Ivan Netuka; Jiří Veselý

Henri Lebesgue (K stému výročí narození)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 20 (1975), No. 6, 301--307

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137917

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE, ROČNÍK XX (1975) ČÍSLO 6

Henri Lebesgue

(K stému výročí narození)

Ivan Netuka, Jiří Veselý, Praha

Letos si připomínáme sté výročí narození jednoho z největších francouzských matematiků tohoto století, Henri Lebesguea. Jeho teorie integrálu patří nesporně k nejplodnějším matematickým objevům první poloviny tohoto století. Obrovský je jeho přínos k vybudování teorie funkcí reálné proměnné. Ovlivnil též podstatně i vývoj dalších oblastí matematiky.

Henri Lebesgue se narodil 28. června 1875 v Beauvais nedaleko Paříže. Jeho otec, typografický dělník s širokými kulturními zájmy, záhy zemřel a rodina se ocitla v tíživé situaci. Učitelé naštěstí brzy rozpoznali Lebesgueův talent. Jejich doporučení, různé podpory a stipendia umožnily Lebesgueovi další studia. Jeho zájem o počítání sahá do dětství. Podle jeho vlastních slov časté postonávání a chudoba v něm vypěstovaly zálibu v jediné dostupné hře: ciframi a geometrickými obrazci popsal každý kus papíru, který se mu dostal pod ruku. Na střední škole ho nejvíce bavila geometrie. Přispěl k tomu i jeho profesor matematiky na gymnáziu v Beauvais, který zadával jako úkoly pouze příklady z geometrie. Lebesguea jako jediného ze třídy (která měla v té době jen čtyři žáky) tyto problémy bavily a hledal vždy několik jejich různých řešení. Jeho spolužáci začali tohoto koníčka využívat a tak se brzo stalo pravidlem, že Henri vypracovával ke každé úloze čtyři různé verze řešení.

Záliba v geometrii ho provázela celý život a podle jeho slov to byly geometrické aspekty matematických pojmů, které mu v jeho bádání byly nejvíce užitečné, a to i v případech, kdy se zabýval látkou na první pohled velmi vzdálenou čisté geometrii.

Poslední ročníky gymnázia absolvoval Lebesgue v Paříži, kde po maturitě pokračoval ve studiu na slavné École normale supérieure. Tam svůj zájem o různé předměty dělil nerovnoměrně, což se mu málem nevyplatilo. Příprava na opravný termín z chemie i přes pomoc spolužáka LANGEVINA, pozdějšího slavného francouzského fyzika, nepřinášela žádoucí výsledky. Termín zkoušky se blížil a Langevin viděl situaci černě: „Vcelku toho moc neumíš, ale je tu přece jakási naděje. Zkoušející nedoslýchá; mluvit můžeš bez obav, ale budeš-li muset napsat na tabuli jediný vzorec, jsi úplně ztracen". Lebesgue tedy u zkoušky mluvil a mluvil. „Pište", pravil zkoušející. Student se zvolna blížil k tabuli,uchopil křídu a vzápětí, jakoby ho náhle napadla geniální myšlenka, přiběhl zpět ke zkoušejícímu. Po několikerém opakování této scény zvítězil: tabule zůstala netknutá.

S matematikou neměl Lebesgue problémy. Byl hloubavý, snažil se vždy vystopovat podstatu věci a dlouho a důsledně pátral, co způsobuje, že matematické důkazy a teorie fungují. Kriticky analyzoval konvence matematiky 19. století. Vypráví se, že již jako student projevoval pobouření nad výsledkem klasické diferenciální geometrie charakterizujícím rozvinutelné plochy jako právě ty, které lze lokálně prostě se zachováním délky odpovídajících křivek zobrazit na část roviny. Předváděl svým kolegům zmačkaný kapesník, který lze zřejmě „vyžehlením" zobrazit do roviny, ale který zdaleka nepřipomíná rozvinutelnou (a tedy hladkou) plochu. Tato studentská rebélie proti matematice, kde „všechno je hladké", vedla později Lebesguea k podrobnému zkoumání obecných ploch a k otázkám zachovávání povrchů při jistých zobrazeních; právě studium podobných problémů přivedlo Lebesguea k definici integrálu, který nese jeho jméno.

