Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jaroslav Pachner

Relativistická kosmologie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 11 (1966), No. 6, 348--363

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138014

Literatura

[1] P. G. Bergmann: Instroduction to the Theory of Relativity. New York, 1942.
[2] J. L. Synge: Relativity: The Special Theory. Amsterdam, 1956.
[3] L. Witten: Gravitation: an introduction to current research, New York, 1962.
[4] M. A. Tonnelat: Les Principes de la Théorie Électromagnétique et de la Relativité (ruský překlad) Moskva, 1962.
[5] A. Einstein: Ann. d. Phys. *49*, 769, 1916.
[6] J. L. Synge: Tensor Calculus, Toronto, 1952.
[7] A. J. McConnel: Application of Tensor Analysis, New York 1957 (ruský překl.).
[8] V. A. Fok: Tĕorija prostranstva, vremeni i tjagotĕnija, Moskva 1961.
[9] C. Møller: The Theory of Relativity, Oxford 1961.
[10] L. D. Landau, I. M. Lifšic: Tĕorija polja, Moskva 1960.
[11] K. Schwarzschild: Sitz. d. Preuss. Akad. d. Wiss., *189*, 1916.
[12] A. Trautman: Lectures on General Relativity, London, 1958.
[13] V. L. Ginzburg ve sborníku: Einstein i sovremennaja fyzika, Moskva 1956.
[14] I. I. Shapiro: Phys. Rev. Lett., Vol. *13*, No. 26, p. 789, 1964.
[15] Gravitation and Relativity, Ed. by Hong-Yee Chiu and W. F. Hoffman, N. York, 1964.
[16] Gravitacija i topologija (sborník), Redakce D. Ivaněnka, Moskva, 1966.
[17] Einštejnovkij sbornik 1966, Redakce I. E. Tamma a B. Kuzněcova, Moskva, 1966.

RELATIVISTICKÁ KOSMOLOGIE

Jaroslav Pachner, Praha

HISTORICKÝ VÝVOJ VĚDECKÉ KOSMOLOGIE

S prvním pokusem o vybudování kosmologie, založeným nikoliv na dohadech, nýbrž na přírodovědecké teorii, se setkáváme již u Newtona. Ten ukázal, že kdyby hvězdný systém tvořil jediný hmotný ostrov v nekonečném prázdném eukleidovském prostoru, musela by se za čas veškerá hmota soustředit do jediného tělesa. Z toho Newton usuzoval, že hvězdy jsou přibližně rovnoměrně rozloženy po celém nekonečném prostoru.

S koncepcí prostorově nekonečného a statického vesmíru by však byly spojeny tři paradoxy. V r. 1826 odvodil Olbers [1], že hvězdy rovnoměrně rozložené po celém nekonečném prostoru by musely vytvořit podstatně vyšší jasnost nočního nebe, než jaká je vskutku pozorována (fotometrický paradox). V r. 1865 rozšířil Clausius [2] platnost věty o entropii izolované termodynamické soustavy na celý vesmír a došel k závěru, že vesmír nemůže mít nekonečné trvání, neboť se neodvratně blíží „tepelné smrti“, kdy veškerá energie bude rovnoměrně rozdělena po celém vesmíru (termodynamický paradox). Neumann [3] v r. 1874 a V. Seeligert [4] v r. 1895 poukázali na gravitační paradox: V nekonečném vesmíru s rovnoměrně rozloženou hmotou by síla Newtonova gravitačního pole, vytvořeného všemi hvězdami vesmíru a působícího na dané těleso, byla neurčitá a rychlost pohybu nebeských těles by musela být mnohem vyšší, než kolik udávají astronomická pozorování.

Nemožnost uspokojivě vysvětlit tyto tři paradoxy na podkladě představ fyziky 19. století způsobila odklon vědeckého zájmu od problémů kosmologie. Teprve EINSTEINOVA první kosmologická práce [5] v r. 1917 vyvolala zásadní obrat. Zatímco Einstein v této práci předpokládal ještě statický vesmír, setkáváme se ve FRIEDMANOVĚ pojednání [6] poprvé s nestatickým expandujícím modelem vesmíru, zprvu Einsteinem odmítnutým [7], později velmi příznivě oceněným [8, 9]. Již rok nato uvedl EDDINGTON ve své knize [10], v níž se ještě nezmiňuje o Friedmanově práci [6], tabulku rudého posuvu spektrálních čar světla vysílaného vzdálenými galaxiemi, avšak teprve v r. 1929 HUBBLE [11] jasně prokázal, že existuje přímá úměra mezi rudým posuvem spektrálních linií a vzdáleností galaxie, jež je vyzařuje. Přes veškerou snahu vysvětlit tento jev jinak nebylo nalezeno jiné řešení než připustit, že rudý posuv je působen Dopplerovým jevem — galaxie se od nás vzdalují, a to tím rychleji, čím jsou vzdálenější.

V r. 1934 MCCREA a MILNE [12] ukázali, že je možno vybudovat fyzikálně názornou newtonovskou kosmologii, jež popisuje vzdalování galaxií naprosto stejnou funkcí jako kosmologie relativistická; rozdíl je pouze ve fyzikální interpretaci jednotlivých veličin. Newtonovská kosmologie se výborně hodí v dnešním stadiu vývoje vesmíru ke studiu menších oblastí vesmíru stanovených podmínkami, že jejich rozměry jsou podstatně nižší, než je poloměr zakřivení kosmického prostoru, a v nichž je rychlost expanze přiměřeně nižší než světelná (čemuž odpovídá oblast o průměru až asi do jedné miliardy světelných roků), avšak nehodí se ke zkoumání chování celého vesmíru.

V letech 1935/1936 dospěl ROBERTSON [13] a nezávisle na něm WALKER [14] k velice závažnému poznatku, odvozenému bez odvolání na obecnou teorii relativity, že metrika kosmického prostoročasu je riemannovská.

Posledním mezníkem ve vývoji kosmologie, o němž se v tomto přehledu zmíníme, je druhé vydání Einsteinovy knihy (z r. 1945 [9]), jež je doplněno dodatkem „O kosmologickém problému“. Od té doby již nepoklesl ve vědeckém světě zájem o relativistickou kosmologii.

