správné a platí to o všech zjištěných faktech všech věd, ba o všech faktech vůbec ... Avšak v čisté matematice se rozum nezabývá pouze svými vlastními výtvory a imaginacemi. Pojmy počtu a figury nejsou vzaty odnikud jinud než ze skutečného světa. Deset prstů, na nichž se lidé naučili počítat, tedy provádět první aritmetický úkon, jsou vším jiným, jen ne volným výtvorem rozumu. K počítání patří nejen počitatelné předměty, nýbrž i schopnost opomíjet při pozorování těchto předmětů všechny jejich ostatní vlastnosti vyjma jejich počet — a tato schopnost je výsledkem dlouhého dějinného zkušenostního vývoje. Jak pojem počtu, tak i pojem figury je vypůjčen výlučně z vnějšího světa a nevznikl v hlavě z čistého myšlení. Musily být věci, které měly formu, a jejich formy byly porovnávány, než se mohlo dospět k pojmu figury. Předmětem čisté matematiky jsou formy prostoru a kvantitativní vztahy skutečného světa, tedy velmi reálná látka. Že se tato látka jeví v nejvýš abstraktní formě, může zakrýt jen povrchně její původ z vnějšího světa. Abychom však mohli tyto formy a vztahy zkoumat ryzí, musíme je úplně odloučit od jejich obsahu, a ten jako lhostejný ponechat stranou; tak dostaneme body bez rozměrů, čáry bez tloušťky a šířky, „a" a „b" a „x" a „y", veličiny stálé a proměnné, a až zcela nakonec dojdeme k vlastním výtvorům a imaginacím rozumu, totiž k imaginárním veličinám. Ani zdánlivé matematických odvozování veličin jedné z druhé nedokazuje jejich apriorní původ, nýbrž pouze jejich racionální souvislost. Než se došlo k myšlence odvodit formu válce z otáčení pravoúhelníka kolem jedné z jeho stran, bylo nutno prozkoumat mnoho skutečných pravoúhelníků a válců, byť v sebe nedokonalejší formě. Jako všechny ostatní vědy, vznikla i matematika z potřeb lidí, z měření země a obsahu nádob, z počítání času a z mechaniky. Ale jako ve všech oborech myšlení, i tu se na jistém stupni vývoje zákony abstrahované ze skutečného světa odloučí od skutečného světa a postaví se proti němu jako něco samostatného, jako zákony pocházející z vnějška, podle nichž se má svět řídit; tak se to dálo ve společnosti a ve státě, tak a nejinak se později čistá matematika aplikuje na svět, ačkoli je právě z tohoto světa převzata a představuje pouze část forem jeho složení — a právě jen proto je vůbec aplikovatelná."*[16])

Po všem, co jsme řekli, se vynořuje otázka, čím to, že idealističtí matematikové, kteří zastávají falešné názory na podstatu matematiky, jsou přece s to vytvořit někdy vynikající matematické theorie a dospět k výsledkům, které mají velký vědecký a praktický význam? Neznamená to, že také oni mají v jistém smyslu pravdu?

Na tuto oprávněnou otázku musíme odpovědět. Byla a je veliká řada vynikajících a někdy i velkých matematiků, kteří zastávali krajně idealistické názory. Stačí uvést jména Pythagoras, G. Cantor a H. Poincaré, abychom se přesvědčili, že často nejvýznačnější zástupci konkretní matematické vědy se stali idealisty, ba dokonce zakladateli nových idealistických směrů. Avšak svých stěžejních matematických výsledků dosáhli nikoli pro své idealistické názory, nýbrž přes svoje idealistické názory.

Matematik, i když je idealistou, neprovádí svá bádání na látce, kterou si sám podle své libosti vymyslil. Dříve než začal tvořivě pracovat, učil se již existující matematice ve škole a na universitě, četl matematické monografie a původní práce, a diskutoval se svými kolegy o problémech, které jsou před matematickou vědou. Jeho myšlení

---

[16]) B. Engels, *Anti-Dühring*, Praha 1947, str. 36—37.

bylo už tedy připraveno předcházejícím vývojem vědy; úkoly, které si vytyčil, vynořily se už buď dříve, nebo byly připraveny pracemi jeho předchůdců, nebo konečně vyplynuly z pokroků jiné vědy. Předmět jeho bádání nebyl tedy jím libovolně vytvořen, nýbrž uzrával z předcházejícího vývoje vědy. Matematik žije ve společnosti a ať chce nebo nechce, dovídá se o problémech, které přináší věda, technika a jiné obory lidské činnosti.

Uveďme jako příklad G. Cantora, tvůrce theorie množin. Ve svých studiích, které vedly k vypracování této základní matematické disciplíny, vyšel z konkretních problémů, které vznikly při vyšetřování množiny bodů konvergence trigonometrických řad. Také pokud se týká čisté theorie množin měl své předchůdce. Stačí upozornit na proslulou práci B. Bolzana *Paradoxien des Unendlichen*. Velký výkon Cantorův spočívá v tom, že rozpoznal význam pojmu množiny a jeho vlastnosti pro celou matematiku. Tento pojem a jeho vlastnosti získal abstrakcí ze skutečnosti a z již existující matematické vědy, která se své strany je abstrakcí skutečnosti a nikoli vnuknutím božím, jak se on sám domníval a jak ve svých spisech a dopisech vždy zdůrazňoval.

