

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Saunders Mac Lane
O zdraví matematiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 31 (1986), No. 1, 44--48

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138106>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1986

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

diskuse

O ZDRAVÍ MATEMATIKY

Saunders Mac Lane, Chicago, USA

Jak se daří matematice? To je otázka, která si zaslouží příležitostné přezkoumání. Dnes musíme odpovědět takto: daří se jí dobře, ale současně také špatně.

Je hodně příznaků toho, že matematika prospívá dobře – například, když se podíváme na četné důležité problémy, které byly právě v tomto období vyřešeny. Známe nyní úplnou klasifikaci konečných jednoduchých grup v čele s „*netvorem*“^(*). Byly dokázány pověstné Weilovy hypotézy o diofantických rovnicích, přičemž bylo využito podstatné části obtížných nových postupů, které byly pro tento účel vyvinuty v algebraické geometrii. Paul Smith vyslovil domněnku, že periodický homeomorfismus třírozměrné sféry, který má prvočíselnou periodu a zachovává některý uzel, musí být konjugovaný s rotací sféry; díky spojenému úsilí pěti nebo šesti lidí nyní víme, že Smith měl pravdu. Poincarého hypotéza byla dokázána v dimenzi čtyři a původní důkaz byl přepracován v podstatně jasnější formě; původní hypotéza pro dimenzi tři zůstává naléhavou výzvou. Bylo dosaženo mnoha dalších nových a zajímavých výsledků a větší počet matematiků než kdykoliv předtím usilovně pracuje ve všech směrech výzkumu.

^{*}) Více o tom viz v článku J. DYSONA, *PMFA* 1985/1.

S. MAC LANE: *The Health of Mathematics*. *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 5, No. 4, pp. 53–55. Přeložil OLDŘICH KOWALSKI.

Copyright © Springer-Verlag, New York, 1983.

Některé z těchto směrů vykazují v současné době poměrně málo větších úspěchů (teorie svazů, homotopické grupy sfér apod.), ale jsou tu jiné oblasti, které vykazují pozoruhodný a neutuchající pokrok: algebraická geometrie, matematická fyzika (Yangovy-Millovy rovnice a Lieovy superalgebry), hyperbolická geometrie (ve třech dimenzích), matematická informatika (platí $P = NP?$) a mnoho dalších. Taková zvýšená aktivita v určitém směru obvykle odráží všeobecný pocit, že jsou zde trvalé a reálné možnosti velkého pokroku. Dlouhodobým rysem pokroku v matematice jsou také příležitostné posuny v důležitosti jednotlivých oblastí. Například překrásné vyhlídky pro studium funkcí jedné komplexní proměnné učinily z této oblasti převládající disciplínu počátku našeho století; povídá se, že ve Francii tehdy móda přikazovala, aby skutečným cílem práce každého matematika bylo nějaké rozšíření velké Picardovy věty. Teprve mnohem později se začal klást srovnatelný důraz na teorii více komplexních proměnných. Po první světové válce se rozvíjela a vzkvétala analytická teorie čísel stejně jako abstraktní algebra (Noetherová a Artin) a teorie lineárních operátorů na Banachových prostorech (Wiener a Banach); všechny tyto směry pak zaznamenaly postupný pokles. Po druhé světové válce si ústřední postavení dočasně podržela algebraická topologie, která pak musela postupně ustoupit diferenciální topologii a globální analýze. Takové posuny jsou nevyhnutelné, ale starosti působí fakt, že příliš mnoho matematiků, kteří mají dlouholetou praxi v některé původně kvetoucí disciplíně, se stále upínají na tuto oblast i poté, co zabředla do komplikací – jako jsou například komplikace s nespočetnými abelovskými p -grupami a nezvládnutelné

spektrální posloupnosti, které snad měly umožnit (ale nebyly s to) výpočet všech dosud neznámých vyšších homotopických grup na sférách. Patrně si potřebujeme více uvědomit, že disciplíny se mohou stát nevynosnými (většina z nás se prostě nechce vzdát) a také bychom potřebovali nějaký bezbolestný postup pro ty, kteří si přejí změnit svou specializaci. Možná, že v současné době příliš mnozí z nás hovoří pouze ke svým kolegům specialistům na seminářích a konferencích soustřeďujících se na příslušnou oblast.

