Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

V.G. Boltyanskij; V. A. Yefremovich

O topologii. II

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 4 (1959), No. 4, 394--421

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137735`

MATEMATIKA

O TOPOLOGII II*)

V. G. Boltjanskij, V. A. Jefremovič

Obecná topologie

4. Abstraktní geometrie

Metrické a topologické prostory

Při studiu elementární geometrie si můžeme všimnout, že obvyklá, názorná interpretace vyšetřovaných objektů („bodů", „přímek", ...) a základních vztahů mezi nimi (bod leží „na" přímce, bod leží „mezi" dvěma body, dvě úsečky jsou „kongruentní", ...) není v logické výstavbě podstatná; podstatné je pouze to, že tyto vztahy vyhovují jistým základním zákonům (axiomům), o které se při takovém výkladu opírají všechny důkazy[1]).

Z hlediska abstraktní geometrie mají dva geometrické systémy „stejnou strukturu" (čili, jak říkají matematici, jsou isomorfní), existuje-li vzájemně jednoznačné přiřazení mezi základními objekty a základními vztahy těchto systémů, při kterém každému vztahu mezi prvky jednoho systému odpovídá příslušný vztah mezi odpovídajícími prvky druhého systému. Takové přiřazení nazýváme isomorfismus. Systémy jako by se vzájemně opakovaly (z hlediska vyšetřovaných vztahů mezi prvky), jsou přesnými vzájemnými kopiemi, doslovnými překlady z jednoho jazyka do druhého.

Nechť například prvky systému A jsou body a přímky vodorovné roviny a prvky systému B jsou svislé přímky a svislé roviny. Základním vztahem mezi prvky v těchto systémech budiž vztah, který vyjadřujeme slovy „ležeti na" (bod leží na přímce, přímka leží v rovině). Je zřejmé, že tyto dva systémy jsou isomorfní: přiřadíme-li každému bodu (nebo přímce) systému A tu přímku (nebo rovinu) patřící do systému B, které tímto bodem (nebo přímkou) prochází, dostaneme vzájemně jednoznačné přiřazení prvků systému A prvkům systému B, které zachovává vztah „ležeti na".

Myšlenka abstraktního geometrického systému nebo abstraktního prostoru se výrazně projevuje v pojmu „metrického prostoru". Tento pojem, zavedený začátkem tohoto století francouzským matematikem M. Fréchetem, má důležitou úlohu v matematice i mimo ni. V obyčejném trojrozměrném prostoru (je-li zvolena jednotka délky) je pro každé dva body x, y definována

*) В. Г. Болтянский и В. А. Ефремович, Очерк основных идей топологии, Matěmatičeskoje prosveščenije, č. 3, 1958.

[1]) V souvislosti s tím viz úvodní stať P. K. Raševského ke knize Д. Гилберт, Основания геометрии, M—L, 1948, kde je otázka axiomů geometrie studována dostatečně podrobně.

jejich vzdálenost, nezáporné číslo $\overline{xy}$, splňující dobře známou trojúhelníkovou nerovnost:

$$\overline{ab} + \overline{bc} \geqq \overline{ac}\,,$$

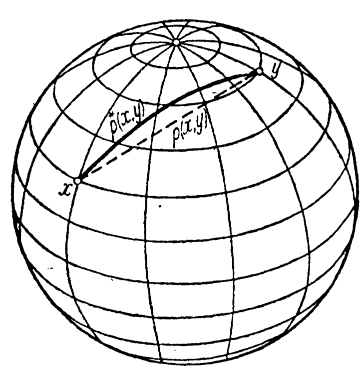
kde a, b, c jsou tři libovolné body (rovnost nastává, jestliže bod b leží mezi body a a c). Vzdálenost je tou základní vazbou mezi dvěma body, na které je založen pojem metrického prostoru.

Metrické prostory

Metrickým prostorem nazýváme množinu **R** libovolných prvků, zvaných body, v níž je definována vzdálenost $\overline{xy}$ (nebo $\overline{yx}$) libovolných dvou bodů x a y; předpokládáme, že vzdálenost dvou různých bodů je kladná a vzdálenost bodu sama od sebe je rovna nule; kromě toho předpokládáme, že pro libovolné tři body x, y, z je splněna trojúhelníková nerovnost: $\overline{xy} + \overline{yz} \geqq \overline{xz}$. Často je vhodnější označovat vzdálenosti dvou bodů x a y místo znakem $\overline{xy}$ symbolem $\varrho(x, y)$, a zdůraznit tím, že vzdálenost je funkcí dvou proměnných bodů x, y.

V metrickém prostoru je tedy definována vzdálenost $\varrho(x, y)$ dvou libovolných bodů x a y, splňující tyto podmínky (axiomy metrického prostoru):

1. $\varrho(x, y) > 0$ pro $x \neq y$; $\varrho(x, x) = 0$,
2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ (axiom symetrie),
3. $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geqq \varrho(x, z)$ (trojúhelníková nerovnost).



Obr. 50.

Abstraktní množina se stává metrickým prostorem, definujeme-li v ní metriku, tj. vzdálenost každých dvou bodů, vyhovující axiomům 1, 2, 3. Metrika je tedy jedinou vazbou mezi prvky nějaké množiny, který ji činí metrickým prostorem. Definujeme-li v téže množině jinou metriku, rovněž vyhovující axiomům 1, 2, 3, vytvoříme tím jiný metrický prostor, třebaže se skládá ze stejných bodů.

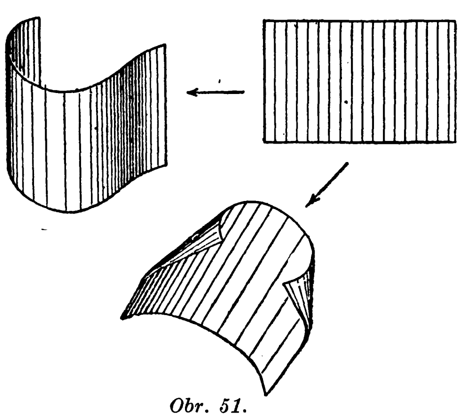
Uvažujme např. kulovou plochu (obr. 50). Vzdálenost $\varrho(x, y)$ libovolných dvou jejich bodů budiž délka úsečky o krajních bodech x a y. Dostaneme tak metrický prostor, který označíme **S**. Z téže množiny utvoříme jiný metrický prostor **S*** tím, že za vzdálenost $\varrho^*(x, y)$ vezmeme délku nejkratšího oblouku s krajními body x a y, ležícího na naší kulové ploše (tj. délku kratšího z obou oblouků hlavní kružnice, procházející body x a y). Takovou metriku (délka nejkratší spojnice) lze definovat na plochách, kterými se zabývá diferenciální geometrie; nazývá se vnitřní metrikou takovéto plochy. Na kulové ploše lze zavést např. i metriku ϱ^{**} takto: $\varrho^{**}(x, y) = 1$, pro $x \neq y$, a $\varrho^{**}(x, x) = 0$. Takto vzniklý metrický prostor **S**** má tuto neobvyklou vlastnost: ať se po kulové ploše jakkoli „blížíme" k některému jejímu bodu x, vzdálenost ϱ^{**} „pohybujícího" se bodu od bodu x neklesá a teprve při splynutí pohybujícího se bodu s bodem x se stává skokem nulovou.

Ukažme ještě zajímavou vlastnost prostoru **S***: dvojice bodů x, y z **S*** může mít nekonečně mnoho středů, tj. bodů, které přirozeně považujeme za

„střed úsečky xy". Tento případ nastane, jestliže x a y jsou koncovými body téhož průměru („póly") dané kulové plochy. Nechť E je hlavní kružnice, jejíž rovina je kolmá k úsečce xy („rovník"); pak pro libovolný bod z na „rovníku" platí: $\varrho^*(x, z) = \varrho^*(z, y) = \frac{1}{2}\varrho^*(x, y)$, a to podle obvyklé představy znamená, že bod z je středem dvojice bodů xy; celý „rovník" se tedy skládá z takových středů. Můžeme tedy říci, že kružnice E (jako ostatně i každá jiná kružnice) má v prostoru $\mathbf{S}^*$ dva středy: x a y.

Uvedené příklady ukazují, že „geometrie" metrického prostoru nemusí zdaleka odpovídat našim obvyklým představám.

Podle definice isomorfismu jsou dva metrické prostory $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}'$ isomorfní (v tomto případě se též říká isometrické), existuje-li vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru $\mathbf{R}$ na prostor $\mathbf{R}'$, které každým dvěma bodům x, y z $\mathbf{R}$ přiřazuje takové dva body x', y' z $\mathbf{R}'$, jejichž vzdálenost je stejná jako vzdálenost bodů x, y. Takové zobrazení nazýváme isometrie. Na příklad v elementární geometrii jsou dva útvary isometrické, jestliže je lze eukleidovským pohybem navzájem ztotožnit. Jiný příklad: množina všech polopřímek (trojrozměrného prostoru) vycházejících z jistého bodu O je metrickým prostorem, zvolíme-li za „vzdálenost" velikost úhlu dvou polopřímek, měřenou v obloukové míře; tento prostor je isometrický s kulovou plochou o poloměru 1 s vnitřní metrikou. Poznamenejme ještě, že ohyb plochy (tj. taková její deformace, která zachovává délku libovolného oblouku na této ploše, obr. 51) je názorným příkladem isometrické transformace plochy vzhledem k její vnitřní metrice.



Obr. 51.

Uvedeme ještě některé důležité příklady metrických prostorů. Množina $\mathbf{D}$ všech reálných čísel, ve které je vzdálenost definována vztahem $\varrho(x, y) = |x - y|$, je metrickým prostorem (číselná osa). Množina $\mathbf{Z}$ všech komplexních čísel, ve které je vzdálenost definována stejným vztahem, je také metrický prostor (komplexní rovina). Množina všech n-členných posloupností reálných čísel, $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, je metrickým prostorem, jestliže vzdálenost „bodů" x a $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ definujeme vztahem

$$\varrho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

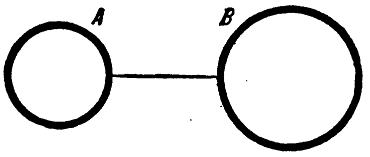
Tento prostor označujeme $\mathbf{R}_n$ a nazýváme n-rozměrný eukleidovský prostor. Pro $n = 1$ dostaneme číselnou osu $\mathbf{R}_1$. Pro $n = 2$ dostaneme prostor $\mathbf{R}_2$ isometrický s obyčejnou rovinou nebo s komplexní rovinou $\mathbf{Z}$. Pro $n = 3$ dostaneme prostor $\mathbf{R}_3$ isometrický s obyčejným prostorem.

Jako příklad jiné povahy uveďme množinu $\mathbf{C}$ všech spojitých funkcí jedné proměnné x na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Tato množina je metrickým prostorem, zvolíme-li za vzdálenost dvou „bodů" (tj. dvou spojitých funkcí f a g) číslo

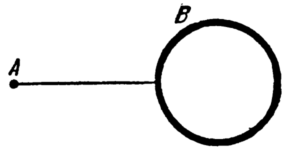
$$\varrho(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|\,.$$

Tento metrický prostor **C** je důležitý v moderní matematice (např. ve funkcionální analyse).

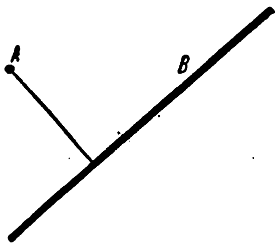
Dosud jsme mluvili o vzdálenosti bodů metrického prostoru. Přistoupíme nyní k pojmu vzdálenosti dvou množin.



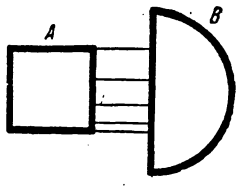
Obr. 52.



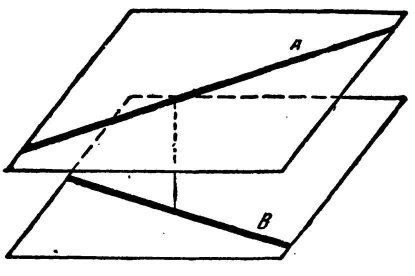
Obr. 53.



Obr. 54.

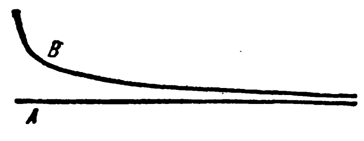


Obr. 55.



Obr. 56.

Obr. 57.



Obr. 58.

Říkáme, že dvě množiny **A** a **B** metrického prostoru **R** jsou oddělené, existuje-li kladné číslo α takové, že $\varrho(x, y) \geqq \alpha$ pro libovolný bod x z **A** a libovolný bod y z **B**. Největší z takových čísel α nazýváme vzdáleností množin **A** a **B** a označujeme ϱ(**A**, **B**). Jestliže takové kladné číslo α neexistuje, říkáme, že množiny **A** a **B** jsou blízké (nebo nekonečně blízké) a jejich vzdálenost klademe rovnou nule.

Píšeme potom

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{B}$$

(čteme: „**A** a **B** jsou blízké“).

Zápisy **A**δ**B** a ϱ(**A**, **B**) $= 0$ jsou ekvivalentní.

