Donald E. Knuth

Nadreálná čísla [Dokončení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 23 (1978), No. 5, 246--261

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138207

Nadreálná čísla

Povídka o tom, jak dva bývalí studenti matematiky skrze matematiku ke štěstí došli

*Donald E. Knuth, Stanford, California, USA**)

13. ZOTAVENÍ

A. Zapomněli jsme na oběd, Bille.

B. (chodí okolo) Vážně? Já se snad z toho problému zblázním.

A. Takhle se nikam nedostaneme. Nech ty papíry, uděláme si přestávku. Nechceš se trochu najíst?

B. Novou myšlenku potřebujeme, Alice, nápad ... nějaký nápad.

A. (začíná jíst): No, vzpomeň si, jak jsme to dělali dřív. Když jsme se dostali do kruhu, cesta ven vedla buď použitím indukce, tedy tak, že důkaz jednoho případu závisel na pravdivosti předchozího případu a ten zase závisel na předchozím případu a tak dál, až celý tenhle řetězec někde skončil.

B. Třeba jako náš důkaz pomocí součtu dnů.

A. Ano. A druhý způsob jak z kruhu ven byl ten, že jsme dokázali víc, než se nám na začátku zdálo, že potřebujeme. Museli jsme totiž dokazovat několik věcí najednou, aby nám celá indukce běhala.

B. Jako například, když jsi spojila (T13) a (T14). Tak ano, po obědě si k tomu sednu a sepíšu celkový stav věcí, zapíšu všechno, co potřebujeme dokázat a třeba ještě něco navíc. A až všechno sepíšu, tak se to pokusím dokázat pomocí indukce všechno najednou. Jestli mi nepomůže tenhle osvědčený způsob, tak mi už nepomůže vůbec nic.

A. Zní to sice dost tvrdě, ale asi to tak bude nejlepší. Tady jsou placky, vezmi si.

...

B. Tak, už to všechno mám. Potřebovali bychom dokázat pro naše čísla tři věci, které, jak se zdá, na sobě navzájem závisí:

I. $x + y$ je číslo;

II. jestliže $x \leqq y$, pak $x + z \leqq y + z$;

III. jestliže $x + z \leqq y + z$, pak $x \leqq y$.

---

*) Dokončení překladu knížky D. E. KNUTHA *Surreal Numbers*, která vyšla v roce 1974 v nakladatelství Addison-Wesley. První tři části překladu vyšly v číslech 2, 3 a 4 tohoto ročníku. Přeložila HELENA NEŠETŘILOVÁ.

Jestli se nemýlím, tak důkaz I(x, y) dostaneme, když nejdřív dokážeme

$$\mathrm{I}(X_L, y)\,,\ \mathrm{I}(x, Y_L)\,,\ \mathrm{I}(X_P, y)\,,\ \mathrm{I}(x, Y_P)\,,$$
$$\mathrm{III}(X_P, X_L, y)\,,$$
$$\mathrm{III}(x, X_L, y)\,,\quad \mathrm{II}(y, Y_P, x)\,,$$
$$\mathrm{III}(y, Y_L, x)\,,\quad \mathrm{II}(x, X_P, y)\,,$$
$$\mathrm{III}(Y_P, Y_L, x)\,.$$

Důkaz I(x, y) například vyžaduje nerovnost $X_L + y < Y_P + x$. Jinými slovy, pro všechna x_L z X_L a y_P z Y_P máme ověřit, že $x_L + y < y_P + x$. Avšak z III(x, x_L, y) a (T3) se ukáže, že $x_L + y < x + y$ a z II(y, y_P, x) se ukáže, že $y + x \leqq y_P + x$. Je to tak?

A. Zdá se, že je to dobře, ale nechápu, proč jsi do toho zahrnul tu první čtveřici od I(X_L, y) až k I(x, Y_P). Vadilo by nám, kdyby $x_L + y$ nebylo číslo? Vždyť my jenom potřebujeme vědět, že x_L a y jsou čísla. Vztahy $<$ a $\leqq$ jsou přece definovány i pro pseudočísla a tranzitivní zákon pro ně platí také.

B. Tentokrát nemáš pravdu. Vzpomeň si, že pravidlo (1) požaduje, aby prvky levé části jako $x_L + y$ byly čísla. A vlastně to ani nevadí, protože když dokazujeme I(x, y), můžeme předpokládat I(x_L, y) atd. celkem libovolně, protože o to se nám postará indukce.

A. Je to sice komplikované, ale pokračuj. Vypadá to dost slibně.

B. Alice, tahle metoda musí fungovat, jinak jsme v koncích. Poslouchej dál, důkaz II(x, y, z), tedy (T13), dostaneme, když dokážeme

$$\mathrm{III}(y, X_L, z)\,,$$
$$\mathrm{II}(x, y, Z_L),\quad \mathrm{III}(z, Z_L, y)\,,$$
$$\mathrm{III}(Y_P, x, z)\,,$$
$$\mathrm{II}(x, y, Z_P),\quad \mathrm{III}(Z_P, z, x)\,.$$

To je zvláštní, vůbec se tady nepotřebuje I(x, y). Jak jsme na to vlastně přišli, že k důkazu (T13) potřebujeme vědět, že součet dvou čísel je číslo?

A. Napadlo nás to ještě před tím, než jsme se dozvěděli něco o pseudočíslech. Podívej, jak taková fixní idea zablokuje člověku mozek. Vzpomeň si, napřed jsme si mysleli, že důkaz „$x + y$ je číslo" bude obtížný proto, že na tomhle předpokladu závisí platnost (T13). Později jsme sice zjistili, že tranzitivní zákon platí i pro pseudočísla, ale zapomněli jsme se znova vrátit k původnímu zdroji komplikací.

B. Vidíš, přeci jen nám pomohlo, že jsme to všechno sepsali. Když nic jiného, tak to aspoň pomůže uspořádat myšlenky. Opět bodujeme a jedeme dál. Důkaz III(x, y, z) závisí na platnosti

$$\mathrm{II}(X_L, y, z)\,,$$
$$\mathrm{II}(x, Y_P, z)\,.$$

A. Vidíš, I(x, y) zase nepotřebujeme. Takže prostě dokážeme (T13) a (T14) a nebudeme se starat, jestli $x + y$ je číslo nebo ne.