Vedle relativistické kosmologie vznikla v r. 1948 tzv. „steady-state theory“ [15, 16]. Ve smyslu úvah McCrea [17] budeme ji považovat za speciální druh relativistické kosmologie a z tohoto hlediska ji zahrneme do našeho výkladu. Naproti tomu nemůžeme zde věnovat pozornost Milneově kinematické relativitě [18] a kosmologickým teoriím DIRACOVĚ [19], Eddingtonově [20] a JORDANOVĚ [21], které nevzbudily většího ohlasu ve vědecké veřejnosti. S těmito teoriemi se můžeme seznámit buď v citovaných původních pracích, anebo v monografiii BONDIHO [22] či VOGTOVĚ [23]. V české literatuře se zabývá relativistickou kosmologií i přehledný článek autorův [24]. Riemannovská geometrie se zpravidla studuje z knihy EISENHARTOVY [25] nebo RAŠEVSKÉHO [26].

Již od doby Newtonovy se předpokládalo, že hmota ve vesmíru (pozorována v dostatečně velkém měřítku), je rozložena rovnoměrně a izotropně po celém kosmickém prostoru. Této hypotézy užil i Einstein ve své první kosmologické práci [5], i když astronomická měření poskytovala pro ni tehdy jen malou podporu.

Nejzávažnější důkaz pro rovnoměrné a izotropní rozložení hmoty ve vesmíru vyplynul z Hubbleova objevu [11] o rudém posuvu spektrálních čar světla vysílaného vzdálenými galaxiemi. Z Hubbleova zákona

$$\dot{\boldsymbol{r}} = H\boldsymbol{r}\,, \tag{1.1}$$

v němž tečkou označujeme derivaci podle času a $H = H(t)$ tzv. Hubbleův parametr (dříve častěji zvaný Hubbleova „konstanta"), a z pozorovaného počtu galaxií o dané velikosti rudého posuvu můžeme usuzovat, do jaké míry je rozložení hmoty ve vesmíru homogenní a izotropní. Veškerá pozorování v oblasti viditelného světla i radioastronomická, i v těch nejvzdálenějších oblastech vesmíru dosažitelných dnešními přístroji, jsou empirickými důkazy ve prospěch kosmologického principu (v užším slova smyslu):

Nehledíme-li k lokálním nerovnoměrnostem v rozložení hmoty, vesmír se jeví každému pozorovateli nacházejícímu se relativně ke svému okolí v klidu na kterémkoliv místě ve stejném časovém okamžiku stejně.

Z rozboru pozorovaného radiálního pohybu galaxií [10] ukázal již v r. 1923 WEYL [27], že je možno do kosmologie zavést univerzální kosmický čas, definovaný jako vlastní čas pozorovatele, jenž se na libovolném místě zúčastňuje tohoto všeobecného pohybu (působícího jako synchronizující činitel pro měření kosmického času).

Myšlenkovými experimenty, při nichž užíval jen hodin měřících kosmický čas, theodolitů a světelných signálů, dokázal Robertson [13] na základě těch nejjednodušších poznatků pozemské fyziky za pomoci Helmholtzova-Lieova teorému z teorie spojitých grup transformací, že každý prostoročas splňující kosmologický princip vede nutně k Riemannově metrice s prostorově konstantní křivostí, vykazující tyto dvě závažné vlastnosti: (a) Světočára každého fundamentálního pozorovatele (tj. takového, jenž se nachází v klidu ke svému okolí) je geodetická linie této metriky a jeho vlastní čas je univerzálním kosmickým časem. (b) Světočára každého světelného signálu je geodetická nulová linie této metriky.

Podobnými ryze kinematickými úvahami za použití teorie grup dospěl nezávisle k témuž výsledku i Walker [14].

Je velmi důležité mít na paměti, že Riemannova geometrie byla takto zavedena do kosmologie jako důsledek kosmologického principu a nejelementárnějších poznatků pozemské fyziky, avšak bez jakéhokoliv odvolání na obecnou teorii relativity. Zapíšeme-li příslušnou metriku ve tvaru

$$(1.2) \qquad \mathrm{d}s^2 = -\frac{(G(t)/G_0)^2}{(1 + kr^2/4G_0^2)^2}(\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2) + c^2\,\mathrm{d}t^2\,,$$

kde

$$(1.3) \qquad \mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2$$

a c označuje rychlost světla, pak geodetická linie každého fundamentálního pozorovatele je určena rovnicemi

$$(1.4) \qquad r = \text{konst.}, \quad \vartheta = \text{konst.}, \quad \varphi = \text{konst.}\,,$$

a jeho časová souřadnice t je totožná s jeho vlastním časem, a tím tedy podle definice i s kosmickým časem. Vzdálenost l_1 měřená tuhými tyčemi v okamžiku T_1 mezi dvěma fundamentálními pozorovateli, z nichž jeden nechť se pro zjednodušení výpočtu nachází v počátku ($r_0 = 0$) a druhý má radiální souřadnici r_1, je dána vztahem plynoucím z metriky (1.2)

$$(1.5) \qquad l_1 = (G(T_1)/G_0)\int_0^{r_1}(1 + kr^2/4G_0^2)^{-1}\,\mathrm{d}r\,.$$

Vidíme, že v důsledku expanze (případně kontrakce) vesmíru je tato vzdálenost závislá na čase. Rychlost tohoto pohybu zjistíme derivováním podle t a jednoduchou úpravou, jejímž výsledkem je vztah

$$(1.6) \qquad \dot{l}_1 = Hl_1\,,$$

kde

$$(1.7) \qquad H = \dot{G}/G$$

je Hubbleův parametr. Rovnice (1.6) je, jak patrno, totožná s Hubbleovým empirickým zákonem (1.2).