Obr. 52—55 ilustrují pojem vzdálenosti dvou množin: tučně jsou narýsovány útvary **A** a **B**, ležící v jedné rovině, a slabě je narýsována nejkratší úsečka s jedním krajním bodem v **A** a druhým v **B**. Délka této úsečky je rovna ϱ(**A**, **B**). Na obr. 53 a 54 je útvar **A** tvořen jediným bodem. Vzdálenost dvou mimoběžek je rovna délce úsečky vyťaté těmito přímkami na jejich společné kolmici (obr. 56).

Poznamenejme však, že ne vždy se podaří najít v množinách **A** a **B** body tak, aby jejich vzdálenost byla rovna $\varrho(\mathbf{A}, \mathbf{B})$: stačí vzít na přímce dva otevřené intervaly bez společných bodů (obr. 57). Je-li dále **B** křivka a **A** její asymptota, pak $\varrho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$, tj. množiny **A** a **B** jsou blízké, třebaže nemají společných bodů (obr. 58).

Spojitost

Ukážeme nyní, že pojmy, které jsme v kapitole 1 nazvali topologickými, mohou být charakterisovány pomocí jediného geometrického pojmu — bodu blízkého množině. Přistoupíme nejdříve k pojmu spojitosti.

Nechť f je zobrazení metrického prostoru **R** do metrického prostoru **R'** a x'_0 bod z **R'**, který je obrazem bodu x_0 z **R** při zobrazení f. Zobrazení f nazýváme spojitým v bodě x_0, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že obrazy všech bodů, jejichž vzdálenost od x_0 je menší než δ, jsou od bodu x'_0 vzdáleny méně než ε [tj. obraz δ-okolí bodu x_0 při zobrazení f je částí ε-okolí bodu x'_0 [2])].

*Zobrazení f je spojité v bodě x_0 právě tehdy, jestliže splňuje podmínku: obraz **A'** každé množiny **A** blízké bodu x_0 je blízký obrazu x'_0 bodu x_0 (tj. z $\mathbf{A}\delta x_0$ plyne $\mathbf{A}'\delta x'_0$).*

Skutečně, nechť je zobrazení f spojité v bodě x_0 a nechť $\mathbf{A}\delta x_0$, tj. $\varrho(\mathbf{A}, x_0) = 0$. Potom ke každému $\delta > 0$ existuje v **A** bod x takový, že $\varrho(x, x_0) < \delta$. Bod x', na který se zobrazí x při zobrazení f patří k množině **A'** a splňuje nerovnost (jsou-li ε a δ zvoleny tak, jak uvedeno v definici spojitosti) $\varrho(x', x'_0) < \varepsilon$.

Tedy ke každému $\varepsilon > 0$ existuje v **A'** bod vzdálený od bodu x'_0 méně než ε, z čehož plyne, že $\varrho(\mathbf{A}', x'_0) = 0$, čili $\mathbf{A}'\delta x'_0$. Podmínka je tedy splněna.

Obráceně, nechť podmínka je splněna; dokážeme, že f je spojité v bodě x_0. Předpokládejme, že tomu tak není, potom pro jisté $\varepsilon_0 > 0$ neexistuje kladné číslo δ, jehož existence se požaduje v definici spojitosti. Jinak řečeno, ke každému $\delta > 0$, tedy i pro $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ existuje bod x (označme jej x_n) takový, že $\varrho(x_n, x_0) < 1/n$, ale $\varrho(x'_n, x'_0) \geqq \varepsilon_0$. Množinu všech takových bodů x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ označme **A**. Pak $\varrho(\mathbf{A}, x_0) = 0$, avšak $\varrho(\mathbf{A}', x'_0) \geqq \varepsilon_0$, tj. vztah $\mathbf{A}\delta x_0$ je splněn, zatímco vztah $\mathbf{A}'\delta x_0$ nikoli. To je však spor s podmínkou; zobrazení f je tudíž spojité v bodě x_0.

Právě dokázané tvrzení umožňuje definovat spojitost také takto: *zobrazení f metrického prostoru do metrického prostoru je spojité*[3]*), zachovává-li vztah „množina je blízká bodu". Dva prostory jsou homeomorfní, existuje-li prosté zobrazení jednoho prostoru na druhý, které je spolu se svým inversním zobrazením spojité, čili, které spolu se svým inversním zobrazením zachovává vztah „množina je blízká bodu".*

Definici topologie, která byla uvedena v kapitole 1, můžeme nyní formulovat takto:

Topologie je onou geometrickou disciplinou, která zkoumá vlastnosti množin, opírající se o geometrický pojem bodu blízkého množině. Takové vlastnosti se nazývají topologickými.

---

[2]) Viz část I tohoto článku v předcházejícím čísle, str. 266.

[3]) Poznamenáváme, že zobrazení f metrického prostoru **R** do metrického prostoru **R'** je spojité, jestliže je spojité v každém bodě x z **R**. Pozn. překl.

Topologické prostory

Na základě toho, co bylo výše řečeno, je přirozené pokusit se o definici matematického systému, v němž základním vztahem není metrika, ale vztah $\mathbf{A}\delta x$. To vede k pojmu topologického prostoru. Pojem topologického prostoru byl zaveden M. Fréchetem (Francie), F. Rieszem (Maďarsko) a F. Hausdorffem (Německo). Principiálních výsledků ve vyšetřování topologických prostorů dosáhli sovětští matematikové P. S. Uryson a P. S. Aleksandrov.

Množinu $\mathbf{R}$ libovolných prvků, zvaných body, nazýváme topologickým prostorem, jestliže pro každou její podmnožinu $\mathbf{A}$ jsou vymezeny body blízké množině $\mathbf{A}$ tak, že jsou splněny tyto podmínky, zvané axiomy topologického prostoru:

1. Bod x je blízký bodu a (tj. jednobodové množině, obsahující jen bod a) právě tehdy, je-li $x = a$.

2. Bod x je blízký sjednocení[4] *dvou množin $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ právě tehdy, je-li blízký aspoň jedné z množin $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.*

3. Je-li bod x blízký množině všech bodů blízkých množině $\mathbf{A}$, je x rovněž blízký množině $\mathbf{A}$.

Množinu všech bodů blízkých množině $\mathbf{A}$ označujeme $\overline{\mathbf{A}}$ a nazýváme uzávěrem množiny $\mathbf{A}$. Uvedený systém axiomů 1, 2, 3 lze nahradit tímto ekvivalentním systémem axiomů, který se opírá o pojem uzávěru:

I. $\bar{a} = a$ *pro libovolný bod* a,

II. $\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cup \overline{\mathbf{B}}$,

III. $\overline{(\overline{\mathbf{A}})} = \overline{\mathbf{A}}$ *(tj. uzávěr množiny* $\overline{\mathbf{A}}$ *je* $\overline{\mathbf{A}}$*).*

Z těchto axiomů lze snadno odvodit tato tvrzení: každá množina je obsažena ve svém uzávěru (což zapisujeme takto: $\mathbf{A} \subset \overline{\mathbf{A}}$). Jestliže $\mathbf{A}$ je podmnožinou množiny $\mathbf{B}$ (tj. $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$) potom $\overline{\mathbf{A}} \subset \overline{\mathbf{B}}$.

V kapitole 1 jsme se seznámili s pojmem ε-okolí bodu. Zavedeme nyní nejobecnější pojem okolí bodu. Množinu $\mathbf{U}$ nazýváme okolím bodu a v topologickém prostoru $\mathbf{R}$, není-li bod a blízký komplementu množiny $\mathbf{U}$ (komplementem množiny $\mathbf{U}$ nazýváme množinu těch bodů prostoru $\mathbf{R}$, které nepatří do $\mathbf{U}$; komplement označujeme symbolem $\mathbf{R} - \mathbf{U}$). Zřejmě bod a patří do každého svého okolí.

Bod x nazýváme vnitřním bodem množiny $\mathbf{M}$, je-li množina $\mathbf{M}$ jeho okolím. Množinu $\mathbf{G}$ nazýváme otevřenou, je-li každý její bod jejím bodem vnitřním[5].

Pojem otevřené množiny úzce souvisí s pojmem uzavřené množiny: Množina $\mathbf{F}$ se nazývá uzavřenou, jestli každý bod blízký množině $\mathbf{F}$ patří do $\mathbf{F}$. Množina $\mathbf{F}$ je tedy uzavřená, shoduje-li se se svým uzávěrem, tj. platí-li $\mathbf{F} = \overline{\mathbf{F}}$.

---

[4]) Sjednocením (též součtem) množin $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ nazýváme množinu všech bodů množiny $\mathbf{A}$ a množiny $\mathbf{B}$ (množiny $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ mohou ovšem mít společné body). Sjednocení obvykle označujeme znakem $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. Průnikem množin $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ nazýváme množinu všech bodů, ležících zároveň v obou množinách $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. Průnik označujeme znakem $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$. Sjednocení a průnik lze definovat i pro libovolný (konečný i nekonečný) systém množin.

[5]) Bod x nazýváme hraničním bodem množiny $\mathbf{M}$ prostoru $\mathbf{R}$, není-li vnitřním bodem množiny $\mathbf{M}$ ani jejího komplementu $\mathbf{R} - \mathbf{M}$. Jinak řečeno bod a je hraničním bodem množiny $\mathbf{M}$, je-li blízký oběma množinami $\mathbf{M}$ a $\mathbf{R} - \mathbf{M}$, tj. platí-li zároveň $\mathbf{M}\delta x$ a $(\mathbf{R} - \mathbf{M})\,\delta x$. Hraniční bod množiny $\mathbf{M}$ nemusí do $\mathbf{M}$ patřit; např. otevřený interval na číselné ose má dva hraniční body, které k němu nepatří. Množinu všech hraničních bodů množiny $\mathbf{M}$ nazýváme hranice množiny $\mathbf{M}$ a označujeme $\mathrm{Fr}(\mathbf{M})$.

Souvislost mezi otevřenými a uzavřenými množinami charakterisuje toto tvrzení, které se snadno dokáže: množina **G** je otevřená právě tehdy, je-li její komplement **F** = **R** — **G** uzavřenou množinou. Z toho plyne, že každému tvrzení o otevřených množinách odpovídá tvrzení („duální") o uzavřených množinách a obráceně.

Příklad duálních tvrzení:

(**F**) V každém topologickém prostoru je průnik libovolného systému uzavřených množin uzavřenou množinou. Sjednocení libovolného konečného systému uzavřených množin je uzavřenou množinou.

(**G**) V každém topologickém prostoru je sjednocení libovolného systému otevřených množin otevřenou množinou. Průnik libovolného konečného systému otevřených množin je otevřenou množinou.

Pomocí těchto dvou důležitých vzájemně duálních tvrzení lze definovat topologický prostor. Množinu **R** můžeme považovat za topologický prostor, jestliže vymezíme systém všech jejich uzavřených podmnožin (nebo systém všech jejich otevřených podmnožin). Přitom je lhostejné, které podmnožiny budeme pokládat za uzavřené (nebo otevřené), jen když bude splněno tvrzení (**F**) [pro otevřené množiny tvrzení (**G**)]. Tedy tvrzení (**F**) [nebo (**G**)] je ekvivalentní s každým ze systémů axiomů 2, 3 nebo II, III.

Uzavřené (nebo otevřené) množiny můžeme tedy použít jako základní (primární) pojmy topologie. Ukážeme ještě, jak lze pomocí uzavřených (nebo otevřených) množin charakterisovat spojitost zobrazení. Nechť f je zobrazení množiny **R** do množiny **R**′ a nechť **A**′ je podmnožinou množiny **R**′. Množinu všech bodů prostoru **R**, jejichž obraz při zobrazení f patří do množiny **A**′, nazýváme originálem množiny **A**′ (při zobrazení f). Lze dokázat, že *zobrazení topologického prostoru do topologického prostoru je spojité právě tehdy, je-li originál každé uzavřené množiny uzavřenou množinou.* (Duální věta: „*..., je-li originál každé otevřené množiny otevřenou množinou*".)

Je-li na topologickém prostoru **R** definována reálná spojitá funkce f, je každému bodu x z **R** přiřazeno reálné číslo $f(x)$; f tedy definuje (spojité) zobrazení f prostoru **R** do číselné osy. Množina **F** všech bodů x z **R**, splňujících rovnici $f(x) = 0$, jsouc originálem bodu O číselné osy, je uzavřená (neboť jednobodová množina je uzavřená— viz axiom I). V metrickém prostoru platí i obrácené tvrzení: každá uzavřená množina **F** může být určena rovnicí $f(x) = 0$, kde f je vhodná spojitá funkce (stačí f definovat např. takto: $f(x) = \varrho(\mathbf{F}, x)$).

Z našeho výkladu je zřejmé, že každý metrický prostor je zároveň topologickým prostorem. Obrácené tvrzení je nesprávné: *existují topologické prostory, které nelze metrisovat.*[6])

Problém metrisace topologických prostorů je velmi důležitý. Ve speciálním případě vyřešil tento problém sovětský matematik P. S. Uryson, o jehož pracích ještě pojednáme. Nedávno byl tento problém obecně řešen Ju. M. Smirnovem (Moskva) a japonským matematikem Nagata.

