

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Ramesh Kapadia

Vraťte do škol geometrii

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 32 (1987), No. 2, 97--100

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138728>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1987

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

- [1] *Logičeskije metody analiza i sinteza schem* (3. vyd.). Moskva, Energija, 1974.
  - [2] *Sistemy upravlenija. Zadanija, Projektirovanije, Realizacija*. Mskva, Energija, 1977.
  - [3] *Igry i avtomaty*. Moskva, Energija, 1966.
  - [4] *Verojatnostnyje avtomaty*. Moskva, Energija, 1970.
  - [5] *Myšlenije i avtomaty*. Moskva, Sovetskoje radio, 1972.
  - [6] *Vvedenije v teoriju vyčislitel'nych sistem*. Moskva, Sovetskoje radio, 1972.
  - [7] *Logiko-lingvističeskije modeli v sistemach upravlenija*. Moskva, Energoizdat, 1981.
  - [8] *Fantazija ili nauka? Na puti k iskusstvennomu intellektu*. Moskva, Nauka, 1982.
- 

---

## diskuse

VRAŤTE DO ŠKOL GEOMETRII

*Remesh Kapadia, Londýn*

### Úvod

Nedávno mi jeden kolega řekl, že studenti dnes už nevědí, co je věta a co je důkaz. Stěžoval si, že to bylo zaviněno odstraněním eukleidovské geometrie ze školních osnov. Cynik sice může namítnout, že studenti stejně nikdy nevěděli, co je důkaz, ale rozhodně je pravda, že eukleidovská geometrie v současnosti hraje poměrně podřadnou roli ve většině škol. Tento trend nadšeně obhajovalo mnoho prominentních matematiků, nejvýmluvněji snad Jean Dieudonné, který prohlašoval „Pryč s Eukleidem!“ Podle jeho názoru Eukleides nezapadá do integrovaného přístupu k čisté matematice. Nedávno však o tom vyjádřili své pochybnosti takoví matematici jako René Thom a Michael Atiyah. Tento článek předkládá různá

stanoviska v naději, že podnítí diskusi a pomůže při řešení problému.

Každý patrně ví o velkých změnách, které se projevily v osnovách školské matematiky. Hlavním záměrem bylo změnit a modernizovat obsah výuky, minimální pozornost byla věnována vyučovacím metodám, ačkoliv občas se citovaly výzkumné práce určitých psychologů. Z aritmetiky a algebry byly odstraněny některé jednotvárné a složité manipulace; byl přijat jednodušší integrovaný přístup, založený na teorii množin a na pojmu funkce. Nová témata zahrnovala množiny, logiku, relace, funkce, lineární programování, pravděpodobnost a statistiku. Eukleidovská geometrie byla nahrazena geometrií transformací. Uvědomme si, že geometrie byla po více než sto let hlavním zdrojem starostí v matematickém vzdělávání a že stále vyvolává spory.

### Geometrie

V 19. století existovalo mnoho důvodů pro rozvoj vyučování matematice ve školách — průmyslová revoluce, počátky tovární výroby, vliv univerzit, vzrůstající důraz na vzdělávání; přitom posledním, i když ne zanedbatelným důvodem, byly války a z nich plynoucí podněty. Matematika byla shledána jako užitečný předmět

---

REMESH KAPADIA: *Bring back geometry*. The Mathematical Intelligencer, vol. 7, No 2., 1985, Springer-Verlag New York. Přeložila HANA RÍPKOVÁ.

© 1985 Springer-Verlag New York

a byla povýšena na jeden ze základů každého vzdělání; nepochybně se tak pohlíželo na aritmetiku. To vytvořilo podmínky pro vznik problémů, které vystávají ve vyučování matematice, protože matematika byla ztotožněna s aritmetikou, jíž se vyučovalo jako drilu. Důraz se kladl spíše na zapamatování než na porozumění. Byla to, jak je obecně známo, neúčinná metoda, zavržená pro svůj [negativní] emocionální vliv na velmi mnoho dětí, jež se úplně přestaly zajímat o počítání, jakmile to šlo.

Obdobná situace se vyvinula v geometrii, druhé části matematiky, které se ve školách vyučovalo. Původně byla geometrie v úctě jako součást řecké klasické tradice. Učitelé se nábožně drželi Eukleidových *Základů*, dokonce i originálního Eukleidova číslování odstavců. Eukleides však napsal své *Základy*, aby poučil dospělé lidi, ne děti; jde o přesný záznam deduktivního systému.

K Eukleidovým *Základům* můžeme mít logické výhrady, to však není jádro sporu; jde o to, že pro vyučování není text příliš poučný. První pokusy o vylepšené učebnice geometrie se objevily ve Francii a Německu: Clairaut [v první polovině 18. století] se soustředil na motivaci výuky zeměměřičskými a dalšími praktickými záležitostmi, Klein [na počátku 20. století] prosazoval, aby se nejprve vyložila konkrétní fakta a teprve později se postupně uváděly logické základy geometrie.