Vzhledem k tomu, že Riemannova geometrie připouští libovolné transformace souřadnic, můžeme se stejným oprávněním místo metriky (1.2) užívat metriky

$$(1.8) \qquad \mathrm{d}s^2 = -(G(t)/G_0)^2\,\{(1 - k\tilde{r}^2/G_0^2)^{-1}\,\mathrm{d}\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2\,\mathrm{d}\Omega^2\} + c^2\,\mathrm{d}t^2\,,$$

k níž dospíváme z (1.2) transformací souřadnice r

$$(1.9) \qquad \tilde{r} = r/(1 + kr^2/4G_0^2)\,.$$

Další transformací souřadnice $\tilde{r}$

$$(1.10a) \qquad \tilde{r} = G_0\sin\chi, \ (k = +1)\,,$$

$$(1.10b) \qquad \tilde{r} = G_0\chi, \ (k = 0)\,,$$

$$(1.10c) \qquad \tilde{r} = G_0\sinh\chi, \ (k = -1)\,,$$

je možno převést metriku (1.8) do tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = -G^2(t)\,(\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\,\mathrm{d}\Omega^2) + c^2\,\mathrm{d}t^2, (k = +1)\,, \tag{1.11a}$$

$$\mathrm{d}s^2 = -G^2(t)\,(\mathrm{d}\chi^2 + \chi^2\,\mathrm{d}\Omega^2) + c^2\,\mathrm{d}t^2, (k = 0)\,, \tag{1.11b}$$

$$\mathrm{d}s^2 = -G^2(t)\,(\mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi\,\mathrm{d}\Omega^2) + c^2\,\mathrm{d}t^2, (k = -1)\,. \tag{1.11c}$$

Ryze kinematické úvahy, z nichž vycházeli Robertson i Walker, nejsou s to, určit v metrice (1.2), resp. (1.8), (1.11a, b, c) hodnotu konstanty k, jež může nabývat hodnot $+1$, 0, -1 podle toho, zda prostor je kladně, nulově či záporně zakřiven, a funkci $G(t)$ popisující zakřivení prostoru ($G(t)$ je poloměr zakřivení prostoru, konstanta G_0 byla zavedena z dimenzionálních důvodů). Základním úkolem kosmologie je určit vztah mezi těmito oběma veličinami a fyzikálními zákony pole, v němž se zkušební kosmická tělíska (tj. seskupení galaxií) pohybují.

Ve „steady-state theory“ Bondi a Gold [15] předpokládají, že zákony fyziky nesmějí záviset na vývojovém stadiu vesmíru; tomu je podle nich možno nejsnáze vyhovět, bude-li vesmír trvale v ustáleném stavu. Proto považovali za nutné nahradit kosmologický princip v užším slova smyslu tzv. dokonalým kosmologickým principem:

Nehledíme-li k lokálním nerovnoměrnostem v rozložení hmoty, vesmír se jeví každému pozorovateli nacházejícímu se relativně ke svému okolí v klidu na kterémkoliv místě a v kterémkoliv časovém okamžiku stejně.

Protože se náš vesmír rozpíná, může být dokonalý kosmologický princip uveden ve shodu s empirickými daty jen tehdy, když v metrice (1.2) položíme

$$k = 0,\quad G(t)/G_0 = \exp Ht,\quad H = \text{konst.} \tag{1.12}$$

Ve „steady-state theory“ je tedy dokonalý kosmologický princip, matematicky vyjádřený metrikou (1.2) spolu s (1.12) prvním přírodním zákonem. Základním úkolem kosmologie je určit fyzikální pole, jež tomuto principu vyhovuje. O vyřešení tohoto úkolu se pokusil Hoyle [16] a McCrea [17].

ROVNICE POLE

Poznali jsme, že při kosmologických úvahách je třeba vycházet z riemannovské geometrie, jež s sebou nese i požadavek obecné kovariance hledaných rovnic pole. Ze zkušenosti víme, že rozhodující silou v chování vesmíru je síla gravitační. Einstein přesvědčivě ukázal (viz např. [9]), že z rovnomocnosti hmoty tíhové a setrvačné vyplývá princip ekvivalence, podle něhož nelze rozlišit, zda gravitační účinky působící na měřicí přístroje jsou vyvolávány gravitačním polem či zrychlením těchto přístrojů. Z toho pak dále vyplynulo, že 10 složek metrického tenzoru je třeba ztotožnit s gravitačními potenciály. Rovnice pole je potom možno jednoznačně odvodit z těchto tří požadavků ([9]; při prvním odvození rovnic pole postupoval Einstein poněkud odlišně [28, 29]):

(1) Rovnice pole nesmí obsahovat vyšší derivace $g_{\mu\nu}$ než druhé.

(2) Musí být lineární a homogenní v těchto druhých derivacích.

(3) Jejich divergence musí vymizet identicky.

První dvě podmínky jsou převzaty z Poissonovy rovnice newtonovské teorie gravitace.

Z riemannovské geometrie je známo [25, 26], že danou metriku je možno převést vhodnou transformací souřadnic do Minkowskiho tvaru jen tehdy, když vymizí Riemannův-Christoffellův tenzor křivosti čtvrtého stupně

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} = 0 . \tag{2.1}$$

Přítomnost gravitačního pole se musí projevit v nemožnosti převést danou metriku do Minkowskiho tvaru. Proto musí gravitační pole nějak souviset s Riemannovým-Christoffelovým tenzorem křivosti čtvrtého stupně. Matematicky lze dokázat, že všechny diferenciální tenzory, jež lze algebraicky (tj. bez derivování) vytvořit z Riemannova-Christoffelova tenzoru, musí mít tvar

$$R_{\mu\nu} + aRg_{\mu\nu} , \tag{2.2}$$

kde

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha} , \quad R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} . \tag{2.3}$$

Podmínku (3) lze splnit, jen když ve výrazu (2.2) konstanta $a = -\frac{1}{2}$. Všem třem podmínkám bude vyhověno, jestliže k výrazu (2.2) připojíme ještě člen $\lambda g_{\mu\nu}$ a tento nový výraz považujeme za úměrný tenzoru hmoty $T_{\mu\nu}$. Tak dostávají rovnice pole obecné relativity tvar

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = -(8\pi\gamma/c^2)\, T_{\mu\nu} , \tag{2.4}$$

v němž γ označuje Newtonovu gravitační konstantu. Zúžený Riemanňův-Christoffelův tenzor $R_{\mu\nu}$, zvaný též tenzor Ricciho, je dán formulí

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \alpha\nu \end{Bmatrix} , \tag{2.5}$$

v níž Christoffelovy symboly druhého druhu určuje vztah

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \nu\mu \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) . \tag{2.6}$$

Kontravariantní složky $g^{\mu\nu}$ metrického tenzoru jsou dány systémem rovnic

$$g^{\mu\nu} g_{\sigma\nu} = \delta^{\mu}_{\sigma} , \tag{2.7}$$

přičemž δ^μ_σ jsou složky Kroneckerova smíšeného tenzoru

$$\delta^\mu_\sigma = \begin{cases} 1, & (\mu = \sigma), \\ 0, & (\mu \neq \sigma). \end{cases}$$

Poznamenejme ještě, že Einstein připojil kosmologický člen $\lambda g_{\mu\nu}$ do rovnic pole (2.4) teprve ve své první kosmologické práci [5]. Později se ho zřekl [9], protože, jak sám praví, jeho zavedení vážně snižuje logickou jednoduchost celé teorie a bylo ospravedlněno jen obtížemi, které vznikly v jeho první kosmologické práci ze zavedení konečné nenulové průměrné hustoty hmoty do tenzoru $T_{\mu\nu}$ a ze současného předpokladu o statičnosti vesmíru. Kdyby v oné době byl už znám Hubbleův zákon (1.1), nikdy by k zavedení kosmologického členu do rovnic pole nebylo došlo.