Souvislost

Je třeba přesně definovat vlastnost množiny „skládat se z jednoho kusu (být souvislou)", o které byla zmínka v 2. kapitole. Definici této vlastnosti podal F. Hausdorff.

---

[6]) To znamená, že existují topologické prostory, v nichž nelze definovat metriku tak, aby se topologie definovaná pomocí metriky shodovala s původní topologií. Jinak řečeno: existují topologické prostory, které nejsou homeomorfní se žádným metrickým prostorem. — Pozn. překl.

Říkáme, že dvě množiny **A** a **B** z **R** jsou topologicky oddělené, jestliže kterákoli z nich neobsahuje body, blízké druhé. Množina **M** se nazývá souvislá, jestliže ji nelze rozložit na dvě neprázdné, topologicky oddělené množiny, tj. jestli ze vztahů $\mathbf{M} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \neq 0$, $\mathbf{B} \neq 0$ plyne, že **A** a **B** nejsou topologicky oddělené. Lze dokázat, že interval je souvislou množinou. Odstraníme-li z intervalu kterýkoli jeho vnitřní bod x, dostaneme množinu, která již není souvislá: části intervalu ležící napravo resp. nalevo od bodu x jsou topologicky nezávislými množinami.

Pro souvislé množiny platí tato věta o spojitých funkcích: *Reálná funkce, spojitá na souvislé množině* **M**, *nabývající v bodě a z* **M** *kladné hodnoty, a v bodě b z* **M** *záporné hodnoty, nabývá nutně v některém bodě množiny* **M** *hodnoty nulové.* Důsledkem této věty je tvrzení: reálná funkce f, spojitá na souvislé množině **M**, nabývá všech hodnot mezi hodnotami $f(a)$ a $f(b)$, kde a a b jsou dva libovolné body množiny **M**. Tato věta tedy platí např. pro spojité funkce na intervalu.

Stejnoměrná spojitost

Zobrazení f metrického prostoru **R** do metrického prostoru **R**$'$ nazýváme stejnoměrně spojitým, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$ (závisící jen na ε), že obrazy libovolných dvou bodů z **R**, jejichž vzdálenost je menší než δ, mají (v **R**$'$) vzdálenost menší než ε, Poznamenejme, že se spojitosti zobrazení f obecně neplyne stejnoměrná spojitost. Např. zobrazení číselné osy Ox do číselné osy Oy, definované rovnicí $y = x^2$, je spojité (na celé číselné ose), avšak není stejnoměrně spojité. Pro libovolná dvě kladná čísla ε a δ lze totiž nalézt dvě čísla x a x' tak, že jejich vzdálenost je menší než δ, ale vzdálenost příslušných y a y' je větší než ε; stačí položit $x = \frac{\varepsilon}{\delta}$, $x' = \frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{\delta}{2}$, pak

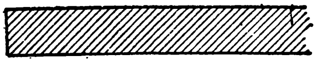
$$y' - y = \left(\frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2 = \varepsilon + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 > \varepsilon .$$

Snadno se dokáže, že *při stejnoměrně spojitém zobrazení se zobrazí dvě blízké množiny na dvě blízké množiny.* Nechť $\mathbf{A}\delta\mathbf{B}$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$; ve smyslu definice stejnoměrné spojitosti zvolme odpovídající číslo $\delta > 0$. Ježto $\varrho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$ existuje bod x z **A** a bod y z **B** tak, že $\varrho(x, y) < \delta$. Vzdálenost obrazů x' a y' bodů x a y při zobrazení f je tedy menší než ε. V množinách **A**$'$ a **B**$'$, které jsou obrazy množin **A** a **B** při zobrazení f, existují tedy (pro libovolné kladné ε) takové body x' a y', že $\varrho(x', y') < \varepsilon$, což znamená, že $\varrho(\mathbf{A}', \mathbf{B}') = 0$, tj. $\mathbf{A}'\delta\mathbf{B}'$.

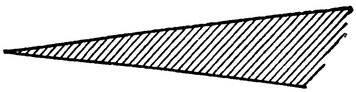
Platí i obrácená věta (i když daleko obtížněji dokazatelná): Zobrazení f, při kterém se blízké množiny zobrazí na blízké množiny, je stejnoměrně spojité. Stejnosměrně spojité zobrazení lze tedy charakterisovat jako zobrazení zachovávající blízkost množin. Z toho však neplyne, že stejnoměrná spojitost je topologickou vlastností. Topologie se totiž opírá o pojem bodu blízkého množině a nikoli o pojem dvou blízkých množin. Každou vlastnost, kterou možno formulovat pomocí pojmu blízkých množin, nazveme δ-vlastností. Stejnoměrná spojitost je tedy δ-vlastností, nikoli však topologickou vlastností.

Dvě množiny nazveme ekvimorfními, existuje-li prosté zobrazení jedné na druhou, která zachovává blízkost množin (tj. prosté zobrazení jedné na druhou, které spolu se svým inversním zobrazením je stejnoměrně spojité — tzv.

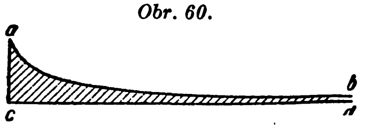
ekvimorfismus). Jsou-li dvě množiny ekvimorfní, pak jsou zřejmě i homeomorfní; obrácené tvrzení neplatí. Např. polopás (obr. 59), úhel (obr. 60) a část roviny ohraničená křivkou *ab*, její asymptotou *cd* a úsečkou *ac* (obr. 61) jsou homeomorfní, nikoli však ekvimorfní. Otevřený interval je homeomorfní, nikoli však ekvimorfní s celou číselnou osou. Rotační paraboloid je homeomorfní, nikoli však ekvimorfní s rovinou (obr. 62). V témže vztahu je eukleidovská rovina s rovinou Lobačevského.



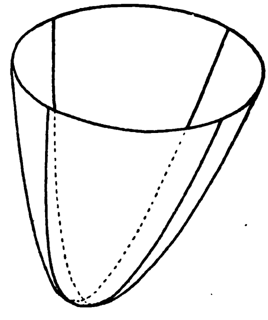
Obr. 59.



Obr. 60.



Obr. 61.



Obr. 62.

Na příklad otevřený interval není ekvimorfní s celou číselnou osou. Při libovolném zobrazení číselné osy **R** na interval **R**′ (bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jeho délka je rovna jedné) lze totiž v **R** nalézt dvě množiny, které nejsou blízké, které se však při zobrazení *f* zobrazí na množiny blízké (a tedy, je-li zobrazení *f* prosté, zobrazí se při inversním zobrazení blízké množiny na množiny, které nejsou blízké). Vezměme tři libovolná čísla celá. Protože v intervalu délky *1* neexistují tři body tak, aby vzdálenost kterýchkoli dvou z nich byla větší než $\frac{1}{2}$, lze ze zvolených tří celých čísel vybrat dvě m_1, n_1, jejichž obrazy při zobrazení *f* jsou vzdáleny o méně než $\frac{1}{2}$. Vezměme dále čtyři celá čísla různá od čísel m_1 a n_1. V intervalu délky *1* neexistují zřejmě čtyři body tak, aby vzdálenost kterýchkoli dvou z nich byla větší než $\frac{1}{3}$. Proto ze zvolených čtyř celých čísel lze vybrat dvě, označme je m_2, n_2, jejichž obrazy při zobrazení *f* jsou vzdáleny o méně než $\frac{1}{3}$. Obdobně najdeme dvě celá čísla m_3, n_3, různá od všech již zvolených čísel tak, že obrazy těchto čísel jsou vzdáleny o méně než $\frac{1}{4}$. Tak pokračujeme dále. Množina **A**, skládající se z bodů $m_1, m_2, m_3, \ldots$, a množina **B**, skládající se z bodů $n_1, n_2, n_3, \ldots$, nejsou blízké (neboť $m_1, m_2, m_3, \ldots, n_1, n_2, n_3, \ldots$, jsou vzájemně různá celá čísla). Avšak obrazy množin **A** a **B** při zobrazení *f* jsou blízké.

δ-prostory

Topologický prostor byl definován jako množina, v níž jako charakteristická byla zavedena relace „bod blízký množině“. Zkoumají se však i prostory, pro které je charakteristická relace: „množina blízká množině“; jsou to tzv. δ-prostory. Pojem δ-prostoru zavedl V. A. Jefremovič.

Množinu **R** libovolných prvků, zvaných body, nazýváme δ-prostorem, je-li pro každé dvě její neprázdné podmnožiny stanoveno, zda jsou blízké či nikoli. Předpokládáme přitom, že jsou splněny tyto podmínky, které nazýváme axiomy δ-prostoru:

1. Bod a je blízký bodu b (tj. aδb) právě tehdy, když $a = b$.

2. Množina **C** *je blízká sjednocení množin* **A** ∪ **B**, *právě když je blízká aspoň jedné z množin* **A**, **B**.

3. Nejsou-li **A** *a* **B** *blízké, pak existují takové dvě množiny* $\mathbf{A}_1$ *a* $\mathbf{B}_1$, *že* $\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{B}_1 = \mathbf{R}$ *a dále, že* $\mathbf{A}_1$, **B** *nejsou blízké a rovněž* $\mathbf{B}_1$, **A** *nejsou blízké.*

Dva δ-prostory nazýváme ekvimorfní, jsou-li isomorfní vzhledem k relaci „**A** a **B** jsou blízké" (tzv. δ-relace), tj. existuje-li prosté zobrazení jednoho na druhý, zachovávající δ-relaci.

Každý metrický prostor je zároveň δ-prostorem: je v něm totiž definována δ-relace. Dále, každý δ-prostor je topologickým prostorem, zavedeme-li relaci bodu blízkého množině takto: bod a je blízký množině **B** právě když jednobodová množina, skládající se z bodu a, je blízká k množině **B**.

5. *O pojmu čáry*

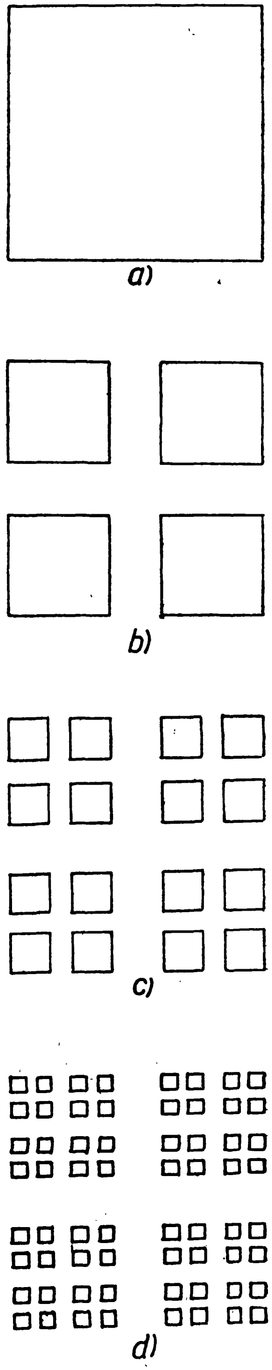
V této kapitole, vycházejíce z pojmu nejjednodušší čáry — úsečky na přímce — se pokusíme přesně vymezit třídu bodových množin, které je přirozené považovat za čáry. Ukazuje se, že k tomu lze přistoupit různými způsoby.

Jednoduchý oblouk

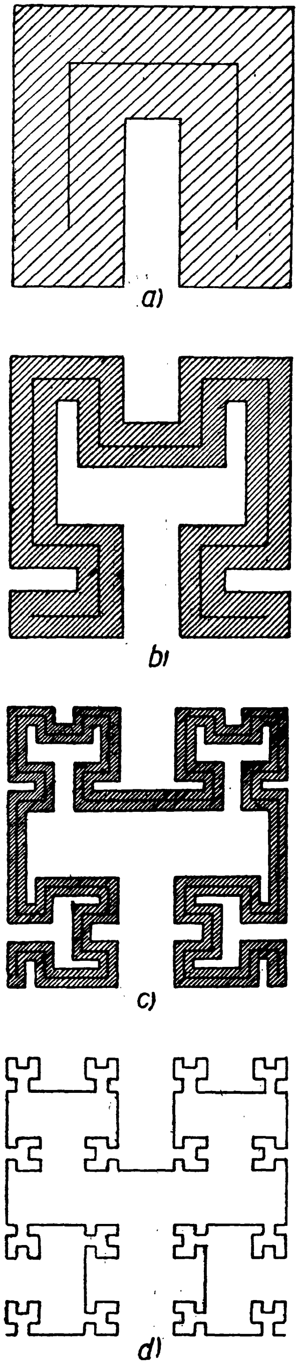
Eukleides definuje čáru jako „délku bez šířky". To ovšem není přesná matematická definice, ale spíše názorný popis těch bodových množin, které by odpovídaly představě čáry. Uvidíme dále, že takový názorný popis lze ztěží považovat za výstižný.

Je přirozené považovat pojem čáry za pojem topologický. Pak všechny bodové množiny homeomorfní s bodovou množinou, kterou jsme nazvali čarou, budou rovněž čáry. Tedy každou bodovou množinu homeomorfní s úsečkou — takové bodové množiny nazýváme jednoduchý oblouk — budeme považovat za čáru. Pojem jednoduchého oblouku je nejjednodušší abstrakcí názorného pojmu čáry. Oblouk kružnice, písmeno **M**, písmeno **N**, atd. jsou jednoduchými oblouky, zatímco písmeno **H** není jednoduchým obloukem.

