Pavel Goralčík

O jednom pěkném algebraickém výsledku

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 25 (1980), No. 3, 139--144

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138778

O jednom pěkném algebraickém výsledku*)

Pavel Goralčík, Praha

Moderní matematika si razí cestu pletivem problémů mohutnými prostředky, asi jako důlní kombajn sloji. Čas od času ovšem narazí na skálu problému neobyčejné tvrdosti a vyláme si zuby. Podobně jako když novodobý člověk vrtá do panelu, narazí na křemínek a zlomí vrták. Pak nezbývá, než pracně odstranit zbytky starého nástroje, poohlédnout se po novém, pokud možno tvrdším a ostřejším, a začít znovu houževnatě vrtat, snad o malinko jiným směrem, pokud to původně načatý otvor ještě dovolí.

Felix Klein rád říkával svým žákům, že čistá matematika se rozvíjí tehdy, když se k řešení starých problémů přistupuje s novými metodami.

Podstatné problémy, vzdorující standardním metodám, přitahují matematiky a mobilizují jejich síly. Těžké problémy přesto čelí frontálnímu útoku zpravidla desítky let, jsou pevně usazeny v matematickém povědomí a vytvářejí stálé napětí v poli matematického snažení. A tak jsou problémy čekající na své řešení nikoli slabostí, nýbrž životní silou matematiky.

Co se stane, když někdo vyřeší starý těžký problém? Kromě toho, že způsobí sportovní zklamání méně úspěšným řešitelům, může být sám poněkud zaskočen reakcí publika (nadšeně tleskajícího), když zjistí, jak tomuto vlastně pramálo záleží na tom, jaká je přesná odpověď na danou otázku. Zase jeden problém vyřešen — no a co?

Hodnotu výsledku a vynaložené práce ocení poměrně úzký okruh zasvěcenců. Ti se totiž okamžitě vrhnou na metodu, poněvadž dobře vědí, že ta je pro ně zlatým dolem nových myšlenek a technik, jsou žhaví použít ji na své problémy a co nejlépe tak využít průlomu matematické fronty. Problém je vyřešen — metoda zůstává.

Kromě úzce odborného aspektu výjimečného matematického výsledku jsme však také svědky tvůrčího činu a tu se vždy znovu vnucují obecnější otázky filozofické, psychologické, sociologické a pedagogické povahy. Kdo by nechtěl nahlédnout do tvůrčí dílny? Nebýt toho, asi bych se sotva pustil do následujícího (tak jako tak ožehavého a zoufalého) pokusu vylíčit širší veřejnosti historii jednoho pěkného algebraického výsledku, jíž jsem byl bezprostředním svědkem.

Na podzim roku 1970 jsem se obzvláště těšil na svoji přednášku z lineární algebry v 1. ročníku, neboť přesně před rokem jsem se na prázdninovém soustředění úspěšných řešitelů matematické olympiády seznámil se skupinkou velice bystrých studentů, o nichž jsem věděl, že letos zasednou v mé posluchárně. Dělal jsem si plány, že jakmile se noví prvňáci trochu rozkoukají a vpraví do studia u nás, začnu s nimi problémový seminář, velice neformální a hlavně od samého počátku zaměřený na samostatné řešení problémů, jak jsem se tomu dříve naučil u docenta Hedrlína.

---

*) Přetištěno z bulletinu Univerzitní zprávy (vydává pro vnitřní potřebu Rektorát Univerzity Karlovy v Praze), číslo 1 (říjen 1979), str. 30—39. Prošlo jazykovou úpravou v nakladatelství Academia.

Rozvrh mi přál, přednáška byla odpoledne v jedné z malostranských posluchároren, jež zůstávala pak již volná. Prvních šest týdnů jsem při přednáškách zadával různé zajímavé úlohy (čerpal jsem je z časopisů) a žádal jsem jejich písemné řešení, aniž bych oznámil, proč to dělám. Vše, co student zažije v prvních dnech na univerzitě, například doučovací kursy, mu přijde, jako že „se to dělá".

Později jsem navrhl, abychom se scházeli pravidelně po přednášce a místo řešení úloh zkusili „dělat matematiku". Uvažoval jsem, že se spolu podíváme do teorie automatů, pokusíme se najít vhodný problém a pustíme se do jeho řešení. Žádnou přesnější představu jsem neměl.