Po absolvování École normale supérieure r. 1897 začíná Lebesgue vlastní vědeckou práci během následujících dvou let, kdy pracuje jako pomocná síla v knihovně. V roce 1899 nastupuje na gymnáziu v Nancy a přes značné pracovní zatížení pokračuje ve vědecké práci a r. 1902 předkládá svou doktorskou disertaci. Tato disertace je považována za jednu z nejlepších, která byla v matematice podána. Přednáší v Paříži na Collège de France a působí postupně na fakultách v Rennes a Poitiers. V roce 1910 se vrací na Sorbonnu, je r. 1921 jmenován profesorem na Collège de France a následující rok zvolen za člena Akademie věd na místo uvolněné po JORDANOVĚ smrti. Pokračuje ve své vědecké a učitelské činnosti a umírá v době okupace Francie 26. června 1941.

Řada hodnotných Lebesgueových výsledků zůstala ve stínu jím vytvořené teorie integrálu, která mu přinesla proslulost a všeobecnou známost a také členství v mnoha učených společnostech i jiné pocty. Vzhledem k rozsahu článku nelze na tomto místě podrobně hodnotit bohaté Lebesgueovo dílo; omezíme se jen na zmínky o několika významných pracích a pokusíme se přiblížit dobu, ve které vznikaly.

První Lebesgueova práce z r. 1898 obsahuje jednoduchý důkaz Weierstrassovy věty o aproximaci, který byl podle Lebesgueova názoru méně učený než důkazy známé předtím. I v ryze analytických úvahách tohoto článku sehrál velkou roli Lebesgueův geometrický přístup. Proti jedné z dalších jeho prací vznesl HERMITE námitky a DARBOUX jí byl dokonce pohoršen; byla to práce založená na „kapesníkové rebélii" a nebýt rozhodné podpory PICARDOVY, nebyla by patrně uveřejněna.

Lebesgueova vědecká činnost té doby vrcholí disertační prací [2] *Intégrale, longueur, aire*, kterou r. 1902 obhájil před komisí, jejímiž členy byli PICARD a GOURSAT. Pro lepší pochopení jejího významu je nutné stručně nastínit předcházející vývoj poznatků o integrálu a funkcích.

Pomineme zásluhy učenců starověku (EUKLIDES, EUDOXOS, ARCHIMEDES), zakladatelů infinitezimálního počtu (NEWTON, LEIBNIZ) a mnoha dalších, kteří přispěli k chápání základních pojmů analýzy a přeskočíme na začátek 18. století. V té době nebyl pojem funkce jasně vymezen a často se pod funkcí rozumělo jakési „analytické vyjádření"; teorie množin neexistovala a analýza se jen hemžila nekonečně malými čísly. Formulace matematických myšlenek byla z dnešního hlediska naprosto nevyhovující. V období 1821 – 27 věnoval CAUCHY řadu prací určitému integrálu; tam nacházíme uspokojivou definici integrálu spojité funkce f přes uzavřený interval I pomocí „integrálních součtů" příslušných dělením intervalu I.

RIEMANN (1826–1866) analyzoval Cauchyovu definici a vyjasnil, za jakých podmínek lze definice pomocí integrálních součtů užít i pro obecně nespojitou funkci, tj. kdy je funkce riemannovsky integrovatelná. Později Picard o Riemannově definici integrálu řekl: „Zdálo se, že Riemann prozkoumal myšlenku určitého integrálu do takové hloubky, jak to jen bylo možné. Lebesgue ukázal, že zdaleka tomu tak není". Riemann též vyjasnil, jak se jeho definice hodí k integrování jistých nespojitých funkcí a k vyšetřování trigonometrických řad.

S postupným rozvojem základů teorie množin byl Riemannův integrál podroben dalšímu zkoumání. Byly zavedeny horní a dolní integrální součty (Darboux), objevil se pojem Jordanova objemu a bylo dokázáno, že se Riemannův integrál kladné funkce f přes interval I shoduje s Jordanovým objemem plochy ohraničené grafem funkce f.

Situaci v analýze reálných funkcí lze velice zhruba ještě v období 90. let minulého století charakterizovat jako celkem úspěšně rozvinutou teorii v oblasti „dostatečně hladkých" funkcí. Tím není řečeno, že by se např. nemluvilo o funkcích nemajících derivaci nebo o nespojitých funkcích; při práci s funkcemi se však často užívalo nepřirozených a nehezkých omezení, které s prováděným vyšetřováním nesouvisely. Byly např. známy příklady funkcí f s omezenou derivací, pro něž neměl vzorec

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

smysl proto, že derivace f' nebyla integrovatelná (DINI, VOLTERRA); podobně bylo známo (SCHEEFFER), že vzorec pro výpočet délky křivky pomocí Riemannova integrálu selhává, opustíme-li pevnou půdu hladkých funkcí. Nepřehledná situace panovala též např. v integrování trigonometrických řad člen po členu, v otázkách převedení dvojrozměrné integrace na výpočet dvojnásobných integrálů apod. Dá se říci, že v oblasti reálných funkcí vládla jistá skepse, že by bylo možné nepřehlednou říši funkcí s namnoze patologickými vlastnostmi nějak zvládnout. Objevovaly se i názory, že zpřesňování úvah může vést ke ztrátě elegance klasických matematických důkazů a k zatemnění základních myšlenek analýzy.