Věc však není tak jednoduchá, jak by se na první pohled zdálo. Lze libovolný jednoduchý oblouk považovat za „délku bez šířky", tj. za bodovou množinu, jejíž (plošný) obsah je nulový? Odpověď na tuto otázku je záporná. I když se to zdá nepravděpodobným, existuje v rovině takový prostý oblouk (tj. „čára"!), jehož (plošný) obsah je nenulový!



Obr. 63.



Obr. 64.

Ukážeme, jak je možno sestrojit takový jednoduchý oblouk.

V rovině uvažujme čtverec (obr. 63a—d), jehož obsah je roven jedné (obr. 63a). Z tohoto čtverce „vystřihneme" kříž (obr. 63b) takové šířky, aby jeho obsah byl roven $\frac{1}{4}$ (snadným výpočtem zjistíte, že šířka kříže musí být rovna $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$). Zbudou tak čtyři menší čtverce; to je první krok naší konstrukce. Z každého ze zbylých čtyř čtverců vystřihneme opět kříž (obr. 63c) tak, že obsah všech vystřižených křížů bude roven $\frac{1}{8}$. Zbude tak 16 menších čtverců (to je druhý krok konstrukce). Z každého z těchto 16 čtverců vystřihneme znovu kříž tak, aby jejich úhrnný obsah byl roven $\frac{1}{16}$ (to je třetí krok); tak pokračujeme dále. Při dalších krocích získáváme čtverce menších a menších rozměrů. Mohlo by se tedy zdát, že úhrnný součet obsahů zbylých čtverců se bude blížit k nule. Avšak není tomu tak: *po libovolném počtu kroků úhrnný obsah zbylých čtverců není nikdy menší než $\frac{1}{2}$.*

Při prvním kroku jsme totiž odstranili z daného čtverce bodovou množinu o obsahu $\frac{1}{4}$, při druhém kroku bodovou množinu o obsahu $\frac{1}{8}$ atd. Obsah zbývajících čtverců je po prvním kroku roven $1 - \frac{1}{4}$, po druhém kroku $1 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{8})$ atd. Součet členů v závorce nemůže při žádném z dalších kroků překročit $\frac{1}{2}$, neboť $\frac{1}{2}$ je právě součet nekonečné geometrické řady $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ Bodová množina **A**, která zbude po provedení všech (nekonečně mnoha) kroků, má neobyčejné vlastnosti. Jakoby se rozpadala na jednotlivé body (zbývající čtverce se dalšími kroky zmenšují) a přesto má kladný plošný obsah.

Popsali jsme konstrukci množiny **A**, která je zde výsledkem procesu o nekonečně mnoha krocích. Množina **A** se skládá tedy ze všech bodů x základního čtverce takových, že nepatří do žádného z vystřižených křížů. Pomocí pojmu průniku množin můžeme definici množiny **A** formulovat též takto: označme $\mathbf{A}_n$ bodovou množinu, která zbude ze základního čtverce po n krocích. Pak **A** je **průnikem** všech množin $\mathbf{A}_n$, to znamená, že bod x základního čtverce náleží do **A** právě když patří do všech $\mathbf{A}_n$ (zapisujeme to takto: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \cap \mathbf{A}_3 \cap \dots$ nebo $\mathbf{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n$).

Čáru, mající kladný obsah, získáme tak, že sestrojíme jednoduchý oblouk, který **prochází** všemi body množiny **A**. Protože tento jednoduchý oblouk obsahuje všechny body množiny **A**, nebude jeho obsah menší než $\frac{1}{2}$.

Přejdeme nyní ke konstrukci naší čáry (obr. 64a—d). Pomocí čtyř čtverců, zbylých po prvním kroku, sestrojíme pás, znázorněný v obr. 64a. Přecházejíce od obr. 64a k obr. 64b jsme sestrojili užší pás, který obsahuje všechny čtverce zbylé po druhém kroku. Pozměňme dále obrazec tak (obr. 64c), aby šířka pásu byla rovna délce strany čtverce po třetím kroku a aby obsahoval tento pás všechny čtverce zbylé po třetím kroku. Takto postupujeme dále obr. 64d.

Pás vzniklý po n-tém kroku označme $\mathbf{B}_n$. Tento pás je obsažen ve všech předcházejících pásech a obsahuje množinu $\mathbf{A}_n$ (a tedy i množinu **A**). Průnik všech pásů $\mathbf{B}_n$ označme **B**, tedy $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2 \cap \mathbf{B}_3 \cap \ldots$, čili $\mathbf{B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{B}_n$. Množina **B** zřejmě obsahuje množinu **A**. Všimneme-li si postupných konstrukcí jednotlivých pásů $\mathbf{B}_n$ (obr. 64), můžeme se názorně přesvědčit o tom (to se dá samozřejmě dokázat naprosto přesně), že **B** je „velmi klikatým" jednoduchým obloukem.

Konstruovaný oblouk **B** má kladný (plošný) obsah[7]) a nemůže být tedy považován za „délku bez šířky".

Trajektorie

Často se popisuje čára názorně takto: „čára je stopa pohybujícího se bodu". Tento popis nás vede k pojmu trajektorie.

Při tomto popisu čáry vycházíme z jiné myšlenky: čára se nepovažuje pouze za bodovou množinu, ale za uspořádanou množinu bodů. Je totiž rozhodující, v jakém pořadí proběhl pohybující se bod jednotlivými polohami. Jestliže např. pohybující se bod probíhá dráhu tvaru písmene Φ dvěma různými způsoby, schematicky znázorněnými na obr. 65 (plně je vyrýsována ta část dráhy, kterou pohybující se bod již proběhl, a čárkovaně je vyznačena ta část, která bude ještě proběhnuta), je množina všech poloh, kterými pohybující se bod proběhl, v obou případech stejná, avšak bod probíhá v případech a) a b) těmito polohami v různém pořadí. Jinak řečeno, trajektorie pohybujícího se bodu jsou různé, třebaže se skládají ze stejných bodů.

Přistoupíme k přesné definici pojmu dráhy. Předpokládejme, že v topologickém nebo metrickém prostoru **R** (např. v rovině nebo v trojrozměrném prostoru) se spojitě „pohybuje" bod, a to od časového okamžiku $t = 0$ do časového okamžiku $t = 1$. To znamená, že v každém okamžiku $t (0 \leqq t \leqq 1)$ známe polohu x_t pohybujícího se bodu; při tom předpokládáme, že bod x_t se pohybuje spojitě. Jinak řečeno: každé hodnotě t z intervalu $0 \leqq t \leqq 1$ je přiřazen bod x_t prostoru **R**, neboli je definováno zobrazení intervalu $[0,1]$

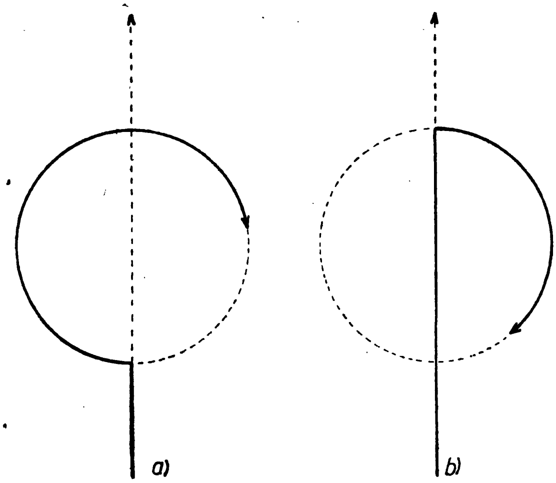
[7]) Podtrhujeme, že důkaz uvedených vlastností množiny **B** jsme tímto neprovedli. Pojem obsahu se v geometrii definuje jen pro nejjednodušší útvary; není tudíž předem jasné, zda lze obecně hovořit o obsahu složitých bodových množin, jako jsou např. **A** nebo **B**. Je tedy třeba zpřesnit a rozšířit pojem obsahu. Dále při odstranění konečného počtu částí jisté bodové množiny dostaneme obsah zbylé části, odečteme-li od obsahu výchozí množiny součet obsahů odstraněných částí; jde o to, zůstává-li tato vlastnost zachována i při odstranění nekonečně mnoha částí? Konečně je také třeba dokázat, že množina **B** je skutečně jednoduchým obloukem a že z toho, že obsahuje množinu **A**, plyne, že její obsah není menší, než obsah množiny **A**. Vidíme tedy, že úplná a rigorósně provedená konstrukce takovéhoto příkladu (a také příkladů, o nichž bude pojednáno dále) vyžaduje složitějších úvah.

do prostoru **R**, které je spojité (předpokládáme, že bod x_t se pohybuje spojitě). Takové zobrazení nazýváme trajektorií.

Můžeme tedy vyslovit tuto definici:

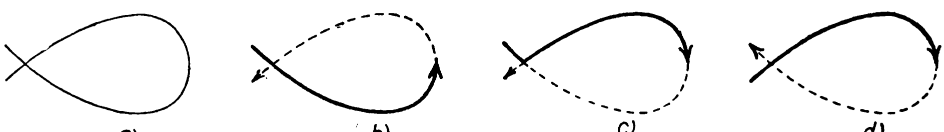
Označme písmenem I „jednotkový“ interval [0,1]; *každé spojité zobrazení intervalu I do prostoru* **R** *nazýváme trajektorií v prostoru* **R**.

Pojem trajektorie má důležitou úlohu v topologii; podrobně se jím budeme zabývat v kapitolách 7.—11.[8]) Zde se budeme tímto pojmem zabývat z hlediska zobecňování pojmu čáry. Pojímání čáry jakožto trajektorie má své výhody; můžeme např. vyšetřovat čáry, které samy sebe protínají (viz obr. 66a). Každou čáru, která se protíná, můžeme považovat za několik různých trajektorií (obr. 66b, c, d).



Obr. 65.

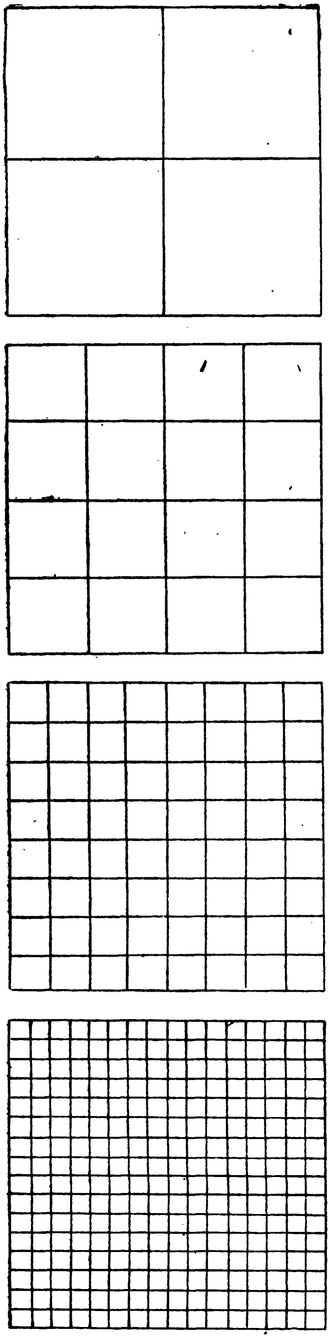
Nesmíme se však domnívat, že pojem trajektorie je zcela názorný a jednoduchý. Především je jasné, že každý jednoduchý oblouk lze pojímat jako trajektorii (neboť prostý oblouk získáme homeomorfním, tj. spojitým zobrazením úsečky). Z toho vyplývá, že „stopa pohybujícího se bodu“, tj. trajektorie může procházet všemi body množiny, která má nenulový obsah. Ba více, sestrojíme nyní trajektorii, která vyplňuje čtverec, což znamená, že prochází každým bodem čtverce. (Jinak řečeno, existují spojitá zobrazení úsečky na čtverec.) Takové trajektorie se nazývají Peanovými křivkami.



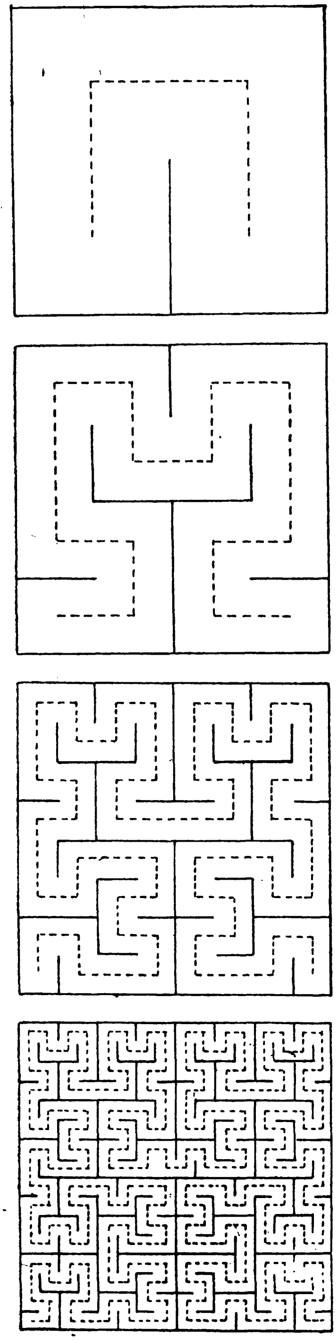
Obr. 66.