B. Aha a později se ukáže, že $x + y$ je číslo, protože platí (T13) a (T14). To je senzace.

A. Dál, tvrzení II a III jsou na sobě závislá, dají se tedy spojit do jediného tvrzení, to už jsme taky jednou udělali.

B. Dobře, spojení tvrzení II(x, y, z) a III(x, y, z) si označíme IV(x, y, z). Podle mého seznamu IV(x, y, z) závisí na:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{IV}(y, X_L, z)\,, & \mathrm{IV}(x, y, Z_L)\,, & \mathrm{IV}(z, Z_L, y)\,, \\ \mathrm{IV}(Y_P, x, z)\,, & \mathrm{IV}(x, y, Z_P)\,, & \mathrm{IV}(Z_P\, z, x)\,, \\ \mathrm{IV}(X_L, y, z)\,, & \mathrm{IV}(x, Y_P, z)\,. & \end{array}$$

To byl ale nápad, značit tvrzení jako I(x, y) a tak dál. Všechno je to hned přehlednější a jasnější. Už nám tedy zbývá jenom jediná věc: vymyslet vhodný způsob, jak formulovat indukční předpoklad, který by nás od těch osmi věcí dovedl k IV(x, y, z).

A. Takhle to asi nepůjde. Podívej, IV(x, y, z) závisí na IV(z, z_L, y) a to závisí na IV$(y_P\, y, z)$ a to zase závisí na IV(z, z_L, y) a už jsme zase v pasti. To je ten samý problém, na který už jsme jednou narazili, jenomže teď je situace kritická.

B. (kope do země) K čertu! ... Než to definitivně vzdám, tak zkusím ještě jednu věc. Pojď, projdeme to celé ještě jednou a zkusíme dokázat obecnější verzi (T13):

V. Jestliže $x \leqq x'$ a $y \leqq y'$,
pak $x + y \leqq x' + y'$.

V důkazech jsme totiž používali právě tohle a s (T13) jsme vždycky prováděli důkaz ve dvou krocích. Navíc, je to symetrické, to by nám taky mohlo pomoct.

A. A ještě by se nám hodilo opačné tvrzení, které by zobecňovalo (T14).

B. Připadá mi, že potřebujeme tohle:

VI. Jestliže $x + y \geqq x' + y'$ a $y \leqq y'$,
pak $x \geqq x'$.

A. Bille, tvoje značení už vypadá úplně profesionálně.

B. (se soustředí) Díky. Takže důkaz V(x, x', y, y') závisí teď na

$$\begin{array}{l} \mathrm{VI}(X_L, x', y, y')\,, \\ \mathrm{VI}(Y_L, y', x, x')\,, \\ \mathrm{VI}(x, X'_P, y, y')\,, \\ \mathrm{VI}(y, Y'_P, x, x')\,. \end{array}$$

No vidíš, vždyť je to vlastně jednodušší než před tím; symetrie tomu hodně pomohla. Co tedy potřebujeme k důkazu VI(x, x', y, y')..., to je nervák, já už vůbec nedokážu přemýšlet...

$$\mathrm{V}(x, X'_L, y, y')\,, \ \mathrm{V}(X_P, x', y, y')\,.$$

A (vyskočí) Podívej, teď použijeme trik se součtem dnů na kombinaci V a VI a tím bude indukce hotová.

B. (ji k sobě přitiskne) Vyhráli jsme!

A. Vždyť tenhle náš důkaz platí vlastně taky pro všechna pseudočísla x, x', y, y', to je skoro k neuvěření.

B. Panebože, to byla práce, ale přiznávám se, že přesto neznám nic krásnějšího.

A. Kolik nás to stálo energie, než jsme dokázali to, o čem jsme si včera mysleli, že platí. Zajímalo by mě, jestli Conway na to měl nějakou jednodušší metodu.

Ať měl nebo neměl, mně se líbí ta naše, vždyť to byla důkladná lekce o technice důkazu.

B. Tak mě, Alice, napadá, že dneska jsme vlastně měli dělat násobení.

A. S tím už radši nebudeme začínat, nebo se nám zase bude špatně spát. Místo toho můžeme odpoledne zkusit dokázat, že je-li x číslo, pak je taky $-x$ číslo.

B. To je dobrý nápad, ale už by to neměl být žádný velký problém.
Poslouchej, dalo by se ještě něco dokázat o tom, jak se při tvoření záporu chovají pseudočísla.

14. Vesmír

B. (se protahuje) Dobré jitro, miláčku, tak co mi povíš dneska, našla jsi přes noc nějakou další chybu?

A. Ne, a co ty?

B. Dobře víš, že já nikdy nehledám chyby. Přesto mě zarazila jedna věc: měli bychom mít k dispozici pravidla pro tvoření všech čísel, ale kam se poděla $\frac{1}{3}$? Jestli si vzpomínáš, čekal jsem, že ji dostaneme čtvrtý den. Pak jsme ale zjistili, že to číslo byla $\frac{1}{4}$. Tak jsem si pomyslel, ta $\frac{1}{3}$ si sice dává na čas, ale dřív nebo později se určitě objeví. Teď už jsme prozkoumali všechna čísla, ale $\frac{1}{3}$ pořád nikde, a to mě zarazilo.

A. Všechna čísla, která takhle tvoříme, mají konečnou binární reprezentaci. Například $3\frac{5}{8}$ se dá zapsat binárně jako 11.101. Naopak zase platí, že každé číslo, které má konečnou binární reprezentaci, bude dříve nebo později stvořeno. Například $3\frac{5}{8}$ bylo stvořeno … osmý den.

B. Pokud vím, binární čísla se používají v počítačích. Možná, že Conway skutečně tvořil počítačový svět.
Jaká je vlastně binární reprezentace $\frac{1}{3}$?

A. Nevím, ale určitě nějakou mít bude.

B. Já se pamatuju, že se pořád nějak dělí, ale dvojkou, ne desítkou. Zkusme to … vychází mi, že

$$\tfrac{1}{3} = .0101010101\ldots.$$

a tak dál do nekonečna. Tahle řada nikde nekončí, proto nebyla $\frac{1}{3}$ stvořena.

A. „Do nekonečna.“ Připomíná mi to poslední část nápisu. Máš nějakou představu o tom, co se na desce myslí $\aleph$ dnem a tak?

B. Připadá mi to jako nějaká metafyzická nebo náboženská chvála číselného systému, která je přece typická pro staré rukopisy. Zas mi ale připadá podivné, že po nekonečně mnoha dnech Conway ještě pořád existoval a mluvil…
„až do konce všeho času“, vždyť čas ještě pořád neskončil.

A. Ty jsi dneska ve formě.

B. Já bych řekl, že po nekonečně mnoha dnech Conway pohlédl na všechna ta binární čísla, která stvořil a … Panebože! Vsadím se, že nepřestal.