Problémů uspokojivě neřešitelných existujícími metodami integrace přibývalo a stále naléhavěji vystupovala do popředí potřeba vybudovat „dokonalejší" integrál. V pokusech o jeho vytvoření byl nejúspěšnější Lebesgue. V jeho základech leží teorie míry, jejímuž vývoji musíme věnovat ještě několik slov. Podstatnou vlastností množinových funkcí, pomocí nichž se má „měřit velikost množin", je fyzikálně naprosto přirozená vlastnost aditivity:

$$(*) \qquad m\Big(\bigcup_{i \in I} M_i\Big) = \sum_{i \in I} m(M_i)\,.$$

Přitom m je množinová funkce a M_i jsou (po dvojicích) disjunktní množiny, pro něž je ovšem hodnota $m(M_i)$ definována. První takové užívané „míry" množin neměly dokonce tuto vlastnost ani pro dvě disjunktní množiny M_1, M_2 (HARNACK, STOLZ, CANTOR). Je-li m např. Jordanův objem, platí $(*)$ pro konečné systémy množin M_i, ale přitom hodnoty $m(M_i)$ nemusí být definovány i pro jednoduché množiny M_i, se kterými se v analýze běžně setkáváme.

Další vývoj matematické analýzy ukázal, že pro uspokojivou teorii míry je podstatné požadovat platnost (*) pro spočetné disjunktní systémy množin. Taková podmínka, které se říká σ-aditivita, se vyskytuje poprvé u BORELA r. 1898. Za zmínku stojí, že k zavedení míry byl Borel přiveden zkoumáním jistých otázek souvisejících s funkcemi komplexní proměnné. Zhruba řečeno Borel potřeboval, aby byly „malé" i spočetné husté množiny, a proto je pokrýval nekonečnými systémy intervalů. Je též zajímavé, že pojem σ-algebry předcházel pojmu topologie. Pojem otevřené množiny a další topologické pojmy se poprvé vyskytují v BAIREOVĚ práci z roku 1899; Baire zasvětil celou svou vědeckou práci rodící se teorii reálných funkcí.

Přelom století je současně zlomem v obecném matematickém myšlení. Nespojité a nehladké funkce nalézají své oprávněné uplatnění, rozvíjí se teorie množin, jejíž význam je podtržen vznikem teorie míry, objevuje se systematičtější využívání axiomatického přístupu k matematickým pojmům. Do popředí začínají vystupovat topologické úvahy a objevují se práce popisující hierarchii v říši množin a funkcí. Nastává nový rozmach matematické analýzy, který je nerozlučně spojen s hlavními představiteli „zlatého věku pařížské matematiky" – jsou to Émile Borel (1871 – 1956), René Baire (1874 – 1932) a Henri Lebesgue.

Nové myšlenky nezískávaly snadno půdu, což dokumentuje například úryvek z HERMITEOVA dopisu STIELTJESOVI: „... zděšen a s hrůzou se odvracím od té politováníhodné pohromy funkcí, které nemají derivace". Nebyl to však jen soukromý Hermiteův názor, nýbrž zakořeněná tradice, která se bránila proti „patologickým" funkcím. Lebesgue vzpomíná na jizlivé poznámky svých kolegů jako „to vás nebude zajímat, bavíme se o funkcích, které mají derivaci" apod.

