Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Raymond M. Smullyan

Matematické hádanky (autorské řešení)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 24 (1979), No. 5, 288--289

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137961

Matematické hádanky (autorské řešení)*)

1

I. (a) Ano, stačí pronést tento jediný výrok: „Nejsem rytíř."

(b) Jistě, je dostačující vyslovit tento nepravdivý výrok: „Jsem podvodník."

(c) Nyní je úkol krále záludnější. Musíte vybrat nějaké tvrzení, jehož pravdivostní hodnotu král nezná — například, že máte ve své kapse v tomto okamžiku právě 11 dolarů. Pak výrok: „Buď jsem normální smrtelník a mám nyní ve své kapse právě 11 dolarů, nebo jsem podvodník" je tvrzení, které splňuje královy podmínky. Ani rytíř, ani podvodník nemohou tento výrok pronést a navíc je uvedený výrok pravdivý tehdy a jen tehdy, máte-li v tomto okamžiku v kapse opravdu právě 11 dolarů, což králi není známo.

II. Žádný, ani sebevětší počet výroků vám neumožní přesvědčit krále, že nejste „normální". Cokoliv totiž řeknete, může vyslovit i normální smrtelník, neboť jemu je dovoleno říkat vše, pravdu i lež.

2

Vhodnou otázkou je například otázka: Je Bal správná odpověď na otázku, zda výrok „Vy jste pravdomluvný" je ekvivalentní s výrokem „Na ostrově je ukryté zlato"? Jestliže domorodý obyvatel odpoví „Bal", nachází se na ostrově zlatý poklad, řekne-li však „Do", není pověst pravdivá. Důkaz se přenechává čtenáři.

3

Nejprve si dokážeme toto lemma:

Lemma: Ke každé registrované množině A existuje číslo n tak, že osoba „O_n" je rytířem, právě když $n \in A$.

Důkaz: Nechť A je libovolná registrovaná množina. Symbolem A^x označme množinu všech těch čísel n, k nimž existuje v A alespoň jedno číslo s n asociované. Podle podmínky P_5 je A^x také registrovanou množinou, její index označíme h a samu množinu A^x budeme dále značit A_h. Potom tedy platí: pro libovolné n je $n \in A_h$ právě když v A existuje nějaké číslo, které je s n asociováno; speciálně pro $n = h$ platí $h \in A_h$ tehdy a jen tehdy, existuje-li nějaké číslo v A, jež je asociováno s h.

Předpokládejme nejprve, že $h \in A_h$. Pak existuje číslo $k \in A$ tak, že k je asociováno s h. Podle definice vlastnosti „být asociován" to však znamená, že osoba O_k tvrdí, že h je pozoruhodným číslem. Poněvadž však v našem případě číslo h opravdu pozoruhodné je ($h \in A_h$), pronesla osoba O_k pravdivý výrok a musí tedy být rytířem.

Nechť nyní naopak $h \notin A_h$. Potom v A neexistuje žádné číslo asociované s h, přesto však k číslu h (které je indexovým číslem) musí alespoň jedno číslo — označme ho k — s ním asociované existovat (viz podmínku P_4); číslo k však zřejmě nepatří do A. V tomto případě opět O_k prohlašuje, že h je pozoruhodným číslem; my však víme, že tomu tak není ($h \notin A_h$). Osoba O_k je proto podvodník.

Lemma jsme tedy v obou případech dokázali.

(a) Buď E množina Gödelových čísel všech pravoplatných rytířů. Potom E i její doplněk E' jsou registrované množiny (viz P_1 a P_3). Podle právě dokázaného lemmatu existuje číslo k tak, že osoba O_k je rytířem, právě když $k \in E'$. Z definice množiny E plyne, že $k \in E'$ tehdy a jen tehdy, když O_k není pravoplatným rytířem. To však znamená, že O_k je buď rytířem, který není pravoplatný, anebo podvodníkem, který je zároveň pravoplatným rytířem. Protože tato druhá možnost zřejmě nenastane, prokázali jsme existenci alespoň jednoho nepravoplatného rytíře.

Pokud jde o existenci alespoň jednoho nenapravitelného podvodníka (kterou podmínka P_3 nezaručuje), budeme postupovat obdobně jako v předchozím případě. Nyní stačí aplikovat výše uvedené lemma na množinu — označme ji F — Gödelových čísel všech nenapravitelných podvodníků. Dostáváme existenci takového čísla n, že O_n je rytířem, právě když $n \in F$; tedy osoba O_n je rytíř tehdy a jen tehdy, je-li nenapravitelný podvodník. Poněvadž O_n nemůže být zároveň obojím, tj. rytířem i nenapravitelným podvodníkem, musí platit, že není ani jedním z nich. Tedy osoba O_n je podvodníkem, ale nikoliv nenapravitelným.

