Stefan Turnau
Integrativní přístup ke geometrii

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 35 (1990), No. 4, 216--218

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137824

vyučování

INTEGRATIVNÍ PŘÍSTUP KE GEOMETRII

Stefan Turnau, Krakov

Ve školním roce 1986–87 byly v Polské lidové republice uplatněny nové osnovy matematiky ve vyšších třídách středních škol s žáky 15letými a staršími. Poprvé v historii polského školství bylo výslovně řečeno, že geometrie nemá být vykládána jako deduktivně uspořádaný systém. K tomuto rozhodnutí došlo po téměř 20 letech kursu geometrie založeného na velmi rigorózních a podrobných učebnicích, které byly považovány za obtížné pro průměrné studenty, takže v mnoha případech výuka podle nich degenerovala na pamětné osvojování definic a vět s malým počtem vyřešených úloh. To ovšem stavělo autory učebnice a vyučující do nové situace, před nutnost začít od samých začátků, od vymezení cílů, metod a prostředků vyučování.

Omezení deduktivního uspořádání učiva je provázeno zavedením souřadnicových a vektorových metod a prolínáním rovinné a prostorové geometrie. Tím se dosáhlo uspořádání a integrace kursu matematiky spíše podle didaktických než logických principů a cílů.

Autorský tým navržené učebnice tvořili kromě autora tohoto textu ještě Marek Legutko a Marie Legutková. Tým přijal řadu integračních principů, z nichž některé zde uvedeme.

1. Integrace jevové (fenomenologické) a formální geometrie

Protože studenti mají chudé intuitivní geometrické vědomosti, považovali autoři za nutné jejich obohacování.

P ř í k l a d 1. a) Vojenské cvičení vyžaduje, aby průzkumník šel postupně 500 m k severu, 500 m k západu, 500 m k jihu a 500 m k východu. Jaký tvar má dráha kterou ujde? Jak daleko je její koncový bod od výchozího?

b) Letadlo vylétá z varšavského letiště, letí 500 km k severu, 500 km k západu, 500 km k jihu a 500 km k východu. Může přistát zpět na témže letišti? Vyznačte dráhu letadla na glóbu. Jaký tvar tato dráha připomíná?

P ř í k l a d 2. Intuitivní idea geometrického útvaru je nejprve zaváděna jako tvar reálného předmětu, pak jako abstraktní objekt získaný schematizací nebo idealizací reálných objektů a teprve potom je útvar definován jako matematický objekt, tj. jako množina bodů.

Z anglického znění přednášky *An integrative approach to geometry* proslovené na ICME VI přeložil JAROSLAV ŠEDIVÝ.

2. Integrace rovinné a prostorové geometrie

Pokud je to možné, vztahují se definice, věty a důkazy na rovinné i prostorové objekty. Zdůrazňují se úlohy vyžadující úvahy o zvláštních případech a analogie a rozdíly mezi geometrickými vlastnostmi útvarů v dimenzích 2 a 3.

Příklad 3. Zhodnoťte tyto definice: a) Rovnostranný trojúhelník je trojúhelník, který má všechny strany navzájem shodné a všechny úhly navzájem shodné. b) Krychle je mnohostěn, který má šest shodných stěn. c) Ostroúhlý čtyřúhelník je konvexní čtyřúhelník, který má všechny úhly ostré.

Příklad 4. Kolmé promítání se definuje jak v rovině, tak i v prostoru stejně. Středová souměrnost v rovině se definuje dvěma způsoby: Jako otočení o 180° kolem bodu a jako stejnolehlost s koeficientem -1. První definici nelze rozšířit na prostor, zatímco druhou ano.

3. Integrace syntetických a analytických metod

Syntetické, souřadnicové a vektorové metody se často používají souběžně. Studenti jsou vedeni k jejich volbě a vhodnému využívání.

Příklad 5. Dokažte, že souměrnosti a posunutí jsou shodná zobrazení, a to nejen jako přímý důsledek definic, ale také pomocí souřadnic a vektorů.

Příklad 6. V libovolném trojúhelníku ABC platí: Úhel ACB je pravý, ostrý nebo tupý podle toho, zda $|AB|^2$ je rovno, menší nebo větší než $|AC|^2 + |BC|^2$. Umístíme-li trojúhelník tak, aby platilo $C[0; 0]$, $A[1; 0]$, $B[x; y]$, $y > 0$, je $|BC|^2 - |AB|^2 + |AC|^2 = 2x$, odkud plynou všechna uvažovaná tvrzení.