Vraťme se k Lebesgueově disertaci. Nacházíme v ní více rozvinutou teorii Borelovy míry (zavádí se vnější míra a lebesgueovsky měřitelné množiny), pomocí této míry v E_2 se zavádí jednorozměrný integrál přes geometrickou definici integrálu a zároveň se tento integrál definuje analyticky. Na rozdíl od definice Riemannovy Lebesgueova definice vychází z dělení oboru hodnot funkce. Je-li obor funkce f např. obsažen v intervalu $\langle c, d \rangle$ a $c = y_1 < y_2 < \ldots < y_{n+1} = d$ je dostatečně jemné dělení $\langle c, d \rangle$, pak dobrou aproximací „Lebesgueova integrálu" funkce f přes interval I je součet

$$\sum_{i=1}^{n} y_i m(V_i) ,$$

kde $V_i = \{x \in I; y_i \leqq f(x) < y_{i+1}\}$ a $m(V_i)$ je (Lebesgueova) míra množiny V_i. Požadavek, aby čísla $m(V_i)$ byla definována pro každé dělení intervalu $\langle c, d \rangle$, vede k pojmu měřitelné funkce. Bodová limita měřitelných funkcí je přitom měřitelná funkce a je důležité, že systém měřitelných funkcí zahrnuje „prakticky všechny" funkce, se kterými se setkáváme. (Lebesgue sám neznal příklad neměřitelné funkce, důkaz existence takové funkce pomocí axiómu výběru podal VITALI r. 1905.) Rozšíření definice Lebesgueova integrálu na neomezené funkce a neomezené intervaly nepředstavuje vážný problém. Lebesgue sám srovnával popsaný přístup k integrálu s počítáním peněz: Vybíráte-li z hromádky bankovky náhodně a sčítáte-li postupně jejich hodnoty, dojdete k celkové částce riemannovskou integrací; seskupíte-li bankovky stejné hodnoty na hromádky a sčítáte-li po hromádkách, je to lebesgueovská integrace.

Lebesgue podal též deskriptivní definici svého integrálu a ukázal jeho využití v teorii trigonometrických řad. Naším cílem však není vykládat teorii Lebesgueova integrálu, kterou její autor dále rozpracoval a zdokonalil. Jeho kniha *Leçons sur l'integration* a další monografie o trigonometrických řadách ovlivnily značně další rozvoj matematické analýzy. Účinné aplikace na teorii Fourierových řad (Lebesgue), elegantní a definitivní tvar věty o převedení dvojného integrálu na dvojnásobné (FUBINI), vyšetření hraničního chování holomorfních funkcí v jednotkovém kruhu (FATOU), snadná práce s limitními přechody, definitivní odpověď na otázku, které funkce jsou neurčitým integrálem své derivace a řada dalších uspokojivých odpovědí na neřešené otázky prokázala, že Lebesgue měl při přístupu k definici nového integrálu šťastnou ruku. Další výsledky (DENJOY, RIESZ, RADON, Lebesgue aj.) prokázaly nejen životnost teorie, ale i její nepostradatelnost. Uvážíme-li, že proces přechodu od prostoru spojitých funkcí na I s „integrální" metrikou k funkcím (resp. třídám funkcí) s konečným Lebesgueovým integrálem je zúplněním uvažovaného prostoru, je patrná fundamentální důležitost Lebesgueova integrálu pro funkcionální analýzu.

I když teorie integrálu a reálných funkcí zaujímá centrální místo v Lebesgueově díle, není to zdaleka jediná oblast matematiky, v níž dospěl k zásadním výsledkům. Telegraficky uveďme jeho výsledky o derivování funkcí (Lebesgueovy body), derivování množinových funkcí, o konvergenci a sčítatelnosti Fourierových řad (Lebesgueovy konstanty), o singulárních integrálech, o aproximaci, jeho přínos ve variačním počtu, v teorii potenciálu (o níž se ještě zmíníme), v geometrii a topologii. Připomeňme též jeho hluboký zájem o pedagogické a metodické problémy.

Lebesgue měl šťastnou ruku nejen v matematických objevech, ale také pokud jde o matematické chyby. Uveďme zde nejprve slavnou chybu z práce [3], kde se vyskytuje nesprávné tvrzení, že projekce borelovské množiny je borelovská množina. Tato chyba vedla sovětské matematiky SUSLINA a LUZINA k vytvoření teorie analytických množin. Lebesgue se k této chybě hlásí v předmluvě k Luzinově knize o analytických množinách: „Po úvaze jsem dospěl k závěru, že předmluva je jediné místo, kde bych mohl důrazně přiznat to, co pan Luzin pečlivě zakrývá: původem všech problémů, o nichž se zde bude mluvit, je hrubá chyba v mé práci o analyticky vyjádřitelných funkcích. Je to plodná chyba – jaký to byl šťastný nápad dopustit se takové chyby!"