Peanovu křivku získáme analogickým postupem, jako bylo ukázáno z obr. 64, jenže příslušné pásy vezmeme tak široké, aby vyplňovaly celý čtverec. Tyto pásy jsou znázorněny na obr. 68. Získáme je takto: Úsečkami rozdělíme základní čtverec na 4, 16, 64, 256 ... stejných čtverců (obr. 67) a potom vhodné strany vzniknuvších malých čtverců odstraníme tak, abychom dostali „klikatý“ pás vyplňující celý čtverec („labyrint“). Čárkovaně jsou vyznačeny „středné“ těchto pásů. Tyto „středné“ mají analogický charakter, jako pásy, zobrazené na obr. 64. Dalšími kroky této konstrukce získáme „klikatější“

8) Tyto kapitoly budou otištěny v dalších číslech našeho časopisu.



Obr. 67.



Obr. 68.

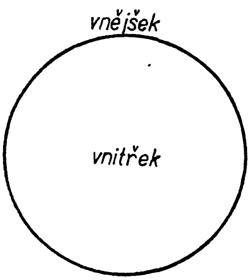
„středné“ těchto pásů. Limitním případem těchto „středných“ je trajektorie, vyplňující celý čtverec.

Provedené úvahy mají pouze popisný ráz a vyžadují rigorosního provedení. Poznamenejme ještě, že získaná „čára“ (Peanova křivka) není jednoduchým obloukem: v nekonečně mnoha bodech sama sebe protíná (tj. v daném čtverci existuje nekonečně mnoho takových bodů, kterými daná trajektorie prochází víckrát; jinak řečeno, toto spojité zobrazení není prosté).

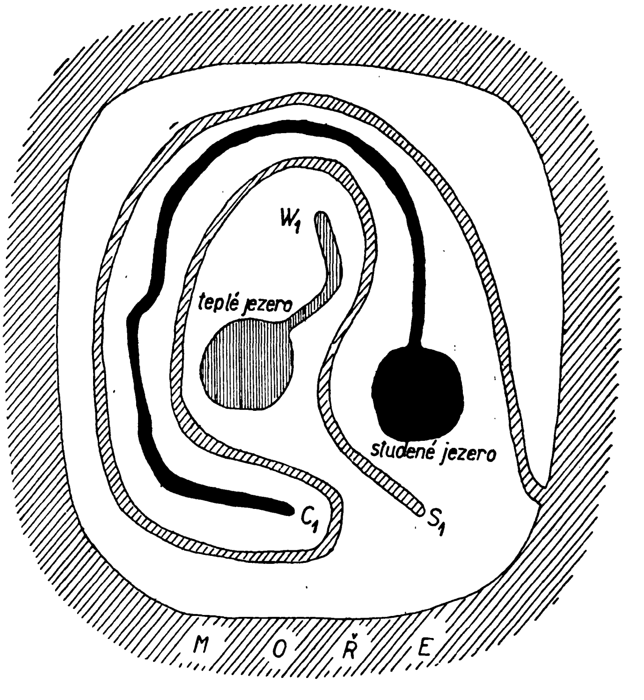
Cantorovy křivky

Eukleides popisuje také čáru jako „kraj plochy“. Takový popis není vhodný, prostože pojem plochy je složitější než pojem křivky a definovat jednodušší pojem pomocí složitějšího není účelné. Je ovšem možné pokusit se (s omezením na rovinné křivky) považovat křivky za hranice otevřených množin v rovině, tj. za „plochy“ vzít všechny otevřené množiny v rovině. Tato definice se skutečně ukazuje užitečnou. Hned však uvidíme na příkladech, že i tato definice čáry má řadu neočekávaných důsledků.

Z názoru bychom řekli, že každý úsek čáry „rozděluje“ rovinu na tomto úseku, tj. že rovina se přimyká k čáře „ze dvou stran“. Např. kružnice rozděluje rovinu na dvě části (vnitřní a vnější) a „hranicí“ každé z těchto oblastí je právě tato kružnice (obr. 69). Říkáme, že kružnice je společnou hranicí těchto oblastí. Obecně říkáme, že čára $\mathbf{A}$ je společnou hranicí dvou otevřených množin $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$ jsou-li splněny tyto dvě podmínky:



Obr. 69.

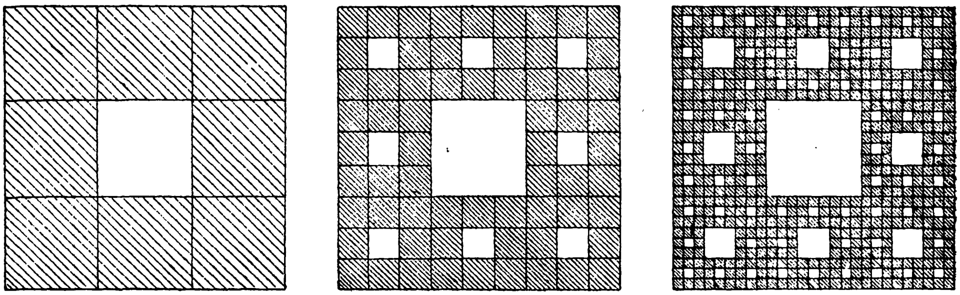


Obr. 70.

1. Čára $\mathbf{A}$ odděluje oblasti $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$, jestliže každý prostý oblouk, spojující libovolný bod oblasti $\mathbf{G}_1$ s libovolným bodem oblasti $\mathbf{G}_2$, protíná čáru $\mathbf{A}$.

2. Oblasti $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$ se přimykají k čáře $\mathbf{A}$, což znamená, že ke každému bodu x čáry $\mathbf{A}$ existují jak v oblasti $\mathbf{G}_1$, tak v oblasti $\mathbf{G}_2$ body libovolně blízké bodu x.

Z názoru by se zdálo zřejmým, že čára v rovině nemůže být hranicí více než dvou oblastí. To však není pravda: zde nás intuice klame. Ukážeme hned, že *existují takové čáry, které jsou společnou hranicí tří (i více) oblastí v rovině.* Takové čáry rozdělují rovinu na tři oblasti, z nichž každá se této čáře přimyká. Konstrukce takových čar je spjata se jménem japonského matematika Wada. Popíšeme jednu takovou konstrukci (podtrhujeme ještě jednou: popíšeme, ale neprovedeme přesně) podobnou té, která byla v r. 1917 vypracována



a) b) c)

Obr. 71.

japonským matematikem Yoneyamou. Představme si ostrov, na němž jsou dvě jezera: v jednom je voda teplá a v druhém studená. Představme si dále, že k rozvedení vody z těchto jezer a z moře po ostrově se staví síť kanálů podle tohoto schématu: první den se staví kanál od teplého jezera, aby se nikde nedotýkal ani studeného jezera, ani moře a aby každý bod souše nebyl dále od teplé vody než 1 délkovou jednotku (obr. 70). Koncový bod tohoto kanálu označme W_1. Druhý den se staví kanál, vycházející ze studeného jezera opět tak, aby jeho voda nepřišla ve styk ani s mořskou, ani s teplou vodou a aby každý bod souše nebyl od studené vody vzdálen o více než 1. Koncový bod tohoto kanálu označme C_1. Třetí den postavíme obdobný kanál vycházející z moře; jeho koncový bod označme S_1. Po prvních třech dnech bude vzdálenost libovolného bodu souše ke kterékoli z uvažovaných vod menší než jedna.

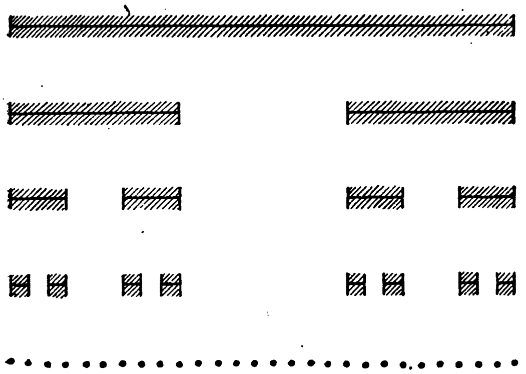
Následující tři dny pokračujeme ve stavbě, vycházejíce od bodů W_1 resp. C_1 resp. S_1, a to tak, aby po třech dnech síť kanálů byla taková, že libovolný bod souše je od kterékoli z uvažovaných vod vzdálen o méně než $\frac{1}{2}$. V následujících třech dnech hustotu sítě opět zvýšíme tak, aby z libovolného bodu souše byla vzdálenost k libovolné z vod menší než $\frac{1}{4}$ atd.

Nyní můžeme takto pokračovat dále, když odpovídajícím způsobem budeme kanály zužovat; po každém dnu bude souš tvořit souvislý kus, na kterém je možno následující den vytvořit ještě hustší síť kanálů.

Budeme-li takto neomezeně pokračovat, dospějeme konec konců (v limitě) k všude husté síti kanálů teplé, studené a mořské vody, takové, že tyto vody se nikde neslévají. To, co zbude po tomto procesu ze souše, bude čarou, jejíž každý bod bude libovolně blízko k teplé, studené a mořské vodě. Jinak řečeno, této čáře se budou přimykat tři oblasti: teplé jezero a kanál z něho vycházející, studené jezero a kanál z něho vycházející a moře a kanál z něho vycházející.

Přestože vzniklý útvar má podivné vlastnosti, považujeme jej za **čáru** v tom smyslu, že je „hranicí rovinné oblasti".

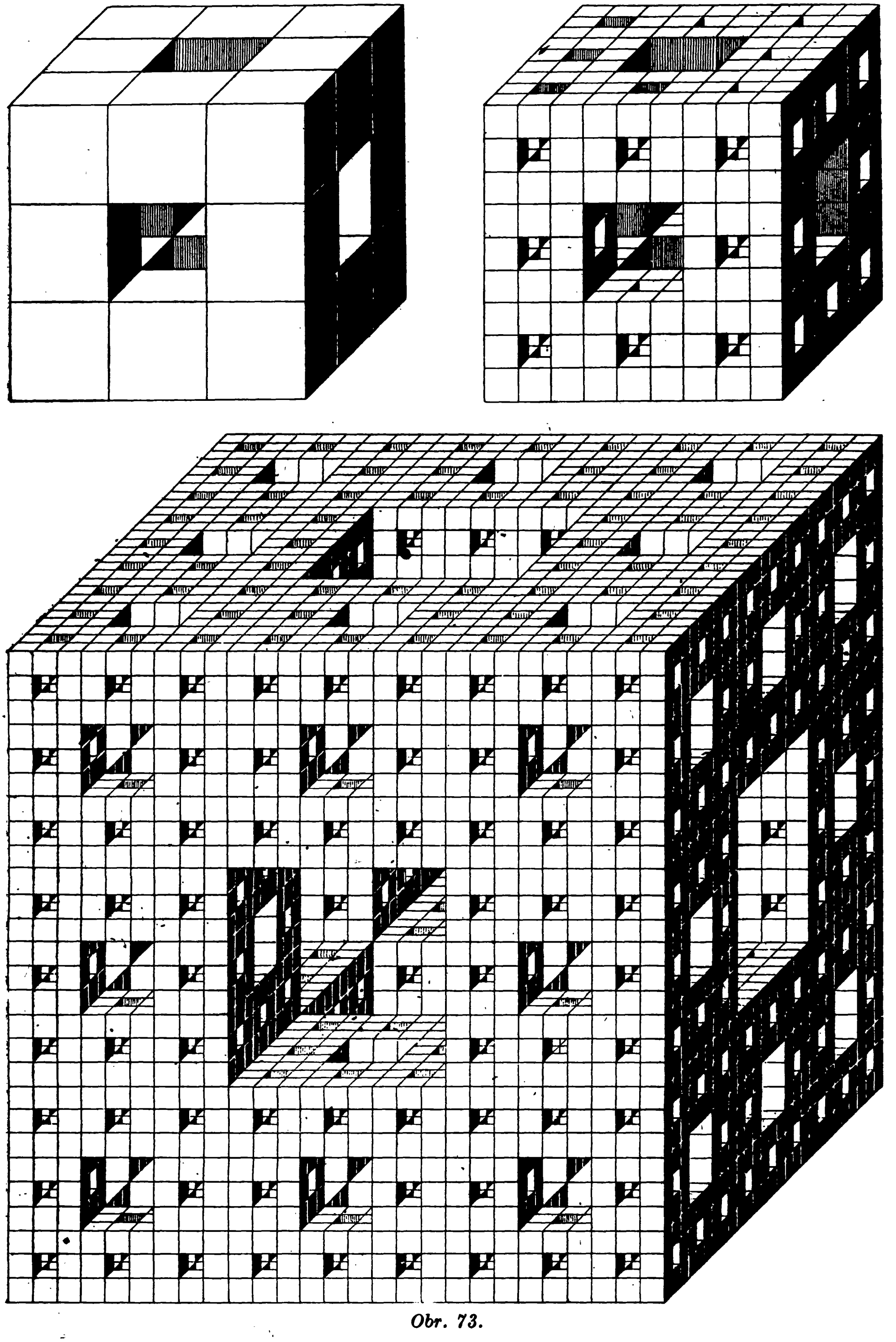
Uvedené příklady ukazují, že čáry takto obecně pojímané, jsou velmi složitými útvary. První vyhovující matematickou definici zobecněné čáry podal (pouze pro **rovinné** čáry) významný německý matematik G. Cantor[9]), který je zakladatelem teorie množin. Abychom mohli přistoupit ke cantorovské definici čáry, zavedeme ještě tento důležitý pojem: každou množinu v rovině, která je **uzavřená, souvislá a omezená** (poslední vlastnost znamená, že celá množina leží uvnitř kružnice s dostatečně velkým poloměrem), nazýváme **rovinným kontinuem**. Předpokládáme při tom ještě, že kontinuum obsahuje více než jeden bod (tj. jednobodovou množinu nepočítáme mezi kontinua). Otevřený interval (který není uzavřenou množinou), parabola (což je zřejmě množina bodů která není omezená), množina skládající se z bodů dvou soustředných kružnic (množina nikoli souvislá), nejsou kontinua. Kružnice, kruh, trojúhelník, množina **B** (obr. 64), *Wadova* čára mohou sloužit jako příklady kontinua.. Zřejmě tedy každé kontinuum nebudeme považovat za čáru. Např. kruh nelze považovat za čáru. Právě tak množinu, ležící v rovině a mající vnitřní body nemůžeme považovat za čáru. *Cantorovskou křivkou nazýváme takové rovinné kontinuum, které (jakožto množina bodů v rovině) neobsahuje vnitřní body.* Jinak řečeno kontinuum **X** nazýváme Cantorovou křivkou, jestliže libovolně blízko každého jeho bodu existují body nepatřící ke kontinuu **X**. To znamená, že hranicí množiny, která je komplementem (vzhledem k celé rovině) kontinua **X**, je právě kontinuum **X**. Je tedy každá Cantorova křivka takovým kontinuem, které je hranicí vhodné otevřené množiny v rovině. V tomto smyslu odpovídá tato definice představě čáry jakožto „kraje plochy".



