Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

W. A. J. Luxemburg

Neštandardné číselné systémy a odovodnenie Leibnizovho infinitezimálneho počtu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 22 (1977), No. 6, 316--325

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139034`

[5] G. WASSERMANN: *Stability of Unfoldings.* Lecture Notes in Mathematics *393.* Springer-Verlag 1974.
[6] YUNG-CHEN LU: *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory.* Universitext, Springer-Verlag 1976.

Neštandardné číselné systémy a odôvodnenie Leibnizovho infinitezimálneho počtu

W. A. J. Luxemburg, Pasadena)*

Matematikov a filozofov vždy zaujímal problém nekonečna. Pri štúdiu rôznych otázok týkajúcich sa fyzického sveta všímali si Gréci infinitezimálne čísla, teda také, ktoré sú nekonečne malé, ale predsa kladné. Tento pojem je na prvý pohľad celkom jasne sporný. Veľa Grékov, medzi nimi EUDOXOS, EUKLIDES a ARCHIMEDES, malo hlbokú a trvalú nedôveru voči pojmu nekonečna. Táto nevôľa sa najvýraznejšie prejavila v ZENONOVYCH paradoxoch. ARISTOTELES neuznával aktuálne nekonečno, akceptoval však pojem potenciálneho, stále rastúceho nekonečna. U Euklida má bod v priestore polohu, ale žiadnu rozlohu a dôkazom s infinitezimálnom sa Euklides vyhýba.

Tak ako Aristoteles a Euklides aj Archimedes odmietal infinitezimálno. Ukázal, ako sa dá vyhnúť infinitezimálnu Eudoxovou metódou exhaustácie. Archimedes ako prvý explicitne vyslovil, že každá aj tá najmenšia kladná veličina, ktorú dostatočne mnohokrát samu so sebou sčítame, dáva ľubovolne veľký výsledok. Táto archimedovská vlastnosť je jednou zo základných vlastností reálnych čísel. Zrejme by však infinitezimálne číslo nebolo potom archimedovské.

Infinitezimálny počet sa spočiatku zaoberá hlavne s (1) problémami kvadratúry, ako určenie obsahu priestorov a plôch, dĺžok atď., (2) otázkami zmeny prírastku. Veľmi zaujímavým historickým faktom je, že vlastne všetci, ktorí spočiatku pracovali na týchto problémoch (aj Archimedes), používali infinitezimálne čísla názorne a heuristicky. Tento spôsob myslenia dosiahol svoj vrchol v prácach HUYGENSA, LEIBNIZA, NEWTONA, BERNOULLIOVCOV, EULERA a CAUCHYHO. Newton a Leibniz našli fundamentálne vety infinitezimálneho počtu a Newton používa infinitezimálne čísla na určenie svojich fluxiónov. Považoval infinitezimálne čísla za veličiny, ktoré sa popisujú spojitými pohyb-

*) Překlad článku *Nichtstandard-Zahlsysteme und die Begründung des Leibnizschen Infinitesimalkalküls* otištěného v „Jahrbuch Überblicke Mathematik 1975“ pořídila EVA GEDEONOVÁ. Pozn. red.

mi a nepovažoval ich za veličiny, ktoré existujú v nekonečne malých častiach. Neskôr sa im pokúsil celkom vyhnúť a svoje *Principia Mathematica* napísal v čisto finitnom euklidovskom štýle. Leibnizov postoj k infinitezimálnym číslam bol v istom zmysle celkom iný. Z filozofických dôvodov aktuálne nekonečno síce neodmietal, ale vo svojich neskorších rokoch sa domnieval, že nemá v analýze miesto. Pretože sa myslelo, že nekonečne malé a nekonečné veľké čísla môžu mať niečo spoločného s aktuálnym nekonečnom, pokladal ich Leibniz za ideálne prvky podobne ako imaginárne čísla. Naozaj si Leibniz predstavoval, že systém konečných čísel sa dá rozšíriť pridaním nekonečne malých a nekonečne veľkých čísel tak, aby nový systém mal tie isté vlastnosti ako systém konečných čísel. V Leibnizovom kalkule sú diferenciály nekonečne malé. Pre tieto diferenciály vynašiel svoj užitočný d-kalkul so symbolickým zápisom ich odvodzovania $\mathrm{d}y = f(x + \mathrm{d}x) - f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$. Technické prednosti Leibnizovho kalkulu voči spôsobu zapisovania fluxiónov bodkami, ktoré zaviedol Newton, umožnili rýchly vývoj analýzy na európskom kontinente, kde sa Leibnizove idey pohotovo prijali.

Napriek sile a elegancii nového kalkulu, nebolo únosné jeho odôvodnenie vychádzajúce z pojmu infinitezimálnych čísel. Infinitezimálny počet bol veľmi kritizovaný, hlavne biskupom Berkeleym. Zaobchádzanie s infinitezimálnymi číslami, ktoré sa v tej istej formuli raz považujú za nuly, kým na inom mieste sa tie isté diferenciály zasa ponechajú, dalo Berkeleymu podnet označiť v *The Analyst* infinitezimálne čísla za „duchov zosnulých veličín“.

Leibniz sa však svojich ideí o infinitezimálne nevzdal. Nanešťastie nevedel on a ani jeho nasledovníci nikdy dostatočne presne povedať, ktoré pravidlá by mali platiť pre nový číselný systém. Leibniz však vyslovil princíp, že všetko to čo platí pre staré čísla, by malo platiť aj pre nové. Z jeho spisov však dostatočne jasne nevyplýva, na ktoré zákony o číslach sa má použiť tento princíp. Toto všetko viedlo k úpadku Leibnizových ideí o infinitezimálne. V devätnástom storočí, predovšetkým pod vedením K. Weierstrassa, vrátili sa matematici k euklidovskej prísnosti. D'Alembertom a Cauchym sa dosiahla presná výstavba analýzy na základe pojmu limity. Weierstrassova ε-δ-definícia tohto pojmu dala analýze pevný základ pomocou aritmetických vlastností a vlastností usporiadania reálnych čísel.

Predsa sa však odvtedy vyskytlo viac pokusov znovu oživiť metódu infinitezimálnych čísel. Po objavení nearchimedovských telies vybudoval H. Hahn bezospornú teóriu infinitezimálnych čísel. Vážne pokusy použiť toto teleso v analýze sa však nevyskytli. Ďalej sa udržalo pevné presvedčenie, že takéto použitie nie