Chceme se ještě krátce zmínit o jedné oblasti matematiky, do které Lebesgue podstatně zasáhl a která je nám nejbližší. Klasická teorie potenciálu je v podstatě studiem harmonických funkcí. Na m-rozměrné otevřené množině jsou to spojitá řešení Laplaceovy rovnice $\Delta u = 0$. Základní úlohy této teorie popisují jisté fyzikální jevy a jejich řešení neustále přitahovalo pozornost téměř všech významných matematiků.

Jednou z nejstarších úloh tohoto typu je Dirichletova úloha: Pro oblast $G \subset E_m$ a funkci f spojitou na hranici ∂G se hledá funkce u harmonická na G a splývající na ∂G s funkcí f. Tato úloha úzce souvisí s Riemannovým problémem nalezení minima integrálu

$$\int_G \operatorname{grad}^2 u(x)\, dx\,,$$

kde u probíhá všechny dostatečně hladké funkce, které se shodují na hranici ∂G s funkcí f. Jestliže se minima funkcionálu nabývá pro funkci v z uvedené třídy, je v řešením příslušné

Dirichletovy úlohy. Dlouho se myslelo, že uvedené úlohy jsou ekvivalentní (což není pravda). Lebesgue provedl pečlivý rozbor otázek existence řešení Riemannova problému pro případ velmi obecných rovinných oblastí. Navrhl též několik metod konstrukce minimalizující posloupnosti a – což je podstatné – podrobně se zabýval chováním limitní funkce na hranici. Ukázal, že limitní funkce nabývá zadaných hraničních hodnot, když žádný bod hranice oblasti G neleží uvnitř libovolně malých Jordanových křivek procházejících G. Poznamenal, že podobných metod, užitých v [4] pro rovinu, lze užít k důkazu existence řešení Dirichletovy úlohy pro případ prostoru. Za okamžik uvidíme, proč je to zajímavé.

Vyšetřování hraničního chování řešení Dirichletovy úlohy vedlo Lebesguea k zavedení pojmu bariéry důležitého i v moderní teorii potenciálu. Pomocí něho lze odvodit řadu geometrických podmínek, které zaručují řešitelnost klasické Dirichletovy úlohy pro každou spojitou okrajovou podmínku pro celou řadu oblastí. Ještě v prvním desetiletí tohoto století vládlo obecné přesvědčení opírající se o fyzikální názor, že Dirichletova úloha má vždy řešení a že omezující podmínky na geometrický tvar hranice uvažované oblasti si vynucují užívané speciální metody důkazů. K vyjasnění podstaty věci přispěl dvojím způsobem Zaremba. Tento polský matematik r. 1911 upozornil na to, že klasické řešení Dirichletovy úlohy nemusí vždy existovat např. pro kruh s vynechaným středem. Významnější přínos spočívá v tom, že upozornil Lebesguea na to, že jeho zmínka o analogii rovinného a prostorového případu naráží na značné obtíže. Lebesgue si nejprve myslel, že malými úpravami půjde vše zachránit, ale závada tkvěla v podstatě věci. R. 1913 uveřejnil Lebesgue příklad trojrozměrné jednoduše souvislé oblasti, pro kterou nemusí existovat řešení Dirichletovy úlohy pro všechny spojité okrajové podmínky. Význam tohoto výsledku je značný, neboť naznačil nový směr bádání a stal se zárodkem řady pojmů moderní teorie potenciálu. Lebesgueovi také vděčíme za tyto důležité poznatky:

1. Chování řešení Dirichletovy úlohy v blízkosti hranice nezávisí na okrajové podmínce, ale lokálně na geometrickém charakteru hranice.
2. Dirichletovu úlohu pro obecné oblasti je třeba rozložit na dvě úlohy; nejprve vhodným způsobem musíme přiřadit okrajové podmínce jistou harmonickou funkci („zobecněné řešení“) a potom zkoumat chování tohoto řešení v blízkosti hranice. Tento program byl realizován později Wienerem, Perronem a dalšími.

Ani zde nemůžeme být úplní. Lebesgue je např. tvůrcem pojmu regulárního bodu, dokázal řadu tvrzení o chování superharmonických funkcí apod. Zajímavá je jeho kritika klasické Neumannovy metody pro řešení Dirichletovy úlohy a za zmínku snad stojí, že kromě jedné delší práce [4] jsou Lebesgueovy výsledky z teorie potenciálu obsaženy na několika málo stránkách v Comptes Rendus. Přitom myšlenková bohatost těchto výsledků podstatně ovlivnila další vývoj teorie potenciálu.