A. Máš pravdu, že mě to dřív nenapadlo, vždyť kámen jako by říkal, že hned zase pokračoval dál. A … no samozřejmě, dostane další čísla, protože za X_L a X_P už může taky poprvé zvolit nekonečné množiny.

B. Možná, že čas neplyne konstantní rychlostí. Nám se třeba zdá, že dny jsou pořád stejně dlouhé, ale Conwayovi může připadat, když se dívá do našeho vesmíru, že tady dny běží pořád rychleji a rychleji vzhledem k nějakému absolutnímu supernebeskému časovému měřítku. Třeba první pozemský den trvá jeden nebeský den, druhý pozemský den trvá jenom polovinu nebeského dne, další den čtvrtinu a tak dál. Takže po dvou nebeských dnech, hop, na Zemi uběhlo nekonečně mnoho dní a můžeme pokračovat.

A. Tohle mě nikdy nenapadlo, ale celkem to má smysl. My jsme jistým způsobem právě v té samé situaci jako Conway; po uplynutí nekonečně mnoha pozemských dnů, známe všechno, co se událo až do $\aleph$ dne.

B. (gestikuluje) To je další plus pro matematiku: Naše konečné mozky mohou obsáhnout nekonečno.

A. Alespoň spočetné nekonečno.

B. Ale reálná čísla nejsou přece spočetná a taky je dokážeme pochopit.

A. Asi ano, vždyť každé reálné číslo je přece jenom nekonečný desítkový rozvoj.

B. Nebo taky binární rozvoj.

A. Bille, já už vím, co se stalo $\aleph$ dne! Byla přece stvořena všechna reálná čísla!

B. (valí oči) No ano, asi máš pravdu.

A. Určitě, $\frac{1}{3}$ dostaneme, když za X_L vezmeme, třeba v binárním značení

$$\{.01, .0101, .010101, .01010101, \dots\}$$

a v X_P budou čísla, která se přibližují $\frac{1}{3}$ seshora, jako

$$\{.1, .011, .01011, .0101011, .010101011, \dots\}.$$

B. A čísla jako π by se tvořila zhruba stejně. Binární reprezentaci π sice neznám, ale řekněme, že je to takhle

$$\pi = 11.00100100001111\dots,$$

Π_L dostaneme, když se postupně zarazíme u každé „1",

$$\Pi_L = \{11.001, 11.001001, 11.00100100001, \dots\}$$

a Π_P, když se postupně zastavíme u každé „0" a přidáme 1,

$$\Pi_P = \{11.1, 11.01, 11.0011, 11.00101, \dots\}.$$

A. Za Π_L a Π_P se dá vzít ještě mnoho dalších množin; takových množin je vlastně nekonečně mnoho, ale všechny budou vytvářet čísla ekvivalentní Π, protože Π je nejstarší číslo, které je větší než Π_L a menší než Π_P.

B. (ji znovu objímá) Tohle tedy myslí Conway, když na desku napsal, že $\aleph$ dne byl stvořen vesmír: ten vesmír jsou reálná čísla. Už jsi někdy slyšela o kosmologické teorii „bing bang"? To je přesně ono, $\aleph$ dne: Bum!

A. (neposlouchá) $\aleph$ dne bylo stvořeno ještě jedno číslo, Bille. Číslo, které mezi reálná čísla nepatří. Nechť je X_P prázdná a

$$X_L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}.$$

Tohle číslo je větší než všechna ostatní.

B. Nekonečno! Nedohledno!

A. Asi ho označím řeckým ω, měla jsem tohle písmeno vždycky ráda. Dál bylo stvořeno taky $-\omega$, chci říct minus nekonečno.

B. $\aleph$ den byl moc rušný den,

A. A dalšího dne ...

B. Chceš říct, že $\aleph$ nebyl ještě konec?

A. Ale ne, proč by měl Conway skončit zrovna tady? Mám takové tušení, že byl sotva na začátku. Tenhle proces se nikdy nezastaví, vždycky si můžeš vzít X_P prázdnou a za X_L množinu všech čísel, která byla právě do toho okamžiku stvořena.

B. Ale po $\aleph$ dni není už moc co dělat, reálná čísla jsou přece vedle sebe naskládána strašně hustě. Nekonečná část vesmíru je už hotová, protože mezi dvě „sousední" reálná čísla se už žádná další čísla nevejdou.

A. Nemáš pravdu, Bille, i když jsem si to myslela až do chvíle, kdys to řekl. Asi to znamená, že se s tebou ráda hádám. Vezmi si $X_L = \{0\}$ a $X_P = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\}$. To je číslo větší než nula a menší než všechna kladná reálná čísla.
Můžeme mu říkat ε.

B. (omdlívá) Uf ... už je to v pořádku. Je toho na mě trochu moc. Někde to snad proboha musí mít konec.
A nejvíc mě udivuje, že to tvoje číslo ε bylo vlastně stvořeno $\aleph$ dne a ne až další den, protože sis mohla vzít za $X_P = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\}$ a navíc je tu spousta dalších bláznivých čísel, třeba

$$(\{1\}, \{1\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{4}, 1\tfrac{1}{8}, 1\tfrac{1}{16}, \ldots\}),$$

která jsou jenom o chloupek větší než 1.
Myslím si, že takovéhle číslo je vedle každého čísla, jako π ... ale ne, to nejde ...

A. Takové číslo větší než π, se dostane až další den po $\aleph$, jenom čísla s konečnou binární reprezentací dostanou svého nekonečně blízkého souseda už $\aleph$ dne.

B. Další den po $\aleph$ dostaneme taky číslo mezi 0 a ε. A ty myslíš, že Conway sotva začal.

A. Víš, co je na tom nejlepší? Dostaneme nejenom všechna reálná čísla, nekonečno a všechna tahle mezičísla, ale známe dokonce pravidla, podle kterých se dá říct, které ze dvou čísel je větší, a navíc můžeme všechna čísla sčítat a odčítat.

B. To je fakt. A to jsme si mysleli, že víme, co dokazujeme, když jsme všechna tahle pravidla odvozovali. Brali jsme to jenom jako hru: úkolem bylo odvodit všechny staré standardní aritmetické zákony jenom pomocí Conwayových pravidel. Právě jsme ale zjistili, že se naše důkazy dají taky použít na nekonečně mnoho neslýchaných případů. Čísla jsou omezena jenom naší představivostí, když se naše vědomí rozpíná ...