Obr. 72.

Zároveň probereme ještě příklad Cantorovy křivky, kterou sestrojil polský matematik Sierpiński (obr. 71). Rozdělme čtverec na devět stejných čtverců a uvažujme množinu, která vznikne odstraněním prostředního čtverce (obr. 71a). Tato množina se skládá z osmi čtverců, z nichž každý opět rozdělíme na devět stejných čtverců; zde opět vždy odstraníme prostřední čtverec (obr. 71b). Tutéž operaci provedeme v každém ze zbývajících malých čtverců (obr. 71c).

[9]) V souvislosti s uvedením jména Cantor poznamenejme ještě, že konstrukce znázorněné na obr. 63, 64, 68 a 71 jsou založeny na společném principu. Tímto obecným principem je tzv. cantorovský proces postupného odstraňování částí. Východiskem všech těchto konstrukcí je Cantorovo diskontinuum. Získáme je, odstraníme-li z intervalu [0,1] střední třetinu, načež ze zbývajících dvou intervalů opět odstraníme střední třetiny a takto neomezeně pokračujeme (obr. 72). Cantorovo diskontinuum má mnoho důležitých vlastností a používá se ho často v konstrukcích a důkazech.



Obr. 73.

Tímto způsobem pokračujeme neomezeně dále, čímž v limitě dostaneme čáru **C** (tzv. Sierpińského koberec).

Množina **C** je význačná tím, že je jakousi universální rovinnou křivkou. Platí totiž tato věta:

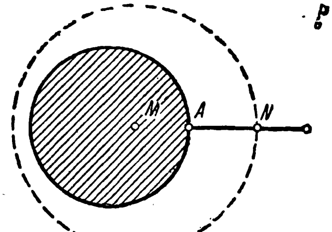
K jakékoli Cantorově křivce **K** *existuje podmnožina množiny* **C** *homeomorfní s* **K**. Obrazně řečeno lze každou Cantorovou křivku po patřičném „protáhnutí a ohnutí" (bez přetržení a slepování) považovat za část množiny **C**.

Zřejmě nikoli každou čáru lze považovat za část množiny **C**. V kapitole 2. jsme se setkali s příkladem čáry, která není rovinná[10]), tj. kterou nelze považovat za část roviny a tím méně za část množiny **C**. Dá se ukázat, že v prostoru existuje množina **D** svou strukturou připomínající množinu **C**, do které lze vložit libovolnou čáru v nejobecnějším slova smyslu, přičemž množina **D** sama je takovou zobecněnou čarou. Konstrukce množiny **D** (tak jak byla popsána rakouským matematikem K. Mengerem) je schematicky znázorněna na obr. 73. V čem tedy spočívá „nejobecnější" pojem čáry? Přejdeme nyní k objasnění této otázky.

Urysonovy čáry

Cantorova definice čáry není „vnitřní", to znamená, že podle této definice nelze rozhodnout, zda daná množina je či není čarou. Tato definice se opírá nikoli jen o vlastnosti množiny, kterou chceme nazvat čarou, ale také o to, jakým způsobem je tato množina vnořena do roviny; kromě toho se týká pouze rovinných čar. Jakmile přejdeme k vyšetřování čar vnořených do prostoru, ztrácí všechny předcházející úvahy smysl. V prostoru totiž je „hranicí oblasti" (tj. hranice nějaké části prostoru) nikoli čára, ale plocha[11]). Jak tedy definovat pojem čáry v prostoru? Je možno podat „vnitřní" definici čáry, tj. takovou definici, která nepředpokládá vnoření čáry do nějaké množiny v rovině nebo v prostoru?

Od Eukleida pochází ještě tento popis čáry: „zatímco plocha je útvar dvourozměrný, je čára útvarem jednorozměrným, bod je útvarem bezrozměrným". Můžeme se tedy pokusit o takovouto obecnou definici čáry: *čára je jednorozměrnou bodovou množinou* (popř. jednorozměrným kontinuem). Takováto definice však zůstává prázdnou, dokud nemáme k disposici matematicky přesnou definici pojmu dimense (rozměru).



Obr. 74.

Definovat pojem dimense se pokusila řada matematiků, zejména Poincaré, Brouwer, Lebesgue. Principiálních výsledků v tomto směru dosáhl znamenitý sovětský matematik P. S. Uryson (zemřel v roce 1924 ve věku 26 let). Uryson nejen nově (odlišně od Lebesguea-Brouwera) definoval pojem dimense, ale vypracoval i novou hlubokou matematickou teorii — teorii dimense. Jím poprvé byl úplně vyřešen problém definice čáry. Teorie dimense se rozvíjí i v současné době jako jedna z hlavních odvětví topologie. Dotkneme se nyní několika otázek tohoto vědního odvětví.

---

[10]) Viz část I tohoto článku v předcházejícím čísle, str. 272.

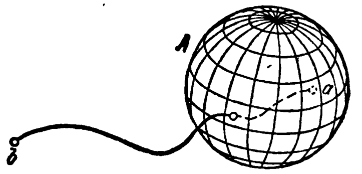
[11]) Bylo by možno pokusit se definovat čáru v prostoru tímto postupem: Plocha je hranicí prostorové oblasti a čára je hranicí „oblasti na ploše" (na tom spočívá na str. 408 uvedený Eukleidův popis „čáry"). Tento postup by byl nevyhovující. Podle takovéto definice by totiž bod nebo kruh patřil mezi čáry (neuvádíme zde příklady, dokazující tento fakt).

6. Dimense

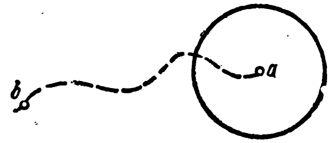
Uvažujme bodovou množinu znázorněnou na obr. 74; tato množina je sjednocením množiny všech bodů kruhu, úsečky a bodu P. V okolí bodu M je tato množina dimense 2, v okolí bodu N je dimense 1; bod P je isolovaným bodem množiny a tedy v bodě P je množina dimense 0. Různé části množiny tedy mohou být různé dimense.

Urysonova (induktivní) definice dimense

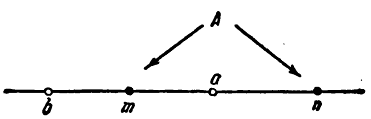
Dimensi množiny v některém jejím bodě zavedeme pomocí pojmu roztínání prostoru (množiny). Říkáme, že množina **A** roztíná prostor **X** mezi body a a b, jestliže neexistuje souvislá podmnožina prostoru **X**, která obsahuje body a a b a má neprázdný průnik s množinou **A**. Např. kružnice v rovině **X** roztíná rovinu mezi kterýmkoli jejím vnitřním a kterýkoli vnějším bodem.



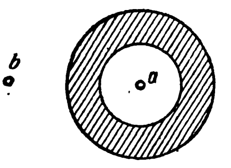
Obr. 75.



Obr. 76.



Obr. 77.



Obr. 78.

Stejně tak kulová plocha roztíná prostor mezi každým jejím vnitřním a vnějším bodem. Množinu, znázorněnou na obr. 74, roztíná bod A mezi body M a N. *Prostory dimense 3 lze tedy roztínat pomocí prostorů dimense 2* (např. pomocí kulových ploch, viz obr. 75); z názoru je patrné, že množina dimense 1 nemůže trojrozměrný prostor roztínat mezi žádnými jeho dvěma body (neboť můžeme od bodu k bodu „přejít“ tak, že „obejdeme“ čáru v prostoru). Rovinu (která je množinou dimense 2) lze mezi kterýmikoli jejími dvěma body a, b rozetnout čarou (na př. kružnicí, obr. 76), tj. množinou dimense 1. Konečně přímku (tj. množinu dimense 1) roztíná mezi kterýmikoli jejími dvěma body a, b množina **A**, která se skládá ze dvou bodů m a n (obr. 77), tj. množina dimense 0.

V množině dimense n ($n = 1, 2, 3$) lze tedy konstruovat roztínání pomocí množin dimense ($n - 1$), tj. množinami, které mají dimensi o jednotku nižší. Je ovšem možné konstruovat roztínání množiny dimense n také množinami dimense n (např. v rovině, tj. množině dimense 2 je možné konstruovat roztínání mezi body a a b množinou vnitřních bodů jistého mezikruží, tedy také množinou dimense 2 (obr. 78), ale množinami dimense menší než $n - 1$ se to nemůže podařit (např. prostor nelze roztínat mezi dvěma body množinou dimense 1).

Vzniká tak myšlenka (která byla podrobně propracována Urysonem) definovat množiny dimense 1 (čára) pomocí množin dimense 0 a potom definovat pomocí množin dimense 1 množiny dimense 2. Pomocí těchto zase definovat množiny dimense 3.[12])

Budeme nejprve definovat množiny dimense 0. Říkáme, že *množina* **X** *je dimense 0, jestliže neexistuje žádná její souvislá podmnožina, obsahující více než jeden bod.* Zhruba řečeno množina je dimense 0, jestliže se jakoby „rozpadá“ na jednotlivé, vzájemně nesouvisející body. Např. bod je množinou dimense 0. Množina konečného počtu bodů je dimense 0. Existují množiny dimense 0, mající nekonečně mnoho bodů. Např. množina **A**, popsaná na začátku kap. 5 (str. 404), je dimense 0.

Definovali jsme množinu dimense 0; můžeme nyní definovat množiny dimense 1. Potom budeme definovat množiny dimense 2 a obecně na základě definice množiny dimense n — 1 budeme definovat množiny dimense n.

Nechť bod a patří do množiny **X**. Podle P. S. Urysona je množina **X** v bodě a dimense n, jsou-li splněny tyto podmínky:

1. v libovolném okolí **U** *bodu a, které celé patří do množiny* **X**, *existuje množina* **A** *dimense n — 1, která roztíná množinu* **X** *mezi bodem a a kterýmkoli bodem nepatřícím do* **U**;

2. v dostatečně malém okolí **U** *není možné takové roztínání množinou dimense menší než n — 1.*

Dále, jestliže množina **X** je v některých bodech dimense n a v žádném bodě není dimense větší než n, říkáme, že množina je dimense n.

Víme-li tedy, jaké množiny jsou dimense menší než n, můžeme definovat množiny dimense n. To je Urysonova definice dimense.

Objasníme tuto definici na příkladech.

Přímka je dimense 1; není množinou dimense 0 (neboť existují její souvislé podmnožiny, které obsahují více než jeden bod) a roztínání přímky je možné pomocí množin dimense 0 (obr. 77). Analogicky je rovina dimense 2, prostor dimense 3 (o roztínání v rovině a v prostoru jsme hovořili již dříve, obr. 76 a 75).