Z Riemannovy geometrie je známo, že divergence levé strany rovnice (2.4) identicky vymizí (ve shodě s podmínkou (3)). V důsledku toho musí i na pravé straně vymizet divergence tenzoru $T_{\mu\nu}$:

$$T^\nu_{\mu;\nu} = 0 \tag{2.8}$$

Středník zde označuje kovariantní Riemannovu derivaci.

RELATIVISTICKÁ KOSMOLOGIE

Jak patrno z rovnice (1.2), pouze čtyři složky metrického tenzoru jsou v této metrice od nuly odlišné:

$$\begin{cases} g_{11} = -\dfrac{(G(t)/G_0)^2}{(1 + kr^2/4G_0^2)^2}, & g_{22} = -\dfrac{(G(t)/G_0)^2}{(1 + kr^2/4G_0^2)^2}\, r^2, \\ g_{33} = -\dfrac{(G(t)/G_0)^2}{(1 + kr^2/4G_0^2)^2}\, r^2 \sin^2 \vartheta, & g_{44} = c^2. \end{cases} \tag{3.1}$$

Kontravariantní složky určené systémem rovnic (2.7) mají v daném případu obzvlášť jednoduchý tvar

$$g^{\mu\nu} = 1/g_{\mu\nu}, \quad (\mu = \nu). \tag{3.2}$$

Dosadíme-li tyto veličiny (3.1) a (3.2) do (2.6), seznáme, že pouze následující Riemannovy-Christoffelovy symboly druhého druhu jsou od nuly odlišné:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix} = -(kr/G_0^2)/(1 + kr^2/4G_0^2), \tag{3.3}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = r(1 - kr^2/4G_0^2)/(1 + kr^2/4G_0^2),$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 33 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} \sin^2 \vartheta ,$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 14 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 41 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 24 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 42 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 34 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 43 \end{Bmatrix} = \dot{G}/G ,$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 13 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 31 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} r^{-2} ,$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 33 \end{Bmatrix} = - \sin \vartheta \cos \vartheta ,$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 23 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 32 \end{Bmatrix} = \operatorname{cotg} \vartheta ,$$

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 11 \end{Bmatrix} = (G\dot{G}/c^2G_0^2)/(1 + kr^2/4G_0^2) ,$$

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 22 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 11 \end{Bmatrix} r^2 ,$$

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 33 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 11 \end{Bmatrix} r^2 \sin^2 \vartheta .$$

Tyto symboly dosadíme nyní do rovnice (2.5), vypočteme podle (2.3) skalár R a společně dosadíme do rovnic pole. Ty budou mít v daném případě obzvlášť jednoduchý tvar, přejdeme-li od kovariantních složek ke smíšeným

(3.4) $$R_\mu^\nu - \tfrac{1}{2}R\delta_\mu^\nu + \lambda\delta_\mu^\nu = -(8\pi\gamma/c^2)\, T_\mu^\nu .$$

Předpokládáme-li, že hmota je tvořena „kosmickým prachem" bez vnitřního tlaku, pak v souřadnicové soustavě, v níž podle (1.4) je hmota trvale v klidu,

(3.5) $$T_4^4 = \varrho , \quad \text{ostatní } T_\mu^\nu = 0 .$$

ϱ označuje hustotu hmoty.

Z deseti rovnic pole (3.4) pouze čtyři se liší od nuly. Z nich tři, pro $\mu = \nu = 1, 2, 3$, jsou totožné

(3.6) $$(2\ddot{G}/c^2G) + (\dot{G}/cG)^2 + (k/G^2) - \lambda = 0 .$$

Pro čtvrtou složku ($\mu = \nu = 4$) platí rovnice

(3.7) $$3(\dot{G}/cG)^2 + (3k/G^2) - \lambda = (8\pi\gamma/c^2)\, \varrho .$$

Objem vesmíru měřený tuhými tyčemi je v riemannovské geometrii dán výrazem

(3.8) $$V = \iiint |\det g_{ij}|^{1/2}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 , \quad (i, j = 1, 2, 3) .$$

Integrování je nejsnažší, dosadíme-li sem metriku (1.11a b, c). V případě nulového ($k = 0$) nebo záporného ($k = -1$) zakřivení prostoru je horní hranice proměnné $x_1 \equiv \chi$ nekonečno a dolní nula, takže objem vesmíru je v obou těchto případech nekonečný. Naproti tomu při kladném zakřivení prostoru ($k = +1$) máme

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |G(t)|^3 \sin^2 \chi \sin \vartheta \, d\chi \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi^2 |G(t)|^3 . \tag{3.9}$$

Přestože objem celého vesmíru je konečný, není zde žádného okraje (říkáme, že prostor je neomezený). Žádný bod tohoto sférického prostoru nemá přednostní postavení před druhými – není zde žádného středu.

Jak plyne z transformačních formulí (1.10a), (1.9), bylo by třeba jako horní mez proměnné x_1 položit v metrice (1.8) hodnotu G_0 a v metrice (1.2) hodnotu $2G_0$ a objem vypočtený podle formule (3.8) vzít pak dvojnásobně. Kdybychom vypočtený objem nezdvojnásobili, znamenalo by to položit ve formuli (3.9) při použití metriky (1.11a) horní mez proměnné χ rovnu $\pi/2$. Tento prostor se nazývá eliptický, neboť dva protilehlé body sférického prostoru jsou v něm považovány za projektivní zobrazení jednoho a téhož fyzikálního bodu (podrobnosti viz [10] § 68 nebo [30]).