4. Integrace starých úloh s novějšími přístupy k jejich řešení

Elementární geometrie je nevyčerpatelný zdroj krásných úloh, které je možné řešit klasickými syntetickými metodami, lze však na nich uplatňovat i novější přístupy a prostředky. To poskytuje příležitost vidět touž věc z různých pohledů, srovnávat výsledky a účinnost metod. Z druhé strany některé otázky moderní nebo aplikované matematiky mohou být položeny a zodpovězeny v geometrickém rouše, což dovoluje využít geometrie k dosahování obecných cílů matematického vzdělávání.

Příklad 7. Ke konstrukčním úlohám se přistupuje z algoritmického hlediska. Žádá se jejich řešení ve formě algoritmu s užitím elementárních operací a podprogramů, ne nutně euklidovskými konstrukcemi. Mikropočítače mohou tento přístup graficky znázorňovat (v orig. „vizualize"). Také rekurentní konstrukce a jednoduché fraktály lze studentům ukázat a povzbudit je k definování dalších.

Příklad 8. Euklidovské metody důkazů shodnosti pomocí vět o shodných trojúhelnících, vyučované v předreformním období ve velkém rozsahu, byly později nahrazeny shodnými zobrazeními. V nové učebnici jsou obě metody uvedeny a studentům se doporučuje, aby je vhodně aplikovali.

Příklad 9. Mnoho starých geometrických otázek a tvrzení bylo přeloženo do jazyka transformací a invariantů.

Příklad 10. Je uvedeno mnoho optimalizačních úloh, jako např. úlohy na určení minima vzdáleností nebo součtu vzdáleností, maxima obsahu nebo objemu atp., které mají být řešeny elementárními metodami: synteticky, analyticky nebo ve vhodných případech i přibližně.

Jedním z nejdůležitějších principů, který prostupuje celou učebnicí, je

5. Integrace výuky geometrie s metodologickým vzděláváním

Znalosti, které žáci získávají o geometrických objektech, mají pro všeobecné vzdělání podřadný nebo nemají vůbec žádný význam. Na druhé straně metodologické zkušenosti a ideje by se měly považovat za klíčový a rozhodující cíl vyučování. Sem patří šest složek matematické aktivity, které formulovala v roce 1983 na sympoziu ICMI ve Varšavě prof. A. Z. Krygowská:

schematizace, vymezování, odvozování, redukce, kódování, algoritmizace.

Autoři záměrně usilovali o to nezdůrazňovat v učebnici jednotlivá schémata, definice, důkazy, řešení, symboly, algoritmy, ale zdůrazňují to, co studenti mohou sami objevit a naučit se. Neobvyklým rysem učebnice je to, že se z ní do značné míry vytratila hotová vyslovená tvrzení, která se často marně studenti učili nazpaměť.

Příklad 11. O mnohoúhelníku platí:

1. Všechny jeho strany jsou shodné.
2. Má střed souměrnosti.
3. Má osy souměrnosti.

Rozhodněte, zda tyto informace platí pro kosočtverec. Musí být mnohoúhelník splňující tyto podmínky kosočtvercem?

Dále byly o mnohoúhelníku získány tyto informace.

5. Je to čtyřúhelník.
6. Má kolmé úhlopříčky.

Postačí informace 1.–4., 2.–4., 2.–5. k rozhodnutí, že jde o kosočtverec? V případě záporné odpovědi dejte vhodné protipříklady, kladnou odpověď zdůvodněte podle definice. Určete další soubor informací, které postačí k rozhodnutí, že jde o kosočtverec. Navrhněte novou definici kosočtverce.

Příklad 12. Studenti jsou vedeni k aktivitě při dokazování matematických vět. Tak např. se nejdříve detailně dokáže věta: Čtyřúhelník, který má shodné každé dvě protější strany, je rovnoběžník. Pak se podá s určitými mezerami, které mají studenti doplnit, důkaz věty: Čtyřúhelník, který má shodné každé dva protější úhly, je rovnoběžník. Konečně je pouze naznačena idea důkazu věty: Čtyřúhelník, jehož úhlopříčky se půlí, je rovnoběžník. Studenti mají důkaz provést.