Množina, znázorněná obr. 74, obsahuje body, ve kterých je dimense 2, 1 nebo 0 (body M, N, P). Tato množina je tedy dimense 2. Na tomto příkladě ukážeme smysl druhé podmínky. Budeme uvažovat dostatečně velké okolí **U** bodu M (za toto okolí můžeme považovat např. všechny body množiny **X**, které leží uvnitř kružnice vyznačené na obrázku čárkovaně), pak existuje množina dimense 0, která roztíná množinu **X** mezi M a libovolným bodem vně okolí **U** (takovou množinou je např. množina s jediným prvkem — bodem A). Odtud však nevyplývá, že množina **X** je v bodě M dimense 1, neboť v dostatečně malém okolí bodu M neexistuje množina dimense 0, která by roztínala **X** mezi bodem M a libovolným bodem z **X** ležícím vně tohoto okolí; taková množina musí být alespoň dimense 1.

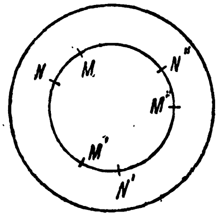
Množiny konstruované L. S. Pontrjaginem

Uvažujme mezikruží; víme, že slepením každých dvou koncových bodů téhož průměru na vnitřní kružnici dostaneme Moebiův list[13]). Proveďme nyní

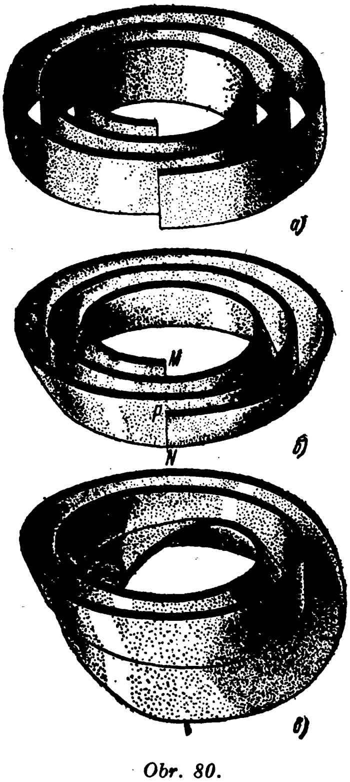
[12]) Poznamenejme, že v matematice jsou vyšetřovány množiny dimense větší než 3, dokonce množiny nekonečně-dimensionální; tyto množiny jsou významné nejen v matematice, ale i v mnoha partiích soudobé fysiky. Řekli jsme (kap. 3), že v čtyřrozměrném eukleidovském prostoru může být vnořena projektivní rovina (nebo jiná jednostranná plocha) aniž by sama sebe protínala. Prostory, které mají více než tři rozměry, nelze však názorně modelovat a proto se o nich v tomto článku nezmiňujeme.

[13]) l. c. 10, str. 279.

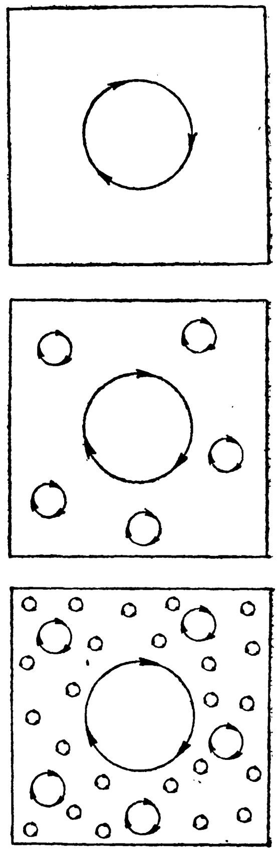
slepování bodů jinak: budeme slepovat každé tři body, které jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka, vepsaného do vnitřní kružnice uvažovaného mezikruží (obr. 79). Takto vzniklou množinu nazýváme Moebiovým listem modulu 3. Tuto množinu můžeme popsat také takto (obr. 80): uvažujme pás svinutý podle obr. 80a a slepme jeho dolní okraje v jedinou kružnici (obr. 80b). Slepíme-li nyní úsečky PN a MN, dostaneme množinu homeomorfní s Moebiovým listem modulu 3 (toto poslední slepení můžeme provést např. spojením bodů M a P „pod" dříve získanou kružnicí, obr. 80c). Můžeme takto slepovat ne tři, ale každé čtyři, pět ... bodů, které dělí vnitřní kružnici mezikruží na stejné oblouky: dostaneme množiny, nazývané Moebiovými listy modulu 4, modulu 5 atd. Moebiův list libovolného modulu p má kraj, který je homeomorfní s kružnicí (vnější kružnice



Obr. 79.



Obr. 80.


Obr. 81.

mezikruží ze kterého vzniká Moebiův list modulu p; na obr. 80c je tištěn silnou čarou). Moebiovým listem modulu p je možné zalepit otvor v ploše[14]) Tak jako v kap. 3 je snadné dokázat, že zalepení kruhového otvoru Moebiovým listem modulu p je ekvivalentní se slepením každých p bodů okraje, které dělí kružnici na p stejných oblouků.

Uvažujme nyní čtverec s otvorem tvaru kruhu, rozdělme tuto kružnici na p stejných oblouků a slepme je (tj. zalepme otvor Moebiovým listem modulu p). Potom vyřežme ještě několik kruhových otvorů a slepme stejně jejich kraje (tj. zalepme tyto otvory Moebiovým listem modulu p). Potom znovu vyřežme

[14]) Tamtéž, str. 283.

několik otvorů a zalepme je Moebiovými listy (stále stejného modulu p) atd. (obr. 81). Pokračujme v této konstrukci neomezeně tak, aby vyřezávané otvory a Moebiovy listy, kterými je zalepujeme, byly menší a menší a neustále hustěji vyplňovali čtverec. Množinu, kterou dostaneme po nekonečně mnoha krocích, označme $\mathbf{F}_p$. To je množina sestrojená Pontrjaginem.

Lze dokázat, že pro libovolné $p = 2, 3, 4, \ldots$ je $\mathbf{F}_p$ dimense 2. Pozměňme nyní konstrukci tak, že některé z vyříznutých otvorů budeme zalepovat Moebiovým listem modulu p a ostatní Moebiovým listem modulu q tak, aby i Moebiovy listy modulu p i Moebiovy listy modulu q neustále hustěji zaplňovaly výchozí množinu. Množinu, kterou dostaneme po nekonečně mnoha krocích, označme $\mathbf{F}_{p,q}$. Ukazuje se, že množina $\mathbf{F}_{p,q}$ je dimense 1, jestliže čísla p a q jsou nesoudělná. Např. budeme-li provádět popsanou konstrukci zalepováním otvorů Moebiovými listy modulu 3, dostaneme množinu dimense 2 (tj. $\mathbf{F}_3$); tentýž případ nastane, použijeme-li k zalepování Moebiovými listy modulu 4 (množina $\mathbf{F}_4$). Budeme-li však vlepovat střídavě Moebiovy listy modulu 3 a modulu 4, pak výsledná množina $\mathbf{F}_{3,4}$ bude najednou dimense 1. Jak uvidíme dále (kap. 8) základem tohoto udivujícího jevu jsou hluboké zákonitosti algebraické.

Lebesgueova - Brouwerova definice dimense

Dimensi množiny lze definovat také jinou cestou, která je spjata s výzkumy vynikajícího francouzského matematika A. Lebesguea a L. Brouwera (Holandsko). Než budeme přesně formulovat tuto definici dimense uvedeme několik příkladů.

Přímku můžeme rozdělit na úsečky, z nichž žádné tři nemají společné body; takové rozdělení získáme např. pomocí posloupnosti vzájemně stejně vzdálených bodů na přímce (obr. 82). Každý bod přímky patří potom buď jen k jedné úsečce, nebo dvěma úsečkám (je-li jejich společným koncem)[14].

Rozdělit rovinu na malé kousky, které se k sobě přimykají vždy nejvýše po třech, již nelze (dokázat nemožnost takového rozdělení není jednoduché). Při rozdělení roviny na čtverce (dvěma soustavami rovnoběžných přímek, obr. 83) se jednotlivými kousky přimykají k sobě po čtyřech (ve vrcholech čtverců). To však není „nejhospodárnější" rozdělení roviny na kousky: lze konstruovat takové rozdělení, při kterém se nestýkají v žádném bodě více než tři kousky. Příklad takového rozdělení je na obr. 84 nebo 85.

Konečně neexistuje rozdělení trojrozměrného prostoru na kousky, při kterém by se přimykaly k sobě nejvýše tři kousky; existuje však takové rozdělení, při kterém se k sobě nikde nepřimykají více než čtyři kousky. Takové rozdělení dostaneme např. tak, že vytvoříme jednu vrstvu „cihel" tak jak je ukázáno na obr. 86, na kterou budeme klást „cihly" druhé vrstvy atd., při čemž dbáme toho, aby hrany „cihel" první vrstvy se nikde nedotýkaly hran nebo vrcholů „cihel" druhé vrstvy. Na obr. 87 je znázorněna vzájemná poloha „cihel" v obou vrstvách („cihly" jedné vrstvy jsou znázorněny plnými čarami a „cihly" druhé vrstvy čárkovaně). Na tomto obrázku je názorně vidět, že se v žádném bodě k sobě nepřimykají více než čtyři „cihly".

[14]) *Zde i v dalším uvažujeme uzavřené „kousky", tj. takové, ke kterým patří i jejich hranice (tedy k úsečkám patří i jejich konce).*

Tedy:

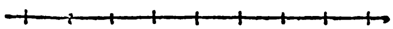
množina dimense 1 (přímka) může být rozdělena na části, z nichž žádné tři nemají společných bodů;

množina dimense 2 (rovina) může být rozdělena na části, z nichž žádné čtyři nemají společných bodů;

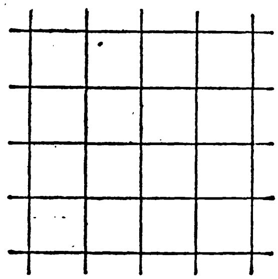
množina dimense 3 (prostor) může být rozdělena na části, z nichž žádných pět nemá společných bodů.

Na základě toho lze pojem dimense definovat také takto: *Množina* **X** *je dimense n, jestliže je sjednocením takových libovolně „malých“ uzavřených podmnožin, že libovolný bod množiny* **X** *patří nejvýše do* $n + 1$ *těchto podmnožin, a jestliže takové vyjádření není možné, zaměníme-li zde číslo* $n + 1$ *číslem n.*

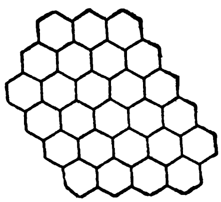
Dá se dokázat, že definici dimense lze formulovat jinak: množina je dimense n, jestliže existuje její rozklad na (libovolně „malé“) podmnožiny, kousky,



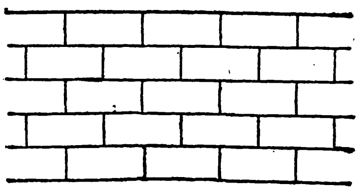
Obr. 82.



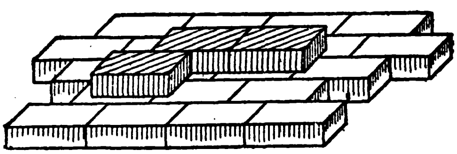
Obr. 83.



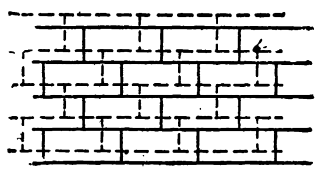
Obr. 84.



Obr. 85.



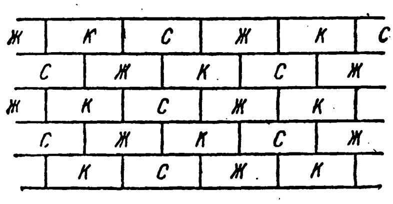
Obr. 86.



Obr. 87.

které je možno „vybarvit“ $n + 1$ barvami tak, že žádné dva kousky stejné barvy nemají společných bodů. Na obr. 88 je ukázáno takovéto vybarvení roviny (červená, modrá a žlutá barva — красный, синий, желтый).

Je velikou zásluhou P. S. Urysona, že dokázal větu o ekvivalenci obou uvedených definic dimense, tj. tvrzení, že množina je dimense n podle první (induktivní) definice dimense právě tehdy, je-li dimense n ve smyslu druhé (Lebesgue-Brou-



Obr. 88.

werovy) definice dimense. Obě definice dimense nejsou však ekvivalentní pro všechny topologické prostory, platí jen pro topologické prostory, které vyhovují některým dalším podmínkám (platí např. pro prostory metrické). Příklady (nikoli metrických) prostorů, pro něž uvedené definice dimense nejsou ekvivalentní, sestrojili sovětští matematikové A. L. Lunc a O. V. Lokucievski.

„Sousedství"

P. S. Uryson založil velké odvětví topologie — teorii dimense. Pojem dimense je jedním z nejdůležitějších topologických invariantů. Zmíníme se zde ještě o některých větách teorie dimense. Nejdříve se dotkněme souvislosti dimense s „počtem sousedů", kterou poprvé vyšetřoval sovětský matematik L. M. Lichtěnbaum.

Jestliže množina **X** je rozdělena na „kousky", pak ty z nich, které se přimykají k jistému „kousku" **K** nazýváme „sousedy" **K**. Každý kousek má tedy jistý počet „sousedů". Největší z těchto čísel nazýváme násobností daného rozkladu. Existují-li rozklady množiny násobnosti s na jakkoli malé kousky a neexistují-li takové rozklady násobnosti $s - 1$, nazýváme číslo s hustotou množiny **X**.