Za předpokladu, že kosmologická konstanta je rovna nule, odvodíme z rovnice (3.7) a (3.6) dva důležité vztahy. Poloměr zakřivení prostoru je dán rovnicí

$$k/G_1^2 = (8\pi\gamma/3c^2)\,\varrho_1 - (H_1/c)^2 , \tag{3.10}$$

v níž index „1" označuje okamžité hodnoty příslušných veličin v libovolně zvoleném okamžiku $t = T_1$. O tom, zda prostor je kladně, nulově či záporně zakřiven ($k = +1, 0, -1$), rozhoduje, jak patrno z (3.10), průměrná hustota hmoty a velikost Hubbleova parametru H, již možno určit astrofyzikálními měřeními.

Tato měření udávají též číselnou hodnotu další veličiny zvané „decelerační parametr" a definované výrazem

$$q = -\ddot{G}/GH^2 . \tag{3.11}$$

Z rovnic (3.6) a (3.7) dostáváme závažnou relaci

$$q_1 H_1^2 = (4\pi/3)\,\gamma\varrho_1 , \tag{3.12}$$

která spojuje tři nezávisle měřitelné veličiny ϱ_1, H_1, q_1.

Podle toho, jakých hodnot nabývají veličiny ϱ, k, λ, rozeznáváme různé modely vesmíru.

MODEL EINSTEINŮV

Einstein [5] si jasně uvědomil, že všechny obtíže spojené s určením okrajových podmínek při kosmologických úvahách odpadnou, jestliže předpokládáme prostorově konečný, ale neomezený vesmír. Podobně jako Newton také Einstein však ještě považoval náš vesmír za statický. Aby dostal řešení rovnic pole vyhovující těmto dvěma předpokladům, byl nucen na jejich levou stranu připojit kosmologický člen $\lambda g_{\mu\nu}$, který se v původně odvozených rovnicích [28, 29] ještě nevyskytoval.

Abychom dostali rovnice pole popisující chování Einsteinova modelu, postačí dosadit do obecně platných rovnic (3.6) a (3.7)

$$\mathrm{k} = +1\,, \quad G(t) = G_0 = \text{konst.}, \tag{4.1}$$

čímž ony dvě rovnice přecházejí do tvaru

$$(1/G_0^2) - \lambda = 0\,,$$
$$(3/G_0^2) - \lambda = (8\pi\gamma/c^2)\,\varrho_0\,.$$

Odtud snadno vypočteme formuli

$$G_0 = \lambda^{-1/2}\,, \tag{4.2}$$

určující vztah mezi poloměrem zakřivení prostoru a kosmologickou konstantou, a rovnici

$$\varrho_0 = c^2\lambda/4\pi\gamma\,, \tag{4.3}$$

udávající závislost mezi průměrnou hustotou hmoty a kosmologickou konstantou.

Objem Einsteinova vesmíru, daný formulí (3.9), je konečný a vzhledem k (4.1) konstantní:

$$V = 2\pi^2 G_0^3\,. \tag{4.4}$$

Celková hmota Einsteinova vesmíru je rovněž konečná. Dostaneme ji vynásobením rovnic (4.3), (4.4) při současném použití formule (4.2):

$$M = \varrho_0 V = (\pi c^2/2\gamma)\,G_0 = (\pi c^2/2\gamma)\,\lambda^{-1/2} \tag{4.5}$$

Einstein se domníval, že řešení rovnic pole (2.4), resp. (3.4) s kosmologickým členem a s homogenním a izotropním rozložením hmoty existuje jen tehdy, když hustota hmoty je od nuly odlišná, a že tedy jeho model vesmíru je jediným, jenž vyplývá z obecné teorie relativity.

MODEL DE SITTERŮV

Krátce po Einsteinově práci [5] dokázal de Sitter [31], že existuje netriviální řešení rovnic pole (3.4) i v tom případě, když tenzor T_μ^ν zcela vymizí. Je možno je vyjádřit též metrikou (1.2). Dosadíme-li tentokrát do rovnic (3.6) a (3.7)

$$\varrho = 0\,, \quad \lambda \neq 0\,, \tag{5.1}$$

vypočteme

$$(5.2)\quad G(t)/G_0 = \begin{Bmatrix}\cosh\\ \exp\\ \sinh\end{Bmatrix} \left[ct\,(\lambda/3)^{1/2}\right], \qquad k = \begin{Bmatrix}+1\\ 0\\ -1\end{Bmatrix}, \text{ když } H \begin{Bmatrix}<\\ =\\ >\end{Bmatrix} c(\lambda/3)^{1/2}.$$

Jestliže $k = +1$, je objem de Sitterova vesmíru podle rovnice (3.9), konečný, ale závislý na čase

$$(5.3)\qquad V = 2\pi^2 G_0^3 \cosh^3 \left[ct\,(\lambda/3)^{1/2}\right].$$

Jestliže $k = 0, -1$, vesmír též expanduje, ale jeho objem je nekonečný.

Zpravidla bývá de Sitterův vesmír považován za zcela prázdný, bez sebe menší stopy hmoty. Interpretujeme-li však kosmologickou konstantu λ, jež má rozměr $(\text{délka})^{-2}$, jako hustotu hmoty $(\mu = \nu = 4)$, resp. jako negativní tlak $(\mu = \nu = 1, 2, 3)$, měřené v geometrickém systému jednotek, v němž $c = \gamma = 1$, [32], pak i tento model je – ve shodě s relativistickou formulací Machova principu [32] – zaplněn hmotou o prostorově i časově konstantní hustotě a v případě nulového zakřivení prostoru $(k = 0)$ je identický se „steady-stete universe".

Poznamenejme, že metriku de Sitterova vesmíru lze transformovat do zdánlivě statického tvaru, v němž ji původně odvodil de Sitter ([31], viz též [10] § 68 nebo [30]).

FRIEDMANOVY MODELY

Friedman první [6] vyšetřoval kosmologická řešení rovnic pole obecné relativity pro případ, že kosmologická konstanta nabývá libovolných reálných hodnot včetně nuly. Všechna jeho řešení jsou nestatická.