A. Víš, pro mne je to skoro jako jakási náboženská zkušenost, začínám si pánaboha více vážit. Jako, že pánbůh je všude ...

B. I mezi reálnými čísly.

A. Ale jdi, myslím to vážně.

...

B. Zkoušel jsem s nekonečnem trochu počítat. Třeba pravidlo (3) nám hned říká, že

$$\omega + 1 = \left(\{\omega, 2, 3, 4, 5, \ldots\}, \emptyset\right),$$

což se dá zjednodušit na

$$\omega + 1 \equiv \left(\{\omega\}, \emptyset\right).$$

A. To bylo stvořeno den po $\aleph$.

B. Ano, a

$$\omega + 2 \equiv \left(\{\omega + 1\}, \emptyset\right)$$

o den později. Dál

$$\omega + \tfrac{1}{2} \equiv \left(\{\omega\}, \{\omega + 1\}\right).$$

A. A co $\omega - 1$?

B. $\omega - 1$? V životě by mě nenapadlo od nekonečna něco odčítat. Číslo menší než nekonečno by snad mělo být konečné. Ale proč ne, uděláme to přesně podle všech pravidel, schválně co se stane ... Podívejme se na to:

$$\omega - 1 \equiv \left(\{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \{\omega\}\right).$$

No jasně, tohle je první stvořené číslo, větší než všechna celá čísla a menší než nekonečno.

A. Tohle je tedy to nekonečné číslo, menší než nekonečno, o kterém se na desce mluvilo. Dobrá, mám pro tebe ještě něco, co je to $\omega + \pi$?

B. Ale to je přece hračka:

$$\omega + \pi \equiv \left(\omega + \Pi_L, \omega + \Pi_P\right).$$

Tohle bylo stvořeno ... $(2\aleph)$ dne, současně s $\omega + \varepsilon$ a $\omega - \varepsilon$.

A. Hm, ale pak musí existovat taky číslo 2ω. Totiž $\omega + \omega$.

B. No jo, to máme

$$\omega + \omega = \left(\{\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \omega + 4, \ldots\}, \emptyset\right).$$

Násobení sice ještě nemáme, ale myslím, že tomu klidně můžeme říkat 2ω. Určitě dokážeme, že $(x + y)\,z \equiv xz + yz$, a to znamená $2z \equiv (1 + 1)\,z \equiv z + z$.

A. Správně. Potom

$$3\omega = \left(\{2\omega + 1, 2\omega + 2, 2\omega + 3, 2\omega + 4, \ldots\}, \emptyset\right)$$

bude stvořeno $(3\aleph)$ dne a tak dál.

B. Jak říkám, o násobení ještě pořád nic nevíme, ale skoro bych se vsadil, že ω krát ω bude

$$\omega^2 = \left(\{\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \ldots\}, \emptyset\right).$$

A. A bude stvořeno $\aleph^2$ dne. Představ si, co asi do té doby Conway provede se všemi menšími čísly.

B. Připomíná mi to jednu hru, kterou jsme hrávali jako děti. Vždycky jednou za čas jsme se sebrali a pokřikovali jsme po sobě největší čísla, jaká kdo věděl. Jedno z dětí brzo doma od táty zjistilo, že největší číslo je nekonečno, ale mě se podařilo ho přesto trumfnout – vykřikoval jsem „nekonečno plus jedna". Hned další den jsme se samozřejmě dostali k „nekonečno plus nekonečno" a brzy to bylo „nekonečno krát nekonečno".

A. A co bylo dál?

B. Potom jsme nejdřív křičeli „nekonečnonekonečnonekonečno ..." tak dlouho, až nám došel dech a pak jsme tu hru v podstatě vzdali.

A. To ale zbyla ještě spousta dalších čísel, třeba

$$\omega^{\omega} = (\{\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \ldots\}, \emptyset)$$

a pořád jsme jenom na začátku.

B. Chceš říct, že existuje taky $\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}$, $\omega^{\omega^{\omega}}$ a limita takových výrazů a tak dál. Tohle mě mělo napadnout, když jsem byl malý kluk.

A. Otevírá nám to úplně nové obzory. Mám ale obavu, že pro tahle čísla naše důkazy neplatí.

B. Cože, zas? Vždyť už jsme je jednou opravovali. Aha, už vidím, kde je zakopaný pes: součet dnů.

A. Přesně tak, indukce podle součtu dnů se teď použít nedá, protože součet může být nekonečný.

B. Možná, že naše věty neplatí ani pro nekonečné případy. Mně by se samozřejmě líbilo, kdyby platily, mám pocit obrovské síly, když dokazuju něco o číslech, o kterých se mi v životě ani nesnilo.

A. Na druhé straně jsme při pokusných výpočtech s nekonečnými čísly neměli žádné zvláštní potíže. Počkej, zamyslím se nad tím ... Je to v pořádku. Myslím, že to máme v suchu, my totiž „součet dnů" nepotřebujeme.

B. Jak jsi na to přišla?

A. Vzpomeň si, jak jsme spolu poprvé přemýšleli o indukci „špatných čísel". Tam jsme museli ukázat, že když věta neplatí, řekněme pro x, pak neplatí taky pro nějaké x_L z X_L a pak taky neplatí pro nějaké x_{LL} z X_{LL} atd. Je-li taková posloupnost konečná, tedy jestliže v závěru musíme dospět k případu s prázdnou $X_{LL\ldots L}$, pak věta nemohla neplatit v první řadě pro x.

B. (hvízdne) Aha, například při důkazu, že $x + 0 = x$, dostaneme $x + 0 = (X_L + 0, X_P + 0)$. Pomocí indukce předpokládáme, že $x_L + 0$ se rovná x_L pro všechna x_L z X_L. Je-li tento předpoklad chybný, pak se o nějakém x_{LL} prokázalo, že $x_{LL} + 0$ se nerovná x_{LL}; taky by nás vlastně mohlo zlobit nějaké x_{LP}. Libovolný protipříklad pak implikuje nekonečnou posloupnost protipříkladů.

A. Takže nám už stačí jenom dokázat, že neexistuje žádná do minulosti klesající nekonečná posloupnost čísel $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ taková, že x_{i+1} je v $X_{iL} \cup X_{iP}$.

B. To jsi formulovala pěkně.

A. A navíc je to pravda, protože každé číslo (dokonce každé pseudočíslo) je utvořeno ze starších. Kdykoliv tvoříme nové číslo x, mohli bychom současně dokázat, že neexistuje žádná, do minulosti klesající nekonečná posloupnost, která začíná $x_1 = x$, protože jsme už dříve dokázali, že neexistuje žádná nekonečná posloupnost, která by pokračovala libovolným ze všech možných x_2 v X_L nebo X_P.