Eukleidovy *Základy* zůstaly ve většině zemí prakticky jedinou učebnicí používanou až do konce 19. století. \*) Na porozumění se kladl malý důraz; učitelé vyžadovali, aby žák vychrlil vybranou větu,

---

\*) Autor v předešlých pasážích podal velmi zjednodušený výklad o stavu využívání geometrii ve světě; v tomto odstavci hovoří především o zemích s britským školským systémem. (Pozn. red.)

jakmile zaslechne číslo odstavce, například I., 32. [Zde šlo o 32. větu v první knize *Základů*.] Tato situace nakonec vedla v Anglii k založení Společnosti pro zlepšení vyučování geometrii (AIGT – Association for the Improvement of Geometrical Teaching), ze které se později vytvořila Matematická společnost, první národní sdružení učitelů matematiky [v zemích bývalého britského impéria]. Společnost měla jisté výsledky při zlepšování výuky geometrie, ale byl to dosti pomalý a pracný proces. V jedné ze svých zpráv Společnost uznala důležitost experimentálně pojaté geometrie a prosazovala, aby deduktivní výklad byl doplněn cvičeními.

Přesto se v mnoha školách dále geometrie pouze memorovala. Učitelé nutili žáky, aby se naučili důkazy a pak je při zkoušení doslovně opakovali. Samozřejmě, že tato činnost měla s matematikou jen málo společného. Když pak v šedesátých letech došlo k modernizaci osnov, geometrie se zřejmě stala cílem útoků. Převládal pocit, že geometrie transformací je přirozenější v rámci jednotného výkladu matematiky a lépe se hodí k funkcionálnímu přístupu, který byl všeobecně přijat.

Jean Dieudonné stál v čele vědců z akademických pracovišť, kteří trvali na tom, že matematika musí být modernizována. Sám už byl úzce spojen s francouzskou matematickou školou pracující pod pseudonymem Bourbaki. Snažil se o uspořádání dosavadních matematických znalostí do souvislé a systematické struktury, a je ironií, že tato snaha není nepodobná tomu, oč se pokoušel i Eukleides o dvě tisíciletí dříve.

Dieudonné využil své výhodné postavení v moderní matematické vědě, když ve svém známém proslovu na semináři OEEC v Royaumontu prohlásil: „Pryč s Eukleidem!“ Dieudonné totiž předvídal

jednotný, integrovaný přístup k matematice. Tento přístup podporoval i psycholog Jean Piaget, který hájil Bourbakiho ideu o třech základních strukturách: algebraické struktury, struktury uspořádání a topologické struktury. Piaget stále zdůrazňoval primát topologie, což bylo použito jako argument k vyhoštění eukleidovské geometrie, i když teze o nadřazenosti topologie je už nyní odmítnuta.

Dieudonného cílem je odstranit zastaralý způsob vyučování geometrii podle Eukleida. Tvrdí, že základní poučky eukleidovské geometrie (a to v prostoru libovolné dimenze) se dají velmi snadno odvodit z pojmu vektorového prostoru, na němž je definována pozitivně definitní kvadratická forma. Tato metoda by měla být použitelná na středoškolské úrovni a měla by nahradit neuvěřitelné a zřejmě bezvýznamné pitvání trojúhelníků. Z tohoto důvodu chce Dieudonné zavést základní věty eukleidovské geometrie pomocí lineární algebry a pokud možno se vůbec vyhnout obrázkům, což učinil ve své knize. Odmítá trojúhelníky a kružnice, jež považuje za umělé hračky na rozdíl od základních pojmů jako symetrie nebo posunutí.

Tento přístup byl ostře napaden světově uznávanými geometry René Thomem a Michaellem Atiyahem na mezinárodních konferencích o matematickém vzdělávání (ICME) v letech 1972 a 1976.

Thom odmítá strukturovaný přístup a je obzvlášť jízlivý vůči algebře. Prohlašuje, že v algebře jsou věty pro školní úroveň buď triviální, nebo nedokazatelné. Například první zajímavá věta v teorii grup je věta Lagrangeova, ale ta vyžaduje dosti důmyslné myšlenky. Problém je v tom, že s poměrně slabou axiomatickou strukturou, začínající pouze se čtyřmi axiomy, se rychle stupňuje obtížnost důkazů. V geo-

metrii je naopak mnohem bohatší axiomatická struktura. Navíc její axiomy odpovídají intuitivním představám, jež napomáhají rozvoji poznání, přestože mohou v sobě mít logické mezery. Thom dokonce tvrdí, že geometrie je přirozeným prostředníkem mezi jazykem a matematikou. Michael Atiyah také zdůvodňuje opětné zavedení eukleidovské geometrie do školní výuky. Zdůrazňuje důležitost vizuálního přístupu v matematice, který se rozvíjí právě díky geometrii. Tvrdí také, že axiomatický systém geometrie je přístupnější.