(b) Předpokládejme, že množina K Gödelových čísel všech rytířů je registrovanou množinou. Potom podle podmínky P_3 i její doplněk K' má tuto vlastnost. To však znamená (viz výše uvedené lemma), že existuje číslo k tak, že O_k je rytířem právě když $k \in K'$. Z definice množiny K

*) Viz: R. M. SMULLYAN: *Matematické hádanky.* PMFA 4/1979, str. 212.

však plyne, že $k \in K'$ platí právě tehdy, když O_k není rytířem. Tedy osoba O_k je rytířem tehdy a jen tehdy, když jím není; tím dospíváme ke sporu. Množina Gödelových čísel všech rytířů ostrova nemůže tedy být registrovanou množinou.

4

Nechť A je libovolný pták z naší posloupnosti a nechť P je ptáček posměváček. Pak podle podmínky P_2 (kde B nahradíme P) existuje pták B_h (v P_2 jsme ho označovali C) tak, že pro každé celé kladné n je $A(P(n)) = B_h(n)$. Poněvadž však $P(n) = B_n(n)$ pro libovolné n (viz P_1), lze psát $A(B_n(n)) = B_h(n)$. Speciálně pro $n = h$ odsud dostáváme $A(B_h(h)) = B_h(h)$. Tedy pták A si oblíbil číslo $B_h(h)$, čímž je první část problému vyřešena (A byl libovolný člen posloupnosti!).

Poněvadž jsme již dokázali, že každý z ptáků si oblíbil nějaké číslo a ptáček posměváček je též členem naší posloupnosti, existuje číslo — označme ho k — tak, že $P(k) = k$ — tj. k je to číslo, které si posměváček oblíbil. Z podmínky P_1 však vyplývá, že $P(k) = B_k(k)$, a tedy $B_k(k) = k$, což znamená, že pták B_k je egocentrický.

5

Pro libovolné květiny A, B nechť $A \downarrow B$ je ta květina, která je modrá právě v těch dnech, kdy obě květiny A, B jsou červené (takových květin nemůže být podle P_1 více než jedna). Nechť A' označuje květinu $A \downarrow A$. Potom A' má zřejmě vždy barvu odlišnou od květiny A. Nechť dále $A \cap B$ reprezentuje květinu $A' \downarrow B'$; pak $A \cap B$ je modrá právě v těch dnech, kdy A i B jsou obě modré. Označme ještě $A \cup B = (A \downarrow B)'$. Květina $A \cup B$ je modrá právě v ty dny, kdy alespoň jedna z květin A, B je modrá. Množina všech květin v Jiříkově zahradě tvoří Booleovu algebru vůči právě definovaným operacím $\cap$, $\cup$, $'$. Poněvadž počet členů libovolné konečné Booleovy algebry je roven mocnině čísla 2, má (díky podmínce P_3) Jiřík ve své zahrádce právě 256 kouzelných květin.

---

jubilea & zprávy

ZEMŘEL DOC. JOSEF SCHMIDTMAYER, CSc.

Dne 23. dubna 1979 zemřel v Praze ve věku necelých šedesátipěti let vynikající vysokoškolský učitel doc. Josef Schmidtmayer, CSc., docent elektrotechnické fakulty Českého vysokého učení technického.

Josef Schmidtmayer se narodil 26. září 1914 v dělnické rodině v Českých Budějovicích. Svá středoškolská studia absolvoval na tamním reformním reálném gymnáziu a v r. 1933 je ukončil maturitou s vyznamenáním. Potom jako nadaný a nemajetný student byl přijat do Hlávkovy studentské koleje, a tak mohl pokračovat ve studiu svých oblíbených předmětů, matematiky a deskriptivní geometrie, na přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy. Studium matematiky a deskriptivní geometrie úspěšně ukončil druhou státní zkouškou v roce 1938. V poslední třetině studia si navíc zapsal přednášky z pojistné matematiky a statistiky. Uzavření českých vysokých škol v roce 1939 mu znemožnilo dokončit toto další specializované studium. Než byl přijat jako výpomocný učitel na dívčím reálném gymnáziu v Praze VII, živil se po celý rok kondicemi. Od roku 1941 pracoval v továrně Letov v Letňanech jako technický úředník v oddělení aerodynamiky. Tam získal zkušenosti s aplikacemi matematiky v mechanice. Po osvobození byl do roku 1951 pracovníkem v Ústavu aerodynamiky nástavbového učebního běhu pro letectví na tehdejší fakultě strojního a elektrotechnického inže-