Jestliže $\lambda = 0$, pak kompatibilita rovnic (3.6) a (3.7) vyžaduje, aby

$$(6.1)\qquad \varrho = \varrho_1 [G_1/G(t)]^3 .$$

Zde ϱ_1 označuje hustotu hmoty v libovolném okamžiku T_1, v němž $G(T_1) = G_1$. Dosadíme-li funkci (6.1) do (3.7), obdržíme integrací

$$(6.2a)\quad t = \{3G_0/8\pi\gamma\varrho_1 G_1^3\}^{1/2} \{G_0 \arcsin (G/G_0)^{1/2} - G^{1/2}(G_0 - G)^{1/2}\}, \qquad (k = +1),$$

$$(6.2b)\quad t = \tfrac{2}{3}\{3G^3/8\pi\gamma\varrho_1 G_1^3\}^{1/2}, \quad (k = 0),$$

$$(6.2c)\quad t = \{3G_0/8\pi\gamma\varrho_1 G_1^3\}^{1/2} \{G^{1/2}(G_0 + G)^{1/2} - \operatorname{Arsinh} (G/G_0)^{1/2}\}, \qquad (k = -1).$$

Konstanta G_0 je dána obecně platným výrazem

$$(6.3)\qquad G_0 = (8\pi\gamma/3c^2)\,\varrho_1 G_1^3 .$$

U všech tří modelů dochází v okamžiku $t = 0$ k singulárnímu stavu, kdy poloměr zakřivení prostoru je roven nule. Fyzikální povahou tohoto singulárního stavu se budeme zabývat níže. Jakmile $t > 0$, začne se u všech tří modelů prostor rozpínat. Pro $k \leqq 0$ pokračuje tato expanze až do nekonečna, zatímco pro $k = +1$ je funkce $G(t)$ geometricky reprezentována cykloidou. Maximální poloměr zakřivení je pak totožný s konstantou G_0 danou rovnicí (6.3). Tohoto stavu se dosáhne v okamžiku

$$T_0 = (\pi/2)(G_0/c) = (4\pi^2\gamma/3c^2)\,\varrho_1 G_1^3\,. \tag{6.4}$$

Potom, pro $t > T_0$, dochází opět ke kontrakci vesmíru, až v okamžiku $t = 2T_0$ vesmír přichází do dalšího singulárního stavu.

Objem a celková hmota modelů s nulovým nebo záporným zakřivením prostoru ($k \leqq 0$) jsou nekonečné. Při kladném zakřivení ($k = +1$) je objem vždy konečný, o velikosti dané rovnicí (3.9). Celková hmota je, jak je patrno z rovnic (6.1) a (3.9), časově neměnná:

$$M = 2\pi^2 G_1^3 \varrho_1\,. \tag{6.5}$$

Poloměr zakřivení G_1 a konstanta k jsou dány podle rovnic (3.10) a (3.12) číselnou velikostí hustoty ϱ_1, Hubbleova parametru H_1 a deceleračního parametru q_1.

Dobu od počátku expanze až do dnešní doby, kdy $G = G_1$, jsme označili T_1. V modelu s nulovým zakřivením prostoru ($k = 0$) je tato veličina určována rovnicí (6.2b), do níž dosadíme z rovnice (3.10). Tak obdržíme jednoduchou podmínku

$$T_1 H_1 = \tfrac{2}{3}\,. \tag{6.6}$$

Dá se snadno dokázat, že prostor je kladně zakřiven, jestliže $0 < T_1 H_1 < \frac{2}{3}$. Jestliže však $\frac{2}{3} < T_1 H_1 < 1$, je prostor zakřiven záporně. Dnešní měření neudávají číselné hodnoty T_1 a H_1 s dostatečně velkou přesností, abychom mohli podle tohoto jednoduchého kritéria rozhodnout o konečnosti nebo nekonečnosti vesmíru.

Friedman [6] vyšetřoval i chování modelů, v nichž $\lambda \neq 0$. Vzhledem k tomu, že dnes sotva lze ospravedlnit zavedení kosmologického členu do rovnic pole, nebudeme tyto modely, při nichž integrace rovnic (3.7) vede na eliptické integrály, zde diskutovat. Podrobnou jejich diskusi najdeme např. v monografiích [22, 23].

„STEADY-STATE UNIVERSE“

Jestliže má být vesmír i časově neměnný, přestože se rozpíná, musí v něm stále vznikat hmota z ničeho (nejde tu o přeměnu jedné formy hmoty v jinou, jak se s ním setkáváme v kvantové fyzice). Na první pohled se zdá být tato hypotéza zcela absurdní, musíme si však uvědomit, že zákon o zachování hmoty a energie, empiricky ověřený v pozemské fyzice s nejvyšší dosažitelnou přesností, byl za exaktní přírodní zákon prohlášen, nikoliv dokázán. Nadto je dnes známo, že zákony zachování úzce souvisí se symetriemi prostoročasu.

Hoyle [16] matematicky zpracoval „steady state theory“, poprvé formulovanou

Bondim a Goldem ([15], viz též [22]) tak, že do rovnic pole obecné relativity zavedl místo kosmologického členu $\lambda g_{\mu\nu}$ nový tenzor $C_{\mu\nu}$ popisující tvoření hmoty z ničeho při expanzi prostoru. Jeho rovnice pole zní

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + C_{\mu\nu} = -(8\pi\gamma/c^2)\, T_{\mu\nu}\,. \tag{7.1}$$

Tenzor $C_{\mu\nu}$ odvozený Hoylem [15, 22, 24] ovlivňuje expanzi tak, že v metrice (1.2) je k a $G(t)$ určováno relacemi (1.12).

McCrea [17] ukázal, že není třeba do rovnic pole zavádět nový tenzor $C_{\mu\nu}$, nýbrž že postačí pozměnit fyzikální interpretaci tenzoru $T_{\mu\nu}$ v rovnicích pole (2.4) bez kosmologického členu ($\lambda = 0$). Vakuum má tedy podle McCrea jisté nenulové vlastnosti (analogicky k vakuu kvantové teorie polí) [33], jež jsou příčinou trvalého vznikání hmoty při expanzi prostoru.

Poslední astrofyzikální i radioastronomická pozorování svědčí však o tom, že hustota hmoty byla v minulých stadiích kosmického vývoje vyšší než dnes, takže po Bondim, který již deset let se touto teorií nezabývá, se jí zřekl i Hoyle [34].

OSCILUJÍCÍ MODELY VESMÍRU

V posledních letech získává stále většího souhlasu domněnka, že náš vesmír je prostorově konečný a oscilující. Friedmanův konečný model sice též osciluje mezi dvěma objemy, avšak dolní objem je nulový, čímž v tomto okamžiku dochází k singulárnímu stavu s nekonečnou hustotou hmoty ($\varrho \to \infty$) a s nekonečnou hodnotou a nespojitostí první derivace poloměru zakřivení prostoru podle času ($\dot{G} \to \infty$).