Publikovaná matematická literatura naráží na obtíže. Publikuje se příliš mnoho, jak napovídá objem dnešních svazků *Mathematical Reviews*. Tento dojem potvrzuje značné množství povrchních prací, které měly zůstat ve formě preprintů, a velké množství hloupých preprintů, které raději neměly být vůbec napsány. Současně se však publikuje i příliš málo. V mnoha oborech od teorie kategorií po hyperbolickou geometrii existují významní matematikové, kteří získali vážnost ve vědeckém světě přesto, že nikdy nic nepublikovali. Je jisté, že bylo vždy zábavnější dokázat nějakou větu než sepsat její důkaz, ale nikdy předtím (snad s výjimkou Weierstrasse) zde nebyl tak rozšířen sklon k naprosté závislosti na pouhém ústním sdělování výsledků. Jiné způsoby sdělování jsou často nedostatečné v podobě nedbalých článků a záhadných výzkumných sdělení — například v geometrické topologii. Někdy to, co je publikováno, není vůbec důkaz, ale pouhý mlhavý náznak, který slouží pouze k utajení a k pozdějším nárokům na prioritu. Můžeme uznat, že génus se nemusí snižovat k detailům, ale naše povzbuzování reputace založené na pseudopublikacích může vést pouze k dalším tajemným tvrzením různým

napodobovatelů se stále menším a menším podílem geniality.

Opačný problém přemíry publikací může vzniknout vlivem tlaků typu „publikuj, nebo zhyň“, ale také tím, že rozvíjení myšlenek, dokonce i těch velmi atraktivních, bylo očividně přehráno. Jsou zde spousty příkladů; zmíním se jen o některých, o nichž náhodou vím. Například bylo zjištěno, že konečné automaty mohou být zavedeny nejen na množinách, ale i v obecných kategoriích: to vyústilo do epidemie stále se opakujících důkazů toho, že „minimální realizace“ je těsně spjata s „chováním“ automatu. Tento přílišný důraz na nový přístup vedl k jeho všeobecné diskreditaci. Teorie grafů, která vznikla z obtížných a zajímavých problémů jako byl například problém čtyř barev se jaksí pokládala za ideální prostředek pro nové aplikace matematiky v sociologii a jinde. Tento styl práce zplodil libovolné množství bezvýznamných prací jako například o teorii grafů a energetické krizi nebo o teorii grafů aplikované na analýzu citací, přičemž analýza citací měla ukázat, jak je věda rozdělena na „výzkumné fronty“. Popularita těchto ubohých pseudoaplikací mohla způsobit, že nedávný seznam 100 nejvíce citovaných matematiků zahrnoval dva autory knih o teorii grafů.

Případ fuzzy množin je ještě nápadnější. Původní myšlenka byla přitažlivá — místo abychom řekli, že prvek x patří nebo nepatří do množiny A , změřme pravděpodobnost toho, že x patří do A . Potom někdo připomněl, že celá matematika může být založena na teorii množin; z toho okamžitě vplynulo, že celá matematika může být přepsána v jazyce fuzzy množin. Nadto může být založena na fuzzy množinách více než jedním způsobem, což se přeměnilo v podrobný projekt

přivolávající stohy publikací o nové matematice. Ty také přišly, jak se čekalo, spolu s výstředními nároky na aplikace (jako je například „fuzzy“ teorie rozhodování). Většina z toho, co se zamýšlelo, se patrně nerealizovala. Nové myšlenky jsou pěkné, ale to neplatí o propagandistických tricích.

Mnohé speciální oblasti matematiky poté, co dosáhly svých původních cílů, se rozvíjely dál a dál a využívaly při tom postranních cest, které mohly nebo nemusely být slepými uličkami. Případy, které znám nejlépe, leží na okraji matematiky. Tak teorie kategorií vznikla, aby objasnila a upevnila různé pojmové ideje vzniklé v hlavním proudu matematiky; některé ze směrů jejího dalšího vývoje se však přeměnily v obtížné a temné operace s odtazitými myšlenkami depřimující obecnosti. To byl případ Francie v 60. a 70. letech, kdy konkurenční myšlenkové školy nejenže nedokázaly vůbec vzájemně komunikovat, ale také psaly tak temným stylem, aby se jakákoliv komunikace ještě znesnadnila.

Univerzální algebra (zvaná též „obecná algebra“) vznikla ve 30. letech, aby byly přezkoumány ty algebraické výsledky, které mohou být dokázány jednotným způsobem pro všechny nebo skoro všechny variety algebraických systémů — šlo o záležitosti jako je Jordanova-Hölderova věta, Krullova-Schmidtova věta, subdirektní součiny apod. Obor brzy vyčerpal věty tohoto typu, ale dále vesele rozvíjel svou aktivitu tím, že odborníci formulovali a pokoušeli se řešit nové obtížné problémy, které jsou zajímavé spíše po stránce kombinatorické než pojmové. Obhájci této disciplíny stavějí do protikladu obecnou algebru a speciální algebru, jako by šlo o dva obory stejné důležitosti.