B. To je logické a pěkné ... ale zní to skoro tak, jako bychom dokazovali platnost indukce pomocí indukce.

A. Myslím, že máš pravdu. Svým způsobem by to měl vlastně být axióm, protože formalizuje intuitivní pojem „dříve vytvořený", který jsme rozbírali v pravidlu (1). Ano, to je ono, pravidlo (1) dostane krásný základ, když to formulujeme tímto způsobem.

B. To, co říkáš, pokrývá jenom případ jedné proměnné. Naše důkazy pomocí součtu dnů používali dvou, tří a dokonce i čtyř proměnných tam, kde indukce pro (x, y, z) závisí na věcech jako (y, z, x_L) a tak dál.

A. Přesně tak. Ale v každém případě se indukce vracela zpět k nějaké permutaci proměnných s tím, že alespoň jedna z nich dostala dodatečně index L nebo P. To naštěstí znamená, že nemůže existovat nekonečný řetězec takový, že

$$(x, y, z) \rightarrow (y, z, x_L) \rightarrow (z_P, y, x_L) \rightarrow \dots$$

a tak dál, protože kdyby existoval, alespoň jedna z proměnných by sama měla do minulosti klesající nekonečný řetězec, což je ve sporu s pravidlem (1).

B. (ji znova objímá) Alice, já tě miluju nekonečně mnoha způsoby.

A. (se směje) „Jak tě miluji? Dovol mi spočítat způsoby"*)

$$1, \omega, \omega^2, \omega^\omega, \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}} \dots$$

B. Pořád se mi ještě zdá, že jsme tu nekonečnou konstrukci obešli podivným a pravděpodobně podezřelým způsobem. Ačkoliv v tom, co říkáš, nevidím žádnou chybu, přece se mi to nějak nezdá.

A. Já mám dojem, že je rozdíl mezi důkazem a výpočtem. V konečných případech, když jsme mluvili o číslech stvořených před $\aleph$ dnem, nebyl žádný podstatný rozdíl. Ale tady teď musíme určitým způsobem rozlišovat mezi důkazem a schopností výpočtu. Neexistují nekonečné do minulosti klesající posloupnosti, ale mohou být libovolně dlouhé, i když začínají tím samým číslem. Například $\omega, n, n - 1, \dots, 1, 0$ je posloupnost předků ω pro všechna n.

B. Ano. Právě jsem přemýšlel o posloupnostech předků pro ω^2. Samozřejmě jsou všechny konečné, ale mohou být tak dlouhé, že konečnost už není vůbec samozřejmá.

A. Tahle nekonečná konečnost znamená, že můžeme sestavovat platné důkazy, třeba že $2 . \pi \equiv \pi + \pi$, ale přitom nemusíme nutně umět spočítat $\pi + \pi$ v konečném počtu kroků. Výpočty může dokončit jenom pánbůh, ale my můžeme dokončit příslušné důkazy.

B. Zkusme to: $\pi + \pi = (\pi + \Pi_L, \pi + \Pi_P)$, což je ... aha, už to vidím, výpočet se štěpí na nekonečně mnoho větví, ale všechny končí po konečně mnoha krocích.

*) "How do I love thee? Let me count the ways".

A. Mně se líbí, že u téhle indukce, kterou používáme, nemusíme nikdy zvlášť vyšetřovat „výchozí případ“. Já jsem se učila indukci tak, že se vždycky nejdřív muselo dokázat P(1). To se nám nějak podařilo obejít.

B. Víš, já si myslím, že jsem teď poprvé skutečně pochopil význam indukce. Dost těžko se dokážu vyrovnat s faktem, že naše teorie platí jak pro nekonečně velká, tak pro nekonečně malá čísla a navíc ještě pro konečná binární čísla.

A. Asi s výjimkou (T8), kde se mluví o „nejstarším čísle“ s určitou vlastností. Měli bychom definovat přesně, co to znamená... myslím, že bychom každému dni mohli přiřadit číslo, řekněme největší číslo, které bylo ten den stvořeno, a tímhle způsobem dny uspořádat...

B. Podívej, jak to sleduju. Všiml jsem si, že v určitém dni je největší to číslo, které má X_P prázdnou a X_L obsahuje všechna dříve stvořená čísla.

A. Tohle možná vysvětluje, proč byl $\aleph$ den a $(\aleph + 1)$ den, ale den $(\aleph - 1)$ nebyl.

B. Asi máš pravdu, ale na mne je to příliš hlubokomyslné. Já jsem připraven pustit se do násobení, co ty?

16. Násobení

A. Kdepak je ten papír, kam jsi zapsal Conwayovo pravidlo pro násobení. Přece musí existovat způsob, jak to symbolicky zapsat ... no vidíš, už víme, co myslel „částmi stejného druhu“.

B. Alice, vždyť je to hrozně těžké. Podívej, přece se s tím nebudeme luštit. Zkusme najít pro násobení vlastní pravidla. Proč bychom to nemohli udělat stejně jako pro sčítání? Myslím to tak, že xy by mělo ležet mezi $X_L y \cup xY_L$ a $X_P y \cup xY_P$. Kdybychom vyloučili záporná čísla, tak by tohle mělo platit.

A. Vždyť by tahle definice byla identická se sčítáním, takže součin by byl totéž jako součet.

B. No jo, máš pravdu ... tak dobře, jsem ochoten uznat Conwayovo řešení, prohlédněme si ten papír.

A. Tak se nezlob, tvůj přístup je úplně správný. Pamatuješ, jak jsme si říkali, že se věci musí vždycky napřed zkusit?

B. Ano, aspoň tohle jsme se taky naučili.

A. Já si z toho všeho dokážu vybrat jenom to, že Conway za levou množinu xy vezme všechna čísla tvaru

$$x_L y + x y_L - x_L y_L \quad \text{nebo} \quad x_P y + x y_P - x_P y_P$$

a pravá množina obsahuje všechna čísla tvaru

$$x_L y + x y_P - x_L y_P \quad \text{nebo} \quad x_P y + x y_L - x_P y_L \,.$$

Vidíš to, levá množina obsahuje části „stejného druhu“ a pravá množina části „opačného druhu“. Má tahle definice nějaký rozumný smysl?