### Diskuse

Při rozhodování o školních osnovách je mimo jiné důležité přihlédnout k psychologickým a výchovným aspektům, ale o těch pojednávají jiné práce. (G. F. R. Kapadia: *Pedagogická důležitost formální geometrie*, práce pro PhD, Nottingham) Jistě by však bylo zajímavé vyslechnout názory i dalších matematiků na tyto otázky. Je eukleidovská geometrie (a celkové pojetí Eukleidovo nebo přístupnější učebnice Durellova) staromódní? Je strukturální přístup důležitý? Existují nějaká vhodnější témata, na nichž by se žáci mohli naučit dedukci?

Podle mého názoru eukleidovská geometrie má právem své místo v osnovách z hlediska matematického i historického. Je mezníkem ve vývoji lidstva a její dosah daleko překračuje hranice matematiky. Je to první a nejdůležitější příklad deduktivního systému. Je podstatnou součástí kulturního dědictví a měla by být zařazena do školské matematiky. I když se v minulosti vyučovala špatně s důrazem na memorování spíše než na porozumění, poskytuje přece jen řadu možností. Axiomy jsou intuitivně přijatelné, dokonce i proslulý axiom rovnoběžnosti; většina

lidí se spíše pozastavuje nad možností, že by neplatil. V geometrii existuje velké množství vzrušujících a udivujících výsledků, které mohou dokázat i schopní studenti ve škole.

Dedukce tvoří jádro matematiky a odlišuje ji od ostatních vědeckých disciplín. I v jiných oblastech, jako je teorie čísel nebo kombinatorika, lze uplatnit deduktivní výklad. Podle mého názoru je však geometrie ideální, a to i proto, že jediná umožňuje člověku používat grafická znázornění; obrázky sice mohou mást, ale mnohem častěji ukazují správným směrem. Náčrty usnadňují člověku vidět problém vcelku. Tento vizuální prvek myšlení je opravdu velice významný.

V geometrii také existuje obrovská zásobna problémů, od relativně triviálních po velice obtížné. To žákům pomáhá, aby svým vlastním tempem rozvíjeli pojem důkaz a učili se jej chápat. Je zřejmé, že není možné a ani žádoucí vyučovat všechny Eukleidovy knihy; mnohé z jejich obsahu bylo překonáno nebo není zajímavé. Přesto záleží na tom, aby se část eukleidovské geometrie zachovala jako způsob, jak vyučovat dedukci. Zdá se, že poznatky z první Eukleidovy knihy, která se týká trojúhelníků, by se měly studovat metodou řešení praktických úloh. Třetí Eukleidova kniha, která se zabývá větami o kružnicích, se zdá být nejvhodnější pro deduktivní výklad. Je v ní mnoho překvapivých a stimulujících výsledků, navíc je uzavřeným tématem. Nechtěl bych tedy obhajovat návrat k tradičnímu přístupu k Eukleidovi, ale přesto jsem velkým zastáncem obrázků v matematice a v matematickém myšlení. Tvůrčí matematici pochopitelně na intuici příliš nespolehají od té doby, kdy byly v analýze objeveny některé šokující výsledky, jež intuici odporovaly. U žáků to však určitě

nehraje roli; výhody převáží jakékoli pochybnosti, které pocítují matematici. Odtud pramení moje prosba, aby se do učebnic vrátily obrázky a věty o kružnicích.

#### VYJADRENIE K VYUČOVANIU GEOMETRIE NA NAŠICH ŠKOLÁCH

*Václav Medek, Bratislava\**

Geometria má v súbore všeobecnevzdelávacích predmetov osobitný význam. Učí poznávať priestor a jeho časti a ich základné vlastnosti. Okrem toho, že žiak nadobúda veľmi dôležitú schopnosť priestorovej predstavivosti, získava aj prostriedky na riešenie situácií, s ktorými sa stretáva v bežnom živote, ale aj vo väčšine zamestnaní. Bez geometrických poznatkov majú v súčasnosti veľmi sťaženú prácu absolventi škôl inžinierskeho a prírodovedného zamerania, ale aj napr. lekári (napr. pri používaní moderných diagnostických metód založených na stereológii). Veľmi dôležitou zložkou výučby geometrie je výchova žiakov k schopnosti dobrého grafického prejavu. Grafický spôsob sprostredkovania informácií je jedným z najefektívnejších (ilustrácie v knihách a odborných prácach, v projektovaní, v propagácii, v animovanom filme atď).

Z tohoto hľadiska pôsobí znepokojujúco, že v posledných rokoch badať u absolventov stredných škôl (napr. pri vyhodnocovaní prijímacích pohovorov na vysoké školy technické a na matematicko-fyzikálne fakulty) veľmi slabé vedomosti z geometrie. Študenti neovládajú základné pojmy z planimetrie (pojem zhodnosti, podobnosti, uhla a jeho miery, miery

---

Prof. RNDr. VÁCLAV MEDEK je predsedom Odbornej skupiny pro deskriptivní geometrii, technické kreslení a počítačovou grafiku při MPS JČSMF. Pozn. red.