V tomto případě možná celá obtíž záleží v přílišném zdůrazňování „maďarského“ pohledu na matematiku — že totiž věda nespočívá v dobrých odpovědích, ale v obtížných otázkách. Tento důraz kladený na problémy má pravděpodobně za následek opomíjení skutečnosti, že na čem u problému nejvíce záleží, je jeho důležitost. Nebo jsou naše obtíže možná důsledkem specializace — když speciální obor vyčerpá své cíle nebo perspektivy, je obtížné přejít na jinou problematiku a může být snadnější pokračovat v práci bez cíle i perspektiv ve směrech, které záleží v umělých problémech.

Tento účinek izolované specializace je obzvláště patrný v matematické logice. Tento obor byl vytvořen ke studiu základů matematiky, ale ti, kteří se jím zabývali, byli brzy ostatními matematiky vyobcováni. To nutně vedlo k izolaci matematických logiků. Později pak přes skvělý pokrok, který byl učiněn, a přes množství konkrétních výsledků souvisejících s klasickou matematikou izolace pokračovala — a matematická logika současně zapoměla na svůj původní zájem o základy matematiky. Někteří z logiků se ani tak nezajímají o matematické pojmy, ale spíše se snaží demonstrovat, že i oni umějí řešit těžké problémy. Dělalí to například tak, že kladou nové axiomy na nedosažitelné území velkých kardinálních čísel. Nebo víme-li již, řeknou si, že hypotéza kontinua je nezávislá na axiómech teorie množin, dokažme také její nezávislost na všech možných kombinatorických pojmech. Nebo víme-li, že rekurzivní funkce vystupují v Gödelově větě o neúplnosti a že napovídají jistou hierarchii stupňů, proč bychom neprostudovali veškeré technické obtíže obsažené v komplikované a jemné struktuře této hierarchie? Nebo víme-li, že axiomy teorie množin a hypotéza kontinua

mohou být všechny splněny v Gödelových konstruovatelných množinách; prostudujeme tedy jemnou strukturu těchto množin, ať už bažina, kterou vytvářejí, je sebehlubší.

V každém z těchto názorných příkladů zplanělé matematiky může ovšem specialista docela dobře vidět smysl, který mně uniká. Stále však tvrdím, že existuje příliš mnoho takových případů řemeslně dokonalých děl bez osvícenosti a že to je cena, která se platí za příliš vytrvalou specializaci.

Vzhledem ke kvantitě a rychlosti vývoje matematiky je specializace nevyhnutelná, nikoliv však toto tvrdošíjné lpění na specializaci. Jednou z možných škod je skutečnost, že matematikové si nepovšimnou nových specializací v době jejich vzniku. Například většina matematiků ztratila kontakt s rozvojem matematické informatiky. Výsledkem je, že ztrácí nejen matematika, ale také informatika — její pokrok byl určován spíše rychlým rozvojem technických prostředků než rozvojem idejí a byl poznamenán neustálými módními výkyvy i zvykem podávat publiku přednášky „z konzervy“, založené na přehnaném používání stohů nečitelných fólií do projektoru.

V minulosti existovali přinejmenším někteří matematikové, kteří měli všeobecný přehled o celém oboru; pokud je někdo požádal, aby nastínil perspektivy dalšího pokroku, neomezovali se pouze na perspektivy své vlastní práce. V dnešní době je — zdá se — velmi málo lidí s takovým přehledem. Možná proto, že oceňujeme spíše specialisty než lidi s přehledem.

Ale kritičtější je patrně to, že zde není všeobecná shoda v tom, kam matematika směřuje nebo jak by měla postupovat.

To jsem si pronikavě uvědomil během nedávné První matematické konference států Perského zálivu, konané (v říjnu 1982) v Rijádu v Saúdské Arábii. Na závěr jednoho zdařilého dne konference se někteří z nás zúčastnili večerních hodů v činžovním domě jednoho z místních profesorů. Po večeři jsme se odebrali na střechnu budovy, kde jsme odpočívali a rozprávěli. Michael Atiyah, který byl hvězdou konference, přemýšlel o své zítřejší přednášce, ve které chtěl poradit mladým arabským matematikům, na co se mají zaměřit ve své vědecké práci. Seděl jsem vedle něj, takže jsme se zanedlouho pustili do diskuse o tom, jak dělat matematiku. Já jsem zaujal standardní stanovisko — musíte upřesnit předmět zájmu, zavést potřebné axiomy a vymezit jasně výzkumnou agendu. Atiyah dával velkou přednost stylu teoretických fyziků. Když fyziky napadne nová myšlenka, nezdržují se tím, aby ji přesně definovali, protože to by bylo omezení v neprospěch věci. Místo toho o nové myšlence a kolem ní stále hovoří, rozvíjejí ji v různých souvislostech a nakonec přijdou s mnohem pružnějším a bohatším pojmem. To byl, jak poznamenal Atiyah, případ Diracovy δ -funkce a jejího konečného vykrystalizování v teorii distribucí — a stále se to ještě může stát v případě renormalizace a Feynmanova integrálu v kvantové teorii pole. Ale já jsem trval na tom, že my jako matematikové musíme vědět, o čem mluvíme, ať již to bude homotopická grupa nebo adjungovaný funktor.