Tady musím něco vysvětlit. Jak je možné, aby se student začátečník pouštěl do opravdového problému? Nevím, zda je tomu tak i v jiných oborech, ale mnohé těžké matematické problémy mívají překvapivě lehkou formulaci, srozumitelnou i laikovi. Například jeden dosud nevyřešený: Existuje nekonečně mnoho dvojic prvočísel p, q takových, že $p - q = 2$? Nebo nedávno vyřešený klasický problém čtyř barev. Dále, u mnohých problémů se do té míry neví, jak přistupovat k jejich řešení, že začátečník není zde na tom o nic hůř než ostřílený vlk. A ještě dále, pokud je problém neřešen dlouho, můžeme si být jisti, že vědomosti potřebné k jeho vyřešení ještě nejsou na světě. Právě v takové situaci se „dělá matematika". Zní to neskromně, ale prosím: vyřešit těžký problém je drzost.

Vyložil jsem nejdříve studentům definici automatu a zdůraznil jsem, že matematicky zde pro nás bude nejpodstatnější strukturou množina opatřená systémem transformací, tak zvaná unární algebra. Řekl jsem, jak transformace popisovat a jak z daných transformací konstruovat jiné. Zvláště studenty zaujal pojem stabilního rozkladu, jenž umožňuje vytvářet zjednodušený, blokový obraz dané algebry. Rozklad množiny do systému neprázdných a po dvou disjunktních částí (bloků) je stabilní rozklad či kongruence dané algebry, pokud žádná transformace, jimiž tato algebra operuje, „netrhá bloky", tj. převádí každý blok rozkladu celý do nějakého bloku.

Všechny rozklady dané množiny jsou hierarchicky uspořádány podle „jemnosti": řekneme, že jeden rozklad je jemnější než druhý, jestliže každý blok prvního je celý obsažen v nějakém bloku druhého. Jemnější rozklady z daného dostáváme tedy tak, že některé jeho bloky podrozdělíme do menších bloků. Ke každé dvojici rozkladů existuje vždy nejhrubší rozklad v množině všech společných zjemnění dané dvojice. Tento nejhrubší rozklad je jednoznačně určen danou dvojicí, každý blok je průnikem nějakého bloku prvního rozkladu s nějakým blokem druhého. Podobně jako nejhrubší společné zjemnění existuje k dané dvojici rozkladů také jednoznačně určené nejjemnější společné zhrubnutí. Algebraicky tedy množina všech rozkladů na dané množině představuje tak zvaný svaz, tj. částečně uspořádanou množinu (vztahem „je jemnější než"), v níž každá dvojice prvků (rozkladů) má největší dolní mez (nejhrubší společné zjemnění) a nejmenší horní mez (nejjemnější společné zhrubnutí). Stručně se nazývá ve svazech největší dolní mez a nejmenší horní mez dvojice prvků jejich průnikem a spojením. Pěkný příklad svazu je množina přirozených čísel, kde se průnik nazývá největší společný dělitel a spojení nejmenší společný násobek. Průnik a spojení dvou kongruencí (unární) algebry je opět kongruence, což znamená, že kongruence algebry tvoří svaz vnořený do svazu všech rozkladů množiny jejích prvků.

Průnik a spojení jsou ve svazu vždy danou dvojicí jednoznačně určeny, proto na ně pohlížíme jako na výsledky dvou binárních algebraických operací zadaných na množině prvků svazu. Dokonce máme axiómy (= formální podmínky ve tvaru rovnic), jež musí dvojice binárních operací na množině splňovat, aby to byly operace průniku a spojení pro nějaký svaz. Tento axiomatický popis je základem abstraktního studia svazů jakožto algebraických struktur, tj. struktur vytvářených algebraickými operacemi na množinách.

S abstraktními strukturami zadanými formálně axiomaticky bývá často tato potíž: nevíme, zda vůbec taková struktura existuje, např. po 200 let se vesele počítalo s komplexními čísly bez jejich konkrétní interpretace, jako s „pomyslnými" či dokonce „nemožnými" objekty, a to pouze na základě formálních početních pravidel. Vyhledávání objektů splňujících dané axiómy, to znamená konkrétní reprezentace formálně požadovaných struktur, patří od doby E. Noetheové k základním a často nesmírně obtížným úkolům algebraika.

Náš seminář se bezděky octl na samém počátku v gravitačním poli jednoho z těchto těžkých problémů, vymkl se (ne příliš pevnému) řízení ve směru teorie automatů a stal se seminářem z reprezentací svazů ekvivalencemi a kongruencemi algeber.