Všimněme si ještě krátce některých osobních Lebesgueových vlastností. Lebesgue byl velmi skromný, často až příliš. Ve svých pracích se vždy snažil přesně vymezit podíl svých předchůdců na zkoumaných výsledcích. Nedokázal se však vyhnout sporům o prioritu s Borelem. I přesto, že si jeden druhého velmi vážili a vzájemně se jeden druhému obdivovali, vlekl se tento spor poměrně dlouho. Je obtížné v něm oddělit prioritní aspekty od otázky rozdílných názorů na přístup k matematickým pojmům. Nemůžeme se zde zabývat podrobnostmi, lze však zhruba shrnout, že Lebesgue prokázal vhodnost svého přístupu a jeho výhody proti postupu, který později nastínil Borel, vymezil i náležitě ocenil Borelovy zásluhy o teorii míry a ukázal, že se před ním Borel nikde nepokusil využít své definice míry k zavedení pojmu integrálu. Podrobnosti o zmíněném sporu, řadu dalších zajímavosti a také úplný seznam Lebesgueových prací lze nalézt v [5].

Lebesgue měl rozmyšlenou celou řadu metodických otázek. Když byl např. jednou otázán, který integrál se má studentům vykládat nejdříve, bez váhání odvětil, že pochopitelně Riemannův. Zde nehrála roli skromnost nebo nedůvěra k vlastním výsledkům, ale přesvědčení, že historický pohled na problematiku integrálu je nutný. Lebesgue neměl rád výklady, ve kterých se žákům přímo prezentovaly elegantní „učesané" teorie ve své konečné formě. Spatřoval výhodu v přístupu, při kterém se žáci seznamují nejprve nepřesně s některými pojmy tak, jak se tyto pojmy vyvíjely a pak se později vše zpřesňuje „na vyšší úrovni". U pojmů a teorií kladl velký důraz na jejich původní význam ve vztahu k realitě.

V duchu svých zásad se zabýval i historií matematiky, neboť její znalost považoval za nutnou pro vědeckou práci. Je známo, že jednou na otázku, zda se zabývá historií vědy, odpověděl: „Nedělám historii vědy. Já dělám vědu!"

Své pedagogické práci věnoval Lebesgue velké úsilí a přikládal jí význam. Napsal celou řadu dobrých učebnic, které byly často překládány. Byl dobrým učitelem svých žáků – hájil zásadu, že učitel musí myslet před svými žáky, že musí stále zdokonalovat svou „matematickou kulturu" a že se musí vystříhat frázovitosti; znalost šablonovité matematiky zavrhoval a paušální návody k myšlení označoval jako matematiku v pilulkách.

Zbylo toho ještě mnoho, co by se dalo na tomto místě o Lebesgueovi říci. Dobrý otec svých dvou dětí, srdečný člověk, zábavný a družný společník, trochu plachý, ale často hýřící vtipem a lehkou ironií... Nezbylo však místo ani na oslnivý slavnostní závěr, zdůrazňující jeho velikost a výjimečnost. Henri Lebesgue to však naštěstí nepotřebuje.

Literatura

[1] T. Hawkins: *Lebesgue's theory of integration*, The University of Wisconsin Press, Madison, 1970.
[2] H. Lebesgue: *Intégrale, longueur, aire*, Ann. Mat. Pura Appl. *7* (1902), 231–359.
[3] H. Lebesgue: *Sur les fonctions représentables analytiquement*, J. Math. Sér. 16, *1* (1905), 139–216.
[4] H. Lebesgue: *Sur le problème de Dirichlet*, Rend. Circ. Mat. Palermo *24* (1907), 371–402.
[5] H. Lebesgue: *Oeuvres scientifiques*, vol. I, L'Enseignement Mathématique, Genève, 1972.

Mnohé koncepce jsou velmi vzdálené vyučování matematice jako řízenému objevování. Požadavek přesnosti a systematičnosti, který popoháněl navrhovatele, není pro žáka působivý, protože mu k tomu scházejí všecky předpoklady. Má žák napodobovat učitele, jehož hryžou výčitky svědomí? Žáka přece nic nehryže....

Bojím se ovšem, že u školských odborníků poplatných ve vyučování moderní matematice a modernímu pojetí přesnosti, hraje roli ještě něco jiného: ne svědomí, ale strach, aby se nepokládalo za neúplnost, když připustí — řekněme — že pojem limity se neprobírá exaktně nebo že geometrická axiomatika je v (obertertii) 5. třídě gymnázia nemožná.

Hans Freudenthal, 1963