Tento příklad může sloužit k ilustraci toho, že v současné době není shodný názor na to, jak dělat matematiku nebo kterými směry se vydat. Nyní si bolestně uvědomuji, že některé jiné obory vědy mohou být v ještě bědnějším stavu. Víím, že někteří sociologové značně překroutili

to, co by mělo být odpovědným využitím výzkumu veřejného mínění. Víím, že odborníci v astrofyzice se pouštějí do spekulací divočejších, než jsou spekulace geometrů. A někteří experti v ekonometrii si nedají říci a počítají předpovědi růstu toho či onoho (například využívání energie) na 50 let dopředu, a to způsobem, který se vůbec nedá ověřit na faktech. Nadto některá použití analýzy nákladů a užitku dávají pouze nepřesvědčivá požeňnáni studiím politickým. Ale smutná skutečnost, že některé jiné vědy vyvíjejí pochybnou činnost, není důvodem k tomu, proč bychom královně věd měli dovolit poklesnout do bahna oddělených specializací.

Můžeme udělat mnoho, abychom se tomu vyhnuli. Mohla by zde být mnohem širší výměna myšlenek mezi specialisty z různých oborů a mnohem více individuálních posunů od jedné specializace k jiné. Mohlo by být více všeobecných diskusí o formě a zaměření matematiky — s větším důrazem na účel než na techniku. Mělo by se věnovat více pozornosti možnému vzniku a rozvoji nových matematických pojmů — ať již povstanou z matematiky, teoretické fyziky nebo odjinud. Mělo by být vynaloženo větší úsilí na utřídění a pochopení největších současných pokroků v matematice.

Takové změny vyžadují jak iniciativu osobní, tak podporu institucí. Tato podpora by měla začít širěji zaměřeným programem výchovy specialistů na vysokých školách a tím, že příslušní akademičtí funkcionáři budou používat méně mechanická kritéria při povyšování pracovníků a jejich ponechávání ve funkci. Matematický pokrok má být měřen tím, jak porozumíme novým myšlenkám, a ne počtem publikací.

DOBROZDÁNÍ O MATEMATICE

William Browder, Princeton

Četba článků Saunderse MacLanea a Armanda Borela*) (Intelligencer Vol. 5, No 4) povzbudila můj skrytý sklon k filozofování a to mě nutí vyslovit vlastní názor.

Na jedné straně se člověk obává vyhlídky, že by měl nesouhlasit s matematikem takového rozhledu, energie a věhlasu jako je MacLane a na druhé straně s ním ani nemůže nesouhlasit tak docela a ve všech bodech, jak by možná rád učinil, aby si svou úlohu usnadnil. Borelovy názory ve mně vyvolávají zcela kladnou odezvu, ale rád bych v některých směrech zašel dále než Borel.

Matematika je součástí vědy a používá téže vědecké metody, jenže náš předmět studia nám diktuje specifické postupy a odlišuje nás tak od jiných vědců. Jestliže se přírodní vědy snaží odvodit „přírodní zákony“, matematika se snaží se stejným úsilím o totéž v té sféře „přírody“, která se skládá z myšlenek a pojmů.

Můžete namítnout, že pojem je spíše lidským výtvořem než přírodním jevem. Ale pojmy jako „teplo“ nebo „teplota“ nejsou méně umělé než pojmy jako „přímka“ nebo „rovina“. Jako matematické se soustřeďujeme především na logické vztahy mezi pojmy, což je v experimentálních vědách věc druhotná a hlavní je tam podrobit pojmy zkoušce pozorování.

*) Tento článek jsme v Pokrocích neotiskli pro nedostatek místa (pozn. redakce).

W. BROWDER: *Mathematical Judgment*. Math. Intelligencer Vol. 7, No 1, pp. 51–52 (1985).
Přeložil O. KOWALSKI.

© Springer-Verlag New York 1985.