B. Počkej, vypadá to tajemně. Tedy xy má být větší než levá část, platí skutečně, že

$$xy > x_L y + x y_L - x_L y_L\,?$$

To je jako ..., to je ekvivalentní

$$(x - x_L)(y - y_L) > 0\,.$$

A. To je ono, součin kladných čísel musí být kladný. Další tři podmínky pro to, aby xy leželo mezi svou levou a pravou množinou, v podstatě říkají, že

$$\begin{aligned}&(x_P - x)(y_P - y) > 0'\,,\\&(x - x_L)(y_P - y) > 0\,,\\&(x_P - x)(y - y_L) > 0\,.\end{aligned}$$

Tak dobře, definice vypadá rozumně, i když jsme zatím nic nedokázali.

B. Chtěl bych si vyzkoušet několik jednoduchých případů, jen tak abych se přesvědčil, než se pustíme do dokazování hlavních vět pro násobení. Zkusme to

$$xy = yx\,, \tag{T20}$$

$$0y = 0\,, \tag{T21}$$

$$1y = y\,. \tag{T22}$$

Tohle bylo jednoduché.

A. Dobře, nula krát nekonečno je nula. Další jednoduchý výsledek je

$$-(xy) = (-x)y\,. \tag{T23}$$

B. Správně. Podívej, už to začíná být zábavné:

$$\tfrac{1}{2}x \equiv \left(\tfrac{1}{2}X_L \cup \left(x - \tfrac{1}{2}X_P\right),\ \left(x - \tfrac{1}{2}X_L\right) \cup \tfrac{1}{2}X_P\right). \tag{T24}$$

A. No vidíš, vždycky mě hrozně zajímalo, co je to polovina nekonečna.

B. Polovina nekonečna ... už se na tom pracuje.

$$\tfrac{1}{2}\omega \equiv \left(\{1, 2, 3, 4, \ldots\},\ \{\omega - 1, \omega - 2, \omega - 3, \omega - 4, \ldots\}\right).$$

Není to zajímavé umět dokázat, že $\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega = \omega$?

Podívej, tady je další lahůdka:

$$\varepsilon\omega \equiv 1\,.$$

Naše nekonečně malé číslo je převrácená hodnota nekonečna.

A. Zatímco jsi počítal, probírala jsem násobení obecně. Pro pseudočísla to vypadá trochu podivně ... našla jsem pseudočíslo p, pro které $(\{1\}, \emptyset)\,p$ není totéž jako $(\{0, 1\}, \emptyset)\,p$, ačkoliv jak $(\{1\}, \emptyset)$, tak $(\{0, 1\}, \emptyset)$ se obě rovnají 2. Navzdory těmhle potížím jsem použila tvou metodu se sestavením schématu a myslím, že

$$x(y + z) \equiv xy + xz \tag{T25}$$

$$x(yz) \equiv (xy)\,z \tag{T26}$$

se dá dokázat pro libovolná pseudočísla a

(T27) je-li $x > x'$ a $y > y'$, pak $(x - x')(y - y') > 0$

pro libovolná čísla. Vyplývá to z toho, že kdykoliv x a y jsou čísla, pak xy je také číslo.

B. Pomocí věty (T27) se dá ukázat, že

(T28) je-li $x \equiv y$, pak $xz \equiv yz$

pro všechna čísla. Takže všechny výpočty, které jsme dělali, jsou úplně v pořádku. Tak si myslím, že kromě mlhavé zmínky o „řadách, podílech a kořenech" známe všechno, o čem se na desce mluví.

A. No … a co dělení? Vsadím se s tebou, že pro x mezi 0 a 1 se dá dokázat, že

$$1 - \frac{1}{1+x} \equiv (\{x - x^2, x - x^2 + x^3 - x^4, \ldots\}, \{x, x - x^2 + x^3, x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5, \ldots\}).$$

Pro $x = \frac{1}{2}$ jsme tak alespoň dostali $\frac{1}{3}$. Pomocí nějaké podobné metody by se nám možná podařilo dokázat, že každé nenulové číslo má převrácenou hodnotu.

B. Alice, podívej, to je skutečná pastva pro oči …

$$\sqrt{\omega} \equiv \left(\{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \left\{\frac{\omega}{1}, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{3}, \frac{\omega}{4}, \ldots\right\}\right).$$

$$\sqrt{\varepsilon} \equiv \left(\{\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon, \ldots\}, \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}\right).$$

A. Bille, vždyť každý objev vede k dalšímu a dalšímu.

B. (se dívá na zapadající slunce) Ještě pořád je nekonečně mnoho věcí, které je třeba udělat … a jen konečně mnoho času …

Čtenář už zřejmě usoudil, že tu nejde o skutečný příběh. „J. H. W. H. Conway" však přesto existuje, je to profesor cambridžské univerzity John Horton Conway. Skutečný Conway odvodil pro tato „mimořádná" čísla celou řadu dalších výsledků kromě těch, o kterých zde byla řeč. Dokázal například, že každý polynom lichého stupně, jehož koeficienty jsou libovolná čísla, má kořen. Ukázal také, že každé pseudočíslo p odpovídá nějaké situaci ve hře, kterou spolu hrají dva hráči, levý a pravý, přičemž následující čtyři vztahy

$$p > 0, \quad p < 0, \quad p = 0, \quad p \parallel 0$$

po řadě odpovídají těmto čtyřem podmínkám

levý hráč vyhrává, pravý hráč vyhrává,
hráč, který hraje jako druhý, vyhrává, hráč, který hraje jako první, vyhrává,

při výchozí situaci p. [Viz J. H. CONWAY, *On Numbers and Games*, Academic Press 1976.] Celá teorie je však dosud v plenkách, a čtenář má tedy možnost zamyslet se nad některými dosud neprozkoumanými otázkami: Co se dá zjistit o logaritmech, o spojitosti, o multiplikativních vlastnostech pseudočísel, o zobecnělých diofantických rovnicích atd.

Doplňující problémy k jednotlivým kapitolám

Prvá část původního Knuthova doslovu k Nadreálným číslům byla v tomto překladu použita jako úvod (viz PMFA 2/1978). Druhá část doslovu, kterou otiskujeme nyní, obsahuje doplňující problémy k jednotlivým kapitolám a autorův metodologický návod pro učitele, kteří budou s jeho textem pracovat. Autor navrhuje, aby uvedené problémy byly použity ke kolektivní diskusi při práci v seminářích. (Pozn. překl.)