Přihlédneme-li k matematickému dílu H. Poincaréa, vidíme, že široký okruh jeho zájmů se týká těch oborů vědy, které vznikly a které vytvořily svůj okruh pojmů již před ním. Automorfní funkce se vyskytují v Poincaréových pracích nikoli jako volné výtvory ducha, nýbrž proto, že k nim vedl důsledný rozvoj Riemannových myšlenek. Ostatně stejný směr vývoje byl zároveň sledován L. Fuchsem a F. Kleinem. Z téhož pramene pocházejí též základní Poincaréovy práce z kombinatorické topologie. Poincaréovy práce o nebeské mechanice nemůže při nejlepší vůli ani on sám pokládat za myšlenkový statek duchem volně vytvořený. Tyto práce spadaly do celkového vývoje astronomického bádání a byly důsledným pokračováním theorií dřívějších. Zároveň s Poincaréem vytvořil A. M. Ljapunov v Rusku theorii rovnováhy rotujících hmot, která šla v mnohém směru dál než theorie Poincaréova. Při tom Ljapunov byl matematik, který si byl reálného východiska theorie plně vědom.

Vidíme tedy, že matematické objekty nejsou žádnými volnými výtvory ducha, a že nemohou být matematikem libovolně stanoveny. Žádný matematik nemůže na příklad stanovit systém axiomů, který by začal takto: Dvě Riemannovy plochy jsou ekvivalentní, jestliže jsou natřeny stejnou barvou, nebo jsou-li osvětleny elektrickou žárovkou... Kdyby někdo předložil takovou práci, neoznačovali bychom ho za idealistu, nýbrž doporučili bychom mu, aby se dal vyšetřit psychiatrem. Vyjdeme-li však z idealistické zásady volného tvoření matematických objektů a jejich vlastností, nemáme žádný podstatný důvod, proč bychom takovou snůšku slov neměli pokládat za systém axiomů. Snad se bude tvrdit, že barva a osvětlení nejsou matematickými kategoriemi. Co to ale potom je matematická kategorie? Kde zůstává volnost, s níž připisujeme svým objektům libovolné vlastnosti? Bude se tvrdit, že výroky by byly nesmyslné (ovšem, jsou jistě nesmyslné). Kdy však mají matematické výroky smysl? Jaká omezení je nutno respektovat při stanovení axiomů? A ještě jednou: kde zůstává volnost?... Jak vidíme, důsledný výklad základních idealistických výroků o podstatě matematiky vede k absurdnosti.

Vyvracení idealistických názorů o matematice je důležitým úkolem matematiků, neboť chybné názory působí vždy škodlivě. I když — jak jsme již uvedli — se stává, že idealisticky zaměření matematikové dospívají k vědecky správným výsledkům a vytvářejí hodnotné matematické theorie (nikoli proto, že jsou mylných názorů o podstatě matematiky, nýbrž přes to, že takové názory mají), přece jen převaha idealistických názorů na dlouhou dobu škodlivě působí na vývoj matematiky. To se týká zejména volby zkoumané látky. Nadaní matematikové jsou sváděni k řešení problémů, které se ukazují jako podružné, důležité obory se nezpracovávají, poněvadž z módních důvodů neodpovídají vkusu badatelů. Bludnými idealistickými názory o podstatě matematiky jsou postavení této vědy oproti jiným vědám a její význam pro společnost stavěny do zcela falešného světla. Nakonec je pak význam matematiky širokými kruhy vzdělanců podceňován, a naproti tomu se zase mnozí matematikové stahují do slonovinové věže své vědy. Poslední důležitý argument pro nutnost boje proti idealistickým názorům v matematice je tento: idealističtí filosofové se opět a opět dovolávají existence „matematických pravd", aby zdůvodnili prvotnost vědomí před bytím. Vzpomeňme jen první kapitoly Kantova díla „Kritik der reinen Vernunft", kde se Kant pomocí matematických vět snaží zdůvodnit tak zvaný čistý názor, o nějž pak opírá celou svou idealistickou theorii poznání. Avšak i dnes nejreakčnější idealistické filosofické směry, jako Russelův, nebo směr tak zvané vídeňské školy, stavějí své systémy na idealistickém výkladu matematiky. Zevrubná kritika idealistických názorů o matematice je tedy nutná proto, abychom si učinili jasno o zhoubné povaze reakčních ideologií.

V závěru svého výkladu bychom ještě jednou chtěli upozornit na to, že jsme se velmi důležitých problémů o podstatě matematiky jenom dotkli. Muselo by být vykonáno mnoho práce, aby naznačené otázky mohly být beze zbytku vyloženy. Pokládáme takovou práci za velmi důležitou. Naším úkolem bylo vzbudit zájem o naznačené otázky, a dále pak čelit řadě nedorozumění, která jsou v oboru filosofických otázek matematiky rozšířena. Jestliže se nám to podařilo, potom považujeme úkol, který jsme si v této přednášce vytyčili, za splněný.

Přeložil *Dr Otto Fischer*
(Mat. ústav ČSAV)