Rozklady znázorněné na obr. 84 a 85 jsou násobnosti 6. Jelikož v těchto rozkladech lze kousky volit libovolně malé, má rovina hustotu nikoli větší než 6. Je možné, aby rovina měla hustotu menší, např. 5? Kdyby tomu tak bylo, existoval by rozklad roviny na kousky, z nichž žádný by neměl více než 5 sousedů. Existují takové rozklady? Tato otázka byla úplně řešena teprve nedávno (r. 1950) v pracích O. V. Lokucievského a V. G. Boltjanského, který také dokázal, že *obecně každá dvourozměrná množina (splňující některé další přirozené podmínky) má hustotu alespoň 6.*[15])

Speciálně hustota roviny je rovna 6. Anglický matematik Stone dokázal (1953), že žádná dvourozměrná množina nemá hustotu větší než 7. Tedy hustota libovolné dvourozměrné množiny může být rovna 6 nebo 7 (např. hustota množiny, kterou lze si představit jako knihu o třech listech je rovna 7).

Pojem topologického součinu

Pojednáme ještě o dimensi topologického součinu. Nejdříve však objasníme tento nový pojem na příkladech.

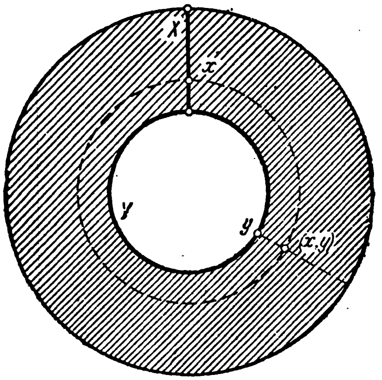
1. V rovině budiž zavedena kartézská soustava souřadnic (x, y). Každý bod roviny je potom určen bodem x na ose úseček a bodem y na ose pořadnic; bod je totiž průsečíkem rovnoběžek se souřadnicovými osami vedených bodem x resp. bodem y.

Jinak řečeno, každý bod roviny je určen uspořádanou dvojicí bodů (x, y), z nichž bod x leží na ose úseček a bod y na ose pořadnic. *Rovinu lze tedy pojímat jako množinu všech uspořádaných dvojic bodů* (x, y), *kde* x *je bodem množiny* **X** (v našem případě přímky) a y *bodem množiny* **Y** (v našem případě rovněž přímky).

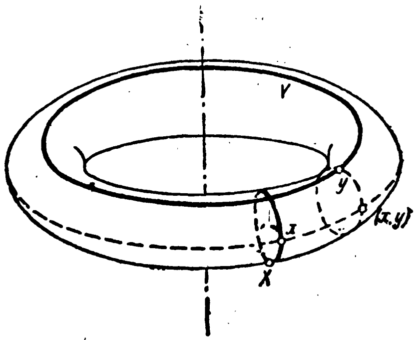
2. Vezměme dále mezikruží (obr. 89). Označme písmenem **X** část poloměru vnější kružnice (úsečku), vyťatou oběma hraničními kružnicemi, a písmenem **Y** vnitřní kružnici. Libovolný bod mezikruží je určen bodem x úsečky **X** a bodem

[15]) Srov. А. М. Яглом и И. М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении, Москва 1954, úloha 117.

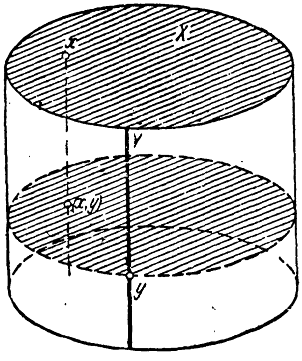
y kružnice **Y**. Daný bod je totiž průsečíkem soustředné kružnice s kružnicí **Y** jdoucí bodem x a jejího poloměru vedeného bodem y. Tedy mezikruží možno pojímat jako množinu všech uspořádaných dvojic bodů (x, y), kde x je bodem množiny **X** (úsečky) a y je bodem množiny **Y** (kružnice).



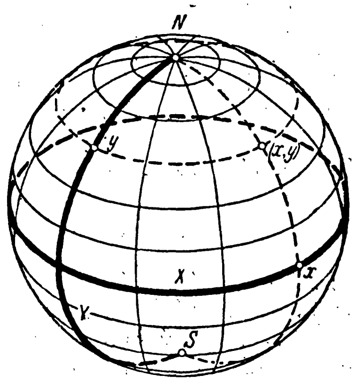
Obr. 89.



Obr. 90.



Obr. 91.



Obr. 92.

2. Na anuloidu (obr. 90) označme písmenem **X** meridián, tj. jednu z kružnic, která vznikne řezem s rovinou procházející osou anuloidu; písmenem **Y** kružnici, která je řezem s rovinou kolmou na ose anuloidu. Potom libovolný bod je určen uspořádanou dvojicí bodů (x, y), z nichž bod x leží na kružnici **X** a bod y na kružnici **Y**. Daný bod anuloidu je totiž průsečíkem meridiánu, který prochází bodem y kružnice **Y** s kružnicí rovnoběžnou s **Y**, která prochází bodem x meridiánu **X**. Tedy anuloid možno rovněž pojímat jako množinu všech uspořádaných dvojic bodů (x, y), z nichž x je bodem množiny **X** (kružnice) a y bodem množiny **Y** (rovněž kružnice).

4. Označme písmenem **X** horní podstavu válce a písmenem **Y** jednu z jeho površek. Každý bod válce je potom určen bodem x horní podstavy **X** a bodem y úsečky **Y**: daný bod je potom průsečíkem přímky vedené bodem x rovnoběžně s površkami s rovinou, vedenou bodem y rovnoběžně s podstavou (obr. 91). Vidíme tedy, že válec můžeme pojímat jako množinu všech uspořádaných

dvojic bodů (x, y), kde x je bod množiny **X** (kruhu) a y je bod množiny **Y** (úsečky).

Ve všech příkladech jsme získali množinu, která je topologickým součinem množin **X** a **Y**: rovina je topologickým součinem dvou přímek, mezikruží je topologickým součinem úsečky a kružnice, anuloid je topologickým součinem dvou kružnic, válec je topologickým součinem kruhu a úsečky. Obecně definujeme topologický součin analogicky: *množinu* **Z** *nazýváme topologickým součinem množin* **X** *a* **Y**, *můžeme-li* **Z** *pojímat jakožto množinu všech uspořádaných dvojic* (x, y), *kde* x *je bodem množiny* **X** *a* y *bodem množiny* **Y**. To však ještě nestačí. V této definici se hovoří jen o tom, z jakých prvků se skládá množina **Z** a nedefinuje se v ní topologie. Aby množina **Z** byla topologickým prostorem, nutno v **Z** zavést topologii. Množina **Z** se stává topologickým součinem množin **X** a **Y**, je-li v **Z** topologie zavedena takto: bod (x, y) je blízký podmnožině **M** prostoru **Z**, jestliže každé okolí bodu x v prostoru **X** obsahuje bod u a každé okolí bodu y v prostoru **Y** obsahuje bod v tak, že bod (u,v) náleží do množiny **M**.

Při tom je podstatné, aby každý bod množiny **Z** odpovídal dvojici (x, y) a aby různým dvojicím odpovídaly různé body množiny **Z**. Uvažujme např. kulovou plochu a na ní rovník a nulový poledník. Poloha libovolného bodu na kulové ploše je určena svými zeměpisnými souřadnicemi, tj. bodem x na rovníku a bodem y na nulovém poledníku: bod (x, y) kulové plochy je průsečíkem poledníku procházejícím bodem x a rovnoběžky, která prochází bodem y (obr. 92). Avšak z toho nemůžeme usuzovat, že kulová plocha je topologickým součinem rovníku (tj. kružnice) a poledníku (tj. množiny homeomorfní s úsečkou). Jsou-li totiž x a x' dva různé body rovníku a n severní pól kulové plochy, odpovídá různým dvojicím (x, n) a (x', n) stejný bod, totiž právě severní pól.

Dimense topologického součinu

Přistoupíme nyní k otázce dimense topologického součinu. V prvních třech z výše uvedených příkladů byly množiny **X** a **Y** dimense 1 (jednorozměrné); jejich topologický součin byl dimense 2 (dvojrozměrným útvarem, rovina resp. mezikruží resp. anuloid). Ve čtvrtém příkladě šlo o topologický součin množiny dimense 2 s množinou dimense 1 (kruh a úsečka); který je dimense 3 (trojrozměrný útvar, válec). Na základě těchto a řady jiných příkladů (např. topologickým součinem roviny a přímky je trojrozměrný prostor, topologickým součinem dvou rovin je čtyřrozměrný prostor) *mohli bychom se domnívat, že dimense topologického součinu je zřejmě rovna součtu dimensí „činitelů“*. O platnosti tohoto tvrzení dlouho nikdo nepochyboval, třebaže nebylo dokázáno. Vědeckou sensací byla práce L. S. Pontrjagina, uveřejněná v r. 1930, v níž autor dokazuje, že topologický součin dvou dvourozměrných množin může být dimense 3 (a nikoli dimense 4, jak vyplývalo z uvedeného tvrzení). Samozřejmě nikoli každý topologický součin dvou dvourozměrných množin je dimense 3; P. S. Pontrjagin však ukázal, že lze konstruovat dvě dvojrozměrné množiny, jejichž topologický součin je trojrozměrný. Obrazně řečeno, může platit „rovnice“

$$2 \text{ „}+\text{“ } 2 = 3 .$$

Jaké množiny použil L. S. Pontrjagin v důkazu tohoto tvrzení? *Jsou to právě ty množiny* $\mathbf{F}_p$, *které jsme popsali výše* (str. 416). *Jsou-li totiž* p a q *nesoudělná,* *je topologicky součin pontrjaginovských množin* F_p *a* F_q *trojrozměrnou množinou.* Důkaz této věty není jednoduchý. Postup při takovém důkaze naznačíme v kap. 8.

Poznamenejme, že L. S. Pontrjagin dostal tento výsledek „násobením" různých (nikoli homeomorfních) množin F_p a F_q. Jsou-li p a q soudělnými (tj. mají-li společného dělitele) a tím spíše pro $p = q$ je topologický součin množin F_p a F_q nikoli trojrozměrný, ale čtyřrozměrný (v souhlase s představou o součtu dimensí „činitelů). Přirozeně vznikla otázka zda v Pontrjaginově příkladu je podstatné, že se násobí různé množiny? Existuje taková dvojrozměrná množina, která topologicky násobena sama sebou dává trojrozměrnou množinu? Na tuto otázku odpověděl v r. 1949 V. G. Boltjanski, který sestrojil množiny P_m (pro $m = 2, 3, 4 \ldots$), které jsou dvojrozměrné a mají tuto vlastnost: Topologický součin libovolných dvou množin P_m a P_n je trojrozměrný pro libovolná m a n (tedy i pro $m = n$, tj. i pro dvě stejné množiny).

V posledních letech se řešilo mnoho problémů z teorie dimense. Problém dimense topologického součinu úplně řešil teprve nedávno sovětský matematik M. F. Bokštejn. O dalším vynikajícím výsledku sovětské topologické školy — o tzv. homologické teorii dimense P. S. Alexandrova — pojednáme v kap. 8.

Přeložili Jiří Fábera a Jiří Gregor

O PRÁCI P. S. NOVIKOVA „O ALGORITMICKÉ NEŘEŠITELNOSTI PROBLÉMU TOTOŽNOSTI SLOV V TEORII GRUP" *)

Existence algoritmicky neřešitelných úloh byla prokázána teprve ve 30. letech, když Post, Church, Turing a jiní podali přesnou definici algoritmu a zkonstruovali úlohy logické povahy, které nebyly algoritmicky řešitelné. Byly to však úlohy tak speciální povahy a umělé, že se udržel názor, že v reálné matematice takových úloh není. Tento názor vyvrátila Novikovova práce, která se tím stala proslulou. Členu korespondentu AN SSSR Petru Sergějeviči Novikovovi byla za tuto práci udělena v r. 1957 Leninova cena.

V článku podáváme stručnou informaci, oč v této práci jde.

Redakce

Jedním z ústředních problémů matematické logiky je otázka řešitelnosti tzv. algoritmických problémů.

Příkladem algoritmu (pojem, s kterým se setkáváme v matematice od dob Eukleidových) může být dělením čísla jiným číslem, Algoritmus je charakterisován tím, že po konečném počtu kroků dostaneme výsledek (v našem příkladu podíl a zbytek), postupujeme-li podle určitých pravidel, nezávislých na daných veličinách (v našem příkladu na dělenci a děliteli). Teorie algoritmů byla v poslední době obohacena pracemi A. A. Markova, J. Posta, A. M. Turinga a jiných.

Algoritmický problém spočívá v určení algoritmu, který umožňuje řešit jedinou metodou nějakou nekonečnou sérii stejnorodých otázek, nebo v důkazu, že takový algoritmus neexistuje.

*) О работе П. С. Новикова „Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп", Matěmatičeskoje prosveščenije, č. 1, 1957.