Hoyle a Narlikar ve své nové teorii gravitace [35] vypracovali nový model vesmíru, v němž vesmír osciluje mezi dvěma konečnými a nenulovými objemy [36]. Vzhledem k přesvědčivým argumentům odmítavé kritiky celé této nové teorie gravitace [37] sotva můžeme soudit, že jejich nový model odpovídá skutečnému vesmíru.

Místo abychom do rovnic pole zaváděli tenzor $C_{\mu\nu}$, popisující nové hypotetické pole nikterak nesouvisející s hmotou nacházející se současně ve vesmíru, dostaneme oscilující model vesmíru ($k = +1$) měnící svůj objem podle naprosto stejné funkce $G(t)$, jestliže připustíme existenci negativního, prostorově homogenního tlaku nepřímo úměrného čtvrté mocnině poloměru zakřivení [38]:

$$-p/c^2 \equiv T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = aG^{-4}\,. \tag{8.1}$$

Ze známé podmínky (2.8) vyplývá, že poslední nenulová složka tenzoru T_μ^ν musí záviset na G podle funkce

$$T_4^4 = bG^{-3} - 3aG^{-4}\,, \tag{8.2}$$

v níž b je integrační konstanta. Dosadíme-li rovnice (8.1) a (8.2) spolu s metrikou

(1.2) do rovnic pole (3.4), v nichž položíme $\lambda = 0$, dostáváme integrací

$$ct = (G_0 + G_m) \arcsin \{(G - G_m)/(G_0 - G_m)\}^{1/2} - \tag{8.3}$$
$$- \{(G - G_m)(G_0 - G_m)\}^{1/2} .$$

G_m je minimální poloměr zakřivení. Geometricky představuje funkce (8.3) zkrácenou cykloidu.

Bližší rozbor tohoto modelu ukázal, že negativní tlak, tj. přitažlivé síly mezi elementárními částicemi v blízkosti nejvyšší kontrakce vesmíru by musely být příliš vysoké, než kolik bychom mohli fyzikálně připustit. Ani současným zavedením kladného tlaku se tato nepříznivá situace nezlepší, takže ani tento model nelze považovat za přiměřený popis chování našeho vesmíru.

O POVAZE SINGULARIT V RELATIVISTICKÝCH MODELECH VESMÍRU

Existence singulárního stavu ve všech třech Friedmanových modelech se zdála být závažným svědectvím proti předpokladu, že by tyto modely mohly v prvním přiblížení opravdu popisovat chování našeho vesmíru. Shrneme zde krátce výsledky nedávné autorovy práce [39], v níž bylo ukázáno, že tato překážka je jen zdánlivá.

Představa, že by veškerá hmota vesmíru se mohla stáhnout do jediného matematického bodu, se zdá být absurdní. Z elementární kinetické teorie plynů je však známo, že ideální plyn nabývá při absolutní teplotě nulového objemu, protože jeho molekuly jsou představovány bezrozměrnými hmotnými body. Analogicky musíme považovat i partikule „kosmického prachu" za bezrozměrné hmotné body, neboť jen tak může být jejich vnitřní tlak nulový. Proto je zcela pochopitelné, že se veškerá hmota vesmíru, tvořená bezrozměrnými hmotnými body, stáhne bez jakýchkoliv obtíží až k nule.

Nespojitost první derivace $\dot{G}$ v singulárním bodě je fyzikálně spojena s nespojitou změnou rychlosti částic hmoty, které se stahují s nejvyšší rychlostí do jediného bodu, ve stejně velikou rychlost opačného směru. Z výrazu (3.8) a z definice hustoty hmoty však plyne, že okamžitá hustota hmoty ve vesmíru je nepřímo úměrná třetí mocnině absolutní hodnoty $|G(t)|$. Můžeme tedy připustit, a to v plné shodě s relacemi riemannovské geometrie, že funkce $G(t)$ nabývá nejen kladných, ale i záporných hodnot. V singulárním bodě potom zůstává první derivace $\dot{G}$ — a tím i rychlost částic hmoty — spojitá. Z rovnic (3.6) a (3.7), v nichž $\lambda = 0$, potom plyne, že funkce $G(t)$ se pro $k = +1$ popisuje v parametrickém tvaru rovnicemi

$$ct/G_0 = \xi - \cos \xi \sin \xi , \tag{9.1a}$$

$$G/G_0 = (1 - \cos^2 \xi)^{1/2} \sin \xi . \tag{9.1b}$$

Z exaktních kulově symetrických řešení rovnic pole (2.4) s $\lambda = 0$, jež odvodil Datt [40] a nedávno klasifikoval autor [41], vyplynulo, že nutnou a dostačující podmínkou pro periodickou kontrakci vesmíru až do nulového objemu je rovnoměrné a izotropní rozdělení hmoty po celém kosmickém prostoru. Jakmile toto rozdělení nahradíme kulově symetrickým, objem vesmíru nikdy nemůže periodicky klesat až k nule [39]. I při tomto rozdělení hmoty však stoupá její hustota ve středu symetrie v určitých okamžicích až do nekonečna. Dá se očekávat, že při naprosté nesymetričnosti v rozdělení hmoty, jak ji pozorujeme v našem vesmíru, nedojde v důsledku silné gravitační interakce ve stavu nejvyšší kontrakce vesmíru ani k výskytu těchto singularit v hustotě hmoty. Závěrem lze tedy říci, (1) že Friedmanovy modely se sice dobře hodí k popisu dnešního chování vesmíru, nemůžeme jich však užít pro popis chování vesmíru ve stadiu jeho nejvyšší kontrakce, a (2) že nikterak není nutno ani modifikovat rovnice pole obecné relativity, ani v nich připouštět existenci vysokého záporného tlaku, abychom dostali oscilující model konečného vesmíru s fyzikálně zcela přijatelným chováním.

EMPIRICKÁ DATA

Do jaké míry popisují naše modely chování skutečného vesmíru, můžeme zjistit na podkladě číselných údajů o následujících čtyřech veličinách [42]:

(1) Hubbleův parametr $H = (50$ až $100)$ km/sec. mpc $= (1{,}5$ až $3{,}0) \cdot 10^{-18}$ $\sec^{-1}$, čemuž odpovídá $1/H = (20$ až $10) \cdot 10^9$ roků.