Svaz kongruencí každé algebry musí splňovat jisté abstraktně formulované požadavky (úplnost a generovanost kompaktními prvky), stručně označené jako jeho algebraičnost. Někdy ve třicátých letech G. BIRKHOFF zformuloval tento reprezentační problém: Existuje ke každému algebraickému svazu taková algebra, jejíž svaz kongruencí je s daným algebraickým svazem izomorfní? Tento problém vyřešili G. GRÄTZER a E. T. SCHMIDT v roce 1963, a to kladně, nikoli však k úplné spokojenosti algebraiků.

Každý konečný svaz je algebraický, podle Grätzera a Schmidta tedy existuje algebra se svazem kongruencí s ním izomorfním. Avšak tato algebra je u nich nekonečná, zatímco my bychom si přáli, aby konečný svaz byl reprezentován jako svaz kongruencí konečné algebry. Důvod je ten, že intuitivně rozlišujeme kvalitativně odlišné typy existence od „čisté" logické existence (předpoklad existence objektu nevede k logickému sporu), přes „konstruktivní" existenci (známe postup, schéma konstrukčních kroků vedoucích k získání požadovaného objektu) až po aktuální danost objektu (třeba ve tvaru úplného zápisu, výčtu všech prvků, tabulek operací a vztahů). Aktuální danost spojujeme s představou „malých" konečných množin, při čemž „znalost" posuzujeme (velmi vágně) případ od případu. Potíže s existencí příliš velkých konečných objektů se nám zdají být principiálně rozumnější než záhady nekonečna, s jehož existencí se setkáváme většinou v čisté, v lepším případě konstruktivní podobě.

„Konečná" varianta Birkhoffova problému dodnes vzdoruje všem soustředěným snahám celé řady matematiků, kteří o rozlousknutí tohoto tvrdého oříšku usilují. Ale já jsem toho tehdy o svazech moc nevěděl, a tak se stalo, že jsme se s naivitou prvních křesťanů pustili právě do tohoto problému a ani jsme netušili, do čeho jdeme.

Navrhl jsem pro začátek zkoumat možnosti konstrukcí, pomocí nichž by se z daných konečně reprezentovatelných svazů daly vytvářet další. Kdyby se totiž našla množina konečně reprezentovatelných svazů, z níž by se uvedenými konstrukcemi daly vytvořit všechny konečné svazy, byl by problém vyřešen. Tato cesta alespoň zpočátku nebyla zcela bezúspěšná, studenti začali experimentovat a brzy tu byly drobné, ale hlavně samostatné objevy. Ani dnes ještě není jasné, jak daleko by se dalo po této cestě jít a zda konec konců nevede k cíli.

Z prvních výsledků jsme měli radost, každý byl důvodem k malé oslavě. První semináře byly velmi živé, panovala na nich pracovní nálada, čilá výměna myšlenek, na mnoho věcí se přišlo právě přímo na semináři. Ale jak už to bývá s každým počátečním nadšením, i tohle brzy opadlo a mnoho původních nadšenců nevydrželo. Z původních asi třiceti účastníků semináře brzo zbyla polovina a později se jejich počet ustálil na osmi, kteří vydrželi až do konce třetího ročníku. A že seminář vůbec vydržel tak dlouho, měli zásluhu především dva studenti, PAVEL PUDLÁK a JIŘÍ TŮMA, kteří střídavě dokázali táhnout a živit seminář svými nápady a prací. Měl jsem již řadu seminářů a vím, že bez „tahounů" se nelze obejít.

Zajímavé je, že právě Pavel Pudlák po jisté době přišel za mnou, aby mi sdělil, že ten problém, který se snažíme řešit, je podle jeho názoru zcela beznadějný. On také našel nejjednodušší příklad konečného svazu (říkáme mu „sedmilampiónek", protože vypadá tak, že mezi jeho nejmenším a největším prvkem je sedm navzájem nesrovnatelných prvků), o němž dodnes nikdo není schopen říci, zda je, či není izomorfní se svazem kongruencí nějaké konečné algebry.

Co dělat? Cesta zvětšování třídy konečně reprezentovatelných svazů konstrukcemi začala být neschůdná, hlásila se první krize semináře. Napsal jsem tehdy J. SICHLEROVI do Kanady. Obratem jsem od něho dostal xerokopii zápisu řady problémů týkajících se representací svazů ze semináře R. QUACKENBUSHE na univerzitě ve Winnipegu. Seznámili jsme se s těmito problémy na samém konci prvního ročníku a jeden nás obzvláště zaujal. Řada autorů si povšimla, že každý distributivní svaz rozkladů na množině je svazem kongruencí nějaké algebry na této množině (tj. dané rozklady tvořící distributivní svaz je možno vydělit z ostatních jakožto rozklady stabilní vůči vhodně zavedeným operacím). Quackenbush se ptal, které další nedistributivní svazy mají tuto vlastnost, již nazval „silná reprezentovatelnost".