1. Po 3. kapitole: Co je to „abstrakce“ a co je „zobecnění“?
2. Po 5. kapitole: Nechť g je funkce, která číslům přiřazuje čísla taková, že $x \leqq y$ implikuje $g(x) \leqq g(y)$. Nechť $f(x)$ je definována vztahem

   $$f(x) = (f(X_L) \cup \{g(x)\}, f(X_P)).$$

   Dokažte, že $f(x) \leqq f(y)$ tehdy a jen tehdy, je-li $x \leqq y$. Ve speciálním případě, kdy $g(x)$ je identicky rovno 0, vyčíslete hodnotu $f(x)$ pro co možná největší počet čísel. [Pozn.: Po 12. kapitole má tato úloha smysl, i když se „čísla“ nahradí „pseudočísly“.]
3. Po 5. kapitole: Nechť x, y jsou čísla, jejichž levé a pravé části jsou jedna, „jako“ druhá, ale nejsou identické. Formálně nechť:

   $$f_L : X_L \to Y_L, \; f_P : X_P \to Y_P,$$
   $$g_L : Y_L \to X_L, \; g_P : Y_P \to X_P$$

   jsou takové funkce, že $f_L(x_L) \equiv x_L, f_P(x_P) \equiv x_P, g_L(y_L) \equiv y_L, g_P(y_P) \equiv y_P$. Dokažte, že $x \equiv y$. [Alice a Bill si neuvědomili, že toto lemma bylo důležité pro některé úvahy a předpokládali je bez důkazu. Lemma platí také pro pseudočísla.]
4. Po 6. kapitole: Jsme při rozvíjení teorie Conwayových čísel z několika uvedených axiómů oprávněni používat v důkazech vlastnosti čísel, které už „známe“? (Např. používání indexů jako $i - 1$ a $j - 1$ atd.)
   [Upozornění: Tato otázka může vést k diskusi o metamatematice, na kterou by se vyučující měl připravit předem.]
5. Po 9. kapitole: Proveďte úplný formální důkaz obecného předpisu pro čísla po n dnech. [Jde o instruktivní cvičení na volbu vhodného značení. Studenti by se měli snažit vybrat ze všech možností tu, která je při přesném důkazu nejsrozumitelnější, ta v tomto smyslu odpovídá intuitivnímu neformálnímu důkazu, který provedli Alice a Bill.]
6. Po 9. kapitole: Existuje jednoduchý předpis, který by udával pro dané binární číslo, kterého dne bude toto číslo stvořeno?
7. Po 10. kapitole: Dokažte, že ze vztahu $x \equiv y$ vyplývá $-x \equiv -y$.
8. Po 12. kapitole: Zjistěte hodnotu $x \oplus y$ pro co možná nejvíce čísel x a y.
9. Po 12. kapitole: Změňte pravidla (1) a (2) tak, že na všech třech místech $\not\geqq$ nahra-

díte $<$ a připojte k nim nové pravidlo:

$$x < y \quad \text{tehdy a jen tehdy, je-li} \quad x \leqq y \quad \text{a} \quad y \nleqq x\,.$$

Pomocí těchto definic odvoďte znovu teorii Conwayových čísel. [Takto lze dobře zrekapitulovat materiál z prvních kapitol. Důkazy musí být na několika místech změněny. Nejtěžší bude dokázat, že pro všechna čísla platí $x \leqq x$. Existuje velice krátký důkaz tohoto tvrzení, ale není snadné na něj přijít a já ho raději neprozradím. Snažte se, aby studenti sami zjistili, že pro pseudočísla není nový vztah $<$ identický s Conwayovým vztahem (i když pro čísla oba pojmy samozřejmě splývají). Použijeme-li nová pravidla, $x \leqq x$ vždycky neplatí; je-li

$$x = (\{(\{0\}\,,\,\{0\})\}\,,\,\emptyset)\,,$$

pak $x \equiv 1$, zatímco podle Conwayových pravidel je $x \equiv 0$. Conwayova definice má lepší vlastnosti, ale zavedení tohoto nového vztahu je poučné.]

10. Po 13. kapitole: Ukažte, že Alicin a Billův kruhový problém se dá vyřešit i jinak, totiž tak, že se z požadavků pro důkaz $\mathrm{II}(x, y, z)$ vyloučí $\mathrm{III}(z, Z_L, y)$ a $\mathrm{III}(Z_P, z, x)$. Jinak řečeno, dokažte přímo, že pro žádné z_L nemůže platit

$$z + y \leqq z_L + y\,.$$

11. Po 14. kapitole: Určete „nejbližší okolí" každého reálného čísla během několika prvních dnů po dnu $\aleph$.
12. Po 15. kapitole: Zkonstruujte největší nekonečně velká čísla a nejmenší kladná nekonečně malá čísla, která si dokážete představit.
13. Po 15. kapitole: Stačí omezit X_L a X_P na spočetné množiny? [Je to těžká otázka, ale může vést k zajímavé diskusi. Učitel by se měl předem připravit na zmínku o ordinálních číslech.]
14. Téměř kdekoliv: Jaké vlastnosti má takto definovaná operace:

$$x \circ y = (X_L \cap Y_L, X_P \cap Y_P)\,?$$

[Studenti by měli zjistit, že to není $\min(x, y)$]. Je zajímavé zkoumat i mnoho dalších operací, např. je-li $x \circ y$ definováno jako

$$(X_L \circ Y_L, X_P \cup Y_P)$$

nebo $(X_L \circ y \cup x \circ Y_L, X_P \cup Y_P)$

atd.

15. Po 16. kapitole: Ukažte, že je-li X množina všech čísel, pak $(X, \emptyset)$ není ekvivalentní žádnému číslu. [Teorie množin v sobě skrývá při neopatrném zacházení různé paradoxy. Třída všech množin není přesně vzato množina. Odtud paradoxy typu „množina všech množin".]
16. Po 16. kapitole: x nazveme *zobecnělé celé číslo*, jestliže

$$x \equiv (\{x - 1\}, \{x + 1\})\,.$$

Ukažte, že zobecnělá celá čísla tvoří systém uzavřený na sčítání, odčítání a násobení. Tento systém obsahuje obyčejná celá čísla n, dále čísla jako $\omega \pm n$, $\frac{1}{2}\omega$, atd. [Tuto úlohu navrhl SIMON NORTON.]

17. Po 16. kapitole: x nazveme *reálné číslo*, jestliže $-n < x < n$ a jestliže

$$x \equiv (\{x-1, x-\tfrac{1}{2}, x-\tfrac{1}{4}, \ldots\}, \{x+1, x+\tfrac{1}{2}, x+\tfrac{1}{4}, \ldots\}).$$

Dokažte, že tato reálná čísla jsou uzavřená vzhledem ke sčítání, odčítání a násobení a že jsou izomorfní s množinou reálných čísel zavedenou nějakým tradičnějším způsobem. [Tuto úlohu a následující úlohy navrhl John Conway.]