(2) Decelerační parametr leží v intervalu $0 < q < 3{,}0$. Podle posledních údajů spíše však platí $q \cong 0{,}2 \pm 0{,}5$.

(3) Stáří nejstarších hvězd (podle něhož můžeme soudit na délku trvání nynější expanze vesmíru) se odhaduje až na $20 \cdot 10^9$ roků, avšak tento údaj je velice nejistý.

(4) Průměrná hustota viditelné hmoty ve vesmíru je podle odhadu 10^{-31} g/cm^3. K této hodnotě nutno přičíst jednak značné množství temné hmoty, takže celková hustota pravděpodobně dosahuje řádu 10^{-29} g/cm^3, jednak nelze ani vyloučit, že celkové množství další hmoty ve formě neutrin a antineutrin může dosahovat řádově až téže velikosti 10^{-29} g/cm^3 [43].

Vložíme-li tyto hodnoty, získané odlišnými a na sobě nezávislými metodami měření do rovnice (3.12), shledáme velice uspokojivou shodu, což svědčí o tom, že relativistická kosmologie dobře vystihuje chování skutečného vesmíru a současně i nenásilně vysvětluje i všechny tři paradoxy newtonovské kosmologie.

Další empirické údaje o chování našeho vesmíru najdeme v článku [34].

Literatura

[1] M. Olbers: Bode's Jahrbuch, 1826.
[2] R. Clausius: Pogg. Annalen *125*, 400 (1865).
[3] C. Neumann: Abh. Kgl. sächs. Ges. Wiss. zu Leipzig *26*, 97 (1874).
[4] H. v. Seeliger: Astron. Nachr. *137*, 129 (1895).
[5] A. Einstein: S.-B. Preus. Akad. Wiss., 142 (1917).
[6] A. Friedman: ZfPhysik *10*, 377 (1922).

[7] A. EINSTEIN: ZfPhysik *11*, 326 (1922).
[8] A. EINSTEIN: ZfPhysik *21*, 228 (1923).
[9] A. EINSTEIN: The Meaning of Relativity (2-nd edition, Princeton, 1945). Appendix for the Second Edition.
[10] A. S. EDDINGTON: Mathematical Theory of Relativity (2-nd edition, Cambridge, 1923), str. 162.
[11] E. P. HUBBLE: Proc. Nat. Acad. Sci. USA *15*, 168 (1929).
[12] W. H. MCCREA, E. A. MILNE: Quat. J. Math. (Oxford Ser.) *5*, 73 (1934).
[13] H. P. ROBERTSON: Astrophys. J. *82*, 284 (1935); *83*, 187, 257 (1936).
[14] A. G. WALKER: Proc. London Math. Soc. *42*, 90 (1936).
[15] H. BONDI, T. GOLD: Monthly Not. Roy. Astron. Soc. *108*, 252 (1948).
[16] F. HOYLE: Monthly Not. Roy. Astron. Soc. *108*, 372 (1948); *109*, 365 (1949); *120*, 256 (1960).
[17] W. H. MCCREA: Proc. Roy. Soc. (London) *A 206*, 562 (1951).
[18] E. A. MILNE: Relativity, Gravitation and World Structure (Oxford, 1935). Kinematic Relativity (Oxford, 1948).
[19] P. A. M. DIRAC: Nature *139*, 323 (1937); Proc. Roy. Soc. (London) *A 165*, 199 (1938).
[20] A. S. EDDINGTON: Relativity Theory of Protons and Electrons (Cambridge, 1946). Fundamental Theory (Cambridge, 1946). N. B. Slater, The Development and Meaning of Eddington's Fundamental Theory (Cambridge, 1957).
[21] P. JORDAN: Die Herkunft der Sterne (Stuttgart, 1947). Nature *164*, 637 (1949). Schwerkraft und Weltall (Braunschweig, 1. Aufl. 1952, 2. Aufl. 1955).
[22] H. BONDI: Cosmology (2-nd edition, Cambridge, 1960).
[23] H. VOGT: Aussergalaktische Sternsysteme und Struktur der Welt im Grossen (Leipzig, 1960).
[24] J. PACHNER· Čs. Čas. Fys. *A 15*, 1 (1965).
[25] L. P. EISENHART: Riemannian Geometry (Princeton, 1964).
[26] P. K. RAŠEVSKIJ: Rimanova geometrija i tenzornyj analiz (Moskva, 1953).
[27] H. WEYL, Phys. Z. *24*, 230 (1923).
[28] A. EINSTEIN: S.-B. Preus. Akad. Wiss. 844 (1915).
[29] A. EINSTEIN: Ann. d. Physik *49*, 769 (1916).
[30] E. SCHRÖDINGER: Expanding Universes (Cambridge, 1956).
[31] W. de SITTER: Amstr. Proc. *19*, 121 (1917); *20*, 229 (1917).
[32] J. PACHNER: Phys. Rev. *132*, 1837 (1963).
[33] W. H. MCCREA: Monthly Not. Roy. Astron. Soc. *128*, 335 (1964). Observatory *84*, 231 (1964).
[34] F. HOYLE: Nature *208*, 111 (1965).
[35] F. HOYLE: J. V. NARLIKAR: Proc. Roy. Soc. (London), *A 277*, 1 (1964); *A 282*, 178, 184, 191 (1964).
[36] F. HOYLE, J. V. NARLIKAR: Proc. Roy. Soc. (London) *A 278*, 465 (1964).
[37] S. DESER, F. A. E. PIRANI: Proc. Roy. Soc. (London) *A 288*, 133 (1965).
[38] J. PACHNER: Monthly Not. Roy. Astron. Soc. *131*, 173 (1965). Bull. Astron. Inst. Czechosl. *16*, 321 (1965).
[39] J. PACHNER, Phys. Rev. *147*, 910 (1966).
[40] B. DATT: ZfPhysik *108*, 314 (1938).
[41] J. PACHNER: Bull. Astron. Inst. Czechosl. *17*, 105 (1966).
[42] A. SANDAGE: Astrophys. J. *133*, 355 (1961); *134*, 916 (1961); *136*, 319 (1962). J. Soc. Indust. Appl. Math. *10*, 781 (1962).
[43] B. M. PONTECORVO, J. A. SMORODINSKIJ: ŽETF *41*, 239 (1951).
J. A. SMORODINSKIJ: Sborník Einštein i razvitije fiziko-matematičeskcj mysli (Moskva, 1962), str. 110 násl.