Když se seminář znovu sešel po prázdninách, dostal konečně tolik potřebnou injekci: Pavel Pudlák vyřešil Quackenbushův problém v konečném případě tím, že dokázal tuto větu: Každá reprezentace svazu L ekvivalencemi na nějaké množině je svazem všech kongruencí nějaké algebry na této množině právě tehdy, když L je distributivní. První publikovatelný výsledek byl na světě a věděli jsme, že v tom světě jsou matematici, které to bude zajímat. Konečně jsme se propracovali k přední pozici aktuálního matematického výzkumu, „dělání matematiky" přestalo být dětskou hrou.

Několika seminářů bylo zapotřebí, aby nám Pavel Pudlák vyložil svůj důkaz. Zajímavé bylo, že neobyčejně důmyslně využil konstrukcí nových reprezentací z daných slepováním do jakýchsi řetízků a těch pak do složitějších konglomerátů, tedy rozvinul techniku vytvořenou v počáteční fázi semináře. Tato metoda lepení reprezentací podle schémat popsaných ohodnocenými grafy se poněkud vymyká z rámce čisté algebry, o to víc se však v dalším osvědčila. Brzy zde byly další Pudlákovy výsledky založené na lepení reprezentací podle nekonečných grafů: řešení Quackenbushova problému silné reprezentovatelnosti pro nekonečné svazy a nový, zásadně jiný, přehlednější a podstatně kratší důkaz Grätzerovy-Schmidtovy věty, jímž později vyvolal obrovský ohlas mezi algebraiky a značně překvapil samotného GRÄTZERA, který původnímu důkazu musel věnovat nejméně třicet stránek, ne právě lehce čitelných, ve své knize *Universal Algebra*.

Nová metoda důkazu umožnila také další pokrok na cestě k řešení konečného Birkhoffova problému. Ve třetím ročníku se přidává k Pavlovi Pudlákovi Jiří Tůma a společně popisují dodnes nejširší známou třídu konečných svazů, pro něž nové konstrukce dávají konečné reprezentující algebry.

Zdálo se, že postupným vylepšováním konstrukcí bude možné pokročit v konečném Birkhoffově problému ještě dále, ale to se nedařilo, a tak po třetím ročníku přišly zase horší časy. Seminář se v té době přestal scházet, Pudlák s Tůmou se příliš utrhli, než aby je ostatní dohonili v jejich směru, odstředivé síly (přítomné vždy) převládly. Zánik semináře je zcela přirozená věc a tenhle měl k tomu mimořádně příznivou bilanci: několik kvalitních výsledků publikovatelných v mezinárodních časopisech, úspěchy ve studentských vědeckých soutěžích po druhém a třetím ročníku, dva matematici schopní stát na vlastních nohou.

Ale příběh ještě nekončí. Když se dlouho nedaří nějakou hypotézu dokázat, narůstá subjektivní přesvědčení, že hypotéza neplatí, a začínají se shromažďovat síly k jejímu vyvrácení. Je-li pravda, že každý konečný svaz je izomorfní se svazem kongruencí konečné algebry, pak také je možné každý konečný svaz vnořit do svazu rozkladů na nějaké konečné množině. Problém vnoření daného svazu do svazu rozkladů formuloval rovněž Birkhoff ve svém článku z roku 1935. O jedenáct let později tento problém vyřešil v nekonečné teorii P. M. WHITMAN, jenž však podobně jako Grätzer a Schmidt v roce 1963 rovněž nebyl spokojen s tím, že jeho metoda i konečné svazy vnořuje do svazů rozkladů na nekonečných množinách. Ve svém článku z roku 1946 v poznámce pod čarou vyslovil naději, že jeho konstrukci bude možné nahradit takovou, která by k vnoření konečného svazu používala vždy jen konečné množiny. Proto se někdy tento problém uvádí také jako Whitmanova domněnka.