18. Po 16. kapitole: Změňte pravidlo (1) takto: (X_L, X_P) je číslo jen tehdy, když $X_L \ngeq X_P$ a je-li splněna následující podmínka:

X_L má největší prvek nebo je nula tehdy a jen tehdy, má-li X_P nejmenší prvek nebo je nula.

Ukažte, že tímto způsobem dostaneme všechna reálná čísla (a žádná jiná).

19. Po 16. kapitole: Najděte pseudočíslo p takové, že $p + p \equiv (\{0\}, \{0\})$. Je to překvapivě obtížná úloha a vede k zajímavým dílčím problémům.]

20. Po 15. nebo 16. kapitole: Pseudočíslo $(\{0\}, \{(\{0\}, \{0\})\})$ je > 0 a $< x$ pro všechna kladná čísla x. Je skutečně infinitezimální! Číslo $(\{0\}, \{(\{0\}, \{-1\})\})$ je dokonce ještě menší. A libovolné pseudočíslo $p > 0$ je $> (\{0\}, \{(\{0\}, \{-x\})\})$ pro vhodně velké x.

21. Po 16. kapitole: Pro libovolné číslo x definujte:

$$\begin{aligned} \omega^x = (\{0\} \cup n\omega^{x_L} &\mid x_L \in X_L, n = 1, 2, 3, \ldots\}, \\ \{\tfrac{1}{2} n\omega^x P &\mid x_P \in X_P, n = 1, 2, 3, \ldots\}). \end{aligned}$$

Dokažte, že $\omega^x . \omega^y = \omega^{x+y}$.

22. Po 16. kapitole: Zkoumejte vlastnosti symetrických pseudočísel S takových, že

$(P_L, P_P) \in S$ tehdy a jen tehdy, je-li $P_L = P_P \leqq S$.

Jinak řečeno, prvky S mají identické levé a pravé množiny a stejnou vlastnost mají i prvky jejich levých a pravých množin. Ukažte, že S je uzavřené na sčítání, odčítání a násobení. Zkoumejte dále vlastnosti S (např. kolik prvků S, které nejsou jeden „jako" druhý, je každý den stvořeno; je na jejich aritmetice něco zajímavého?) [Tento problém s otevřeným koncem je pravděpodobně nejlepší z celého seznamu, protože se za ním skrývá neobyčejně bohatá teorie.] Učitelům, kteří mě o to požádají dopisem na stanfordskou univerzitu, pošlu návody k řešení úloh 9, 19 a 22.

Závěrem bych rád uvedl několik poznámek adresovaných především učitelům, kteří povedou semináře vycházející z této knihy. Všichni ostatní přestaňte, prosím, číst a knížku okamžitě zavřete.

Milý učiteli, v povídce je mnoho implicitních námětů pro kolektivní diskusi. Několik prvních kapitol vám nezabere mnoho času, ale brzy se vám může stát, že za hodinu nestačíte projít ani jednu celou kapitolu. Bylo by možná dobré, aby si každý na začátku zběžně prošel celou knihu, protože vzhledem k vývoji událostí na konci se stane začátek knihy zajímavý. Stále je třeba klást důraz na to, aby studenti oddělovali důležité základní principy obou postav, tedy modus operandi. Proč přistupují k problému právě tak, jak to dělají, co je na jejich přístupu dobré, co špatné? Jak se od sebe liší Alicina a Billova „moudrost"? (Jejich povahy jsou zcela odlišné.) Dalším zásadním pravidlem by mělo být, že studenti kontrolují matematické detaily, které jsou často jenom naznačeny; je to totiž jediný způsob, jak mohou skutečně zjistit, oč vlastně v knize jde. Bylo by nejlépe, kdyby se vždycky nejprve sami pokusili vyřešit naznačený problém, než budou pokračovat ve čtení. Objeví-li se někde uvozovky „..." – znamená to většinou, že postavy uvažují, a čtenář by měl udělat totéž.

Myslím, že dobrým pravidlem při kolektivní diskusi o uvedených cvičeních je způsob, při němž každý dostane jen omezený počet možností, aby do diskuse zasáhl. Zamezíte tím tomu, aby hovornější lidé ovládli pole a zničili celou diskusi.

Dále bych doporučoval, aby byl celý kurs zakončen třítýdenním nebo čtyřtýdenním obdobím, během kterého by studenti zpracovali závěrečnou písemnou práci na nějaké téma, které není v knize explicitně rozebráno. Například cvičení s otevřeným koncem z výše uvedeného seznamu představují několik možných námětů. Toto téma by studenti mohli zpracovávat po dvojicích. Studenti by také měli být upozorněni na to, že budou hodnoceni jak za stylistickou stránku, tak za matematický obsah, řekněme v poměru 1 : 1. Je třeba jim říci, že tato závěrečná práce nemá vypadat jako typické domácí cvičení. Zatímco domácí úkol je většinou jenom snůškou přehledně seřazených faktů bez motivace atd., ve kterých vidí známkující důkaz, tato závěrečná práce by měla být napsána ve stylu matematické učebnice.

Další způsob, jak dát studentům možnost, aby získali zkušenosti se psaním, je uložit jim, aby se střídali v sestavování resumé z toho, co se odehrávalo na semináři. To je dobré také k tomu, že všichni studenti budou mít písemné záznamy z diskusí a nebudou se muset rozptylovat tím, že si dělají vlastní poznámky. To jsou podle mého názoru totiž dvě hlavní slabiny současného způsobu matematického vzdělávání – nedostatečná průprava pro tvořivou práci a nedostatečná praxe v sepisování výsledků.

Doufám, že tato knížečka pomůže k odstranění zmíněných nedostatků.

Stanford, California D. E. K.

Květen 1974.

DOSLOV REDAKTORA

Nakonec by snad byla na místě aspoň jedna poznámka. Někteří čtenáři by mohli z celého článku získat dojem, že ideálním prostředím pro vznik dobré matematické teorie je pustý ostrov. Myslím, že samotné dílo D. E. Knutha a J. H. Conwaye jako předních odborníků v aplikované matematice tuto domněnku vyvrací. Jsem proto přesvědčen, že jediným důvodem, proč autor umístil své hrdiny na pustý ostrov, je, aby Alice a Bill nebyli při práci rušeni přemírou úřadování. ***O. Kowalski***