Během čtvrtého ročníku Pudlák s Tůmou intenzívně pracovali právě na této Whitmanově domněnce. Ale podařilo se jim jen znovu objevit některé již dávno známé věci (průvodní jev samostatného přístupu). V srpnu 1974 se společně zúčastnili konference z teorie svazů v Szegedu, kde právě vyvolal velkou pozornost a obdiv Pudlákův nový dosud nezveřejněný důkaz Grätzerovy-Schmidtovy věty. Na téže konferenci je však postihlo velké zklamání, když se tam proslechlo (neoficiálně), že Whitmanovu domněnku zcela nedávno dokázal sovětský matematik IGOŠIN. Cítili se asi jako Scott, když ho na jižním pólu předešel Amundsen. Koncem roku jsme se však dozvěděli, že v Igošinově důkazu byla mezera, již Igošin zatím nemůže zaplnit. Znovu do toho! Jenže to jsme v pátém ročníku, píše se diplomová práce a nastávají jiné starosti. Stojí za zmínku, že Pavel Pudlák nepsal svoji diplomovou práci z teorie svazů, ale z úplně jiného oboru — aby prý v těch zatracených svazech nezůstal už celý život.

Od srpna 1975 jsou Pudlák a Tůma celý rok na vojně, každý jinde. A zde se děje něco naprosto mimořádného: oba během prezenční služby usilovně pracují na Whitmanově problému a čile o této věci korespondují navzdory všemu, co člověka od duševní práce odvádí. Právě zde přichází Jiří Tůma na fundamentální myšlenku regrafových konstrukcí, které neobyčejně rozšířily třídu vnořitelných svazů.

Jakmile jsou z vojny doma, přicházejí s návrhem vytvořit na katedře algebry pracovní seminář úzce zaměřený jen na vyřešení Whitmanova problému. Když koncem října 1976 projížděl Prahu kanadský matematik A. DAY, odnesl si pod dojmem toho, co uslyšel na našem semináři (GORALČÍK, JEŽEK, KOUBEK, PUDLÁK, SLAVÍK, TŮMA), přesvědčení, že problém je na spadnutí. Musím říci, že nám se situace takto nejevila, ale zase bylo příjemné, že nás berou tak vážně.

Ukázalo se, že A. Day měl pravdu, když vycítil, že už schází jen pár maličkostí, aby se nepřehledná hromada nastřádaných detailů propojila v bezvadně skloubený celek precizního mnohostupňového důkazu. Tato závěrečná fáze proběhla v překvapivém tempu. Ještě před vánocemi Pudlák s Tůmou telefonují na fakultu a oznamují, že se to povedlo. První byl u telefonu doc. Hedrlín, volal mne – „vem si to, takovej telefonát máš jenom jednou za život".

Po závratném pocitu radosti se okamžitě dostavila střízlivá myšlenka: musí se to důkladně ověřit, než se to pustí ven (Igošin!). Prvním spolehlivým ověřovatelem důkazu byl dr. Ježek. Ten prohlásil, že je to dobře, způsobem vylučujícím jakoukoli pochybnost. To je všechno pěkné, ale matematik si řekne, tím hůř, je-li tam chyba, tak musí být zatraceně skrytá. Teprve potvrzení, jež přišlo spolu s blahopřáním od nejzainteresovanějších a tedy nejkritičtějších matematiků, jako jsou BIRKHOFF GRÄTZER, SCHMIDT, SCHÜTZENBERGER, WILLE a další, rozptýlilo poslední pochybnosti a výsledek mohl být ohlášen. Hypotéza stará nejméně třicet let byla konečně dokázána.*)

Cesta k řešení nebyla lehká a trvala šest let. Jiří Tůma k tomu říká, že nejdůležitější bylo naučit se pracovat, to znamená vypracovat si vlastní přístup a jít v něm dost dlouho, a že pracovní návyky je třeba získávat v určitém nezaměnitelném pořadí. V současné době se hodně mluví o zapojování studentů do práce na vědeckých problémech. Přimlouvám se za to, aby byli zapojováni a aby se jim umožnilo vědecky pracovat – stojí to za to.

Čas a kmitočet

Otokar Buzek, Jan Čermák, Praha

1. Úvod

Rychlý rozvoj vědy a techniky zasáhl v posledních letech i do tradičního oboru, jakým je chronometrie. Její těžiště se postupně přesunulo z rukou astronomů do rukou kvantových fyziků a elektroniků a dalo vzniknout chronometrii elektronické, která se stala

*) Jednota čs. matematiků a fyziků udělila P. Pudlákovi a J. Tůmovi 1. cenu v soutěži vědeckých prací mladých matematiků za rok 1977. (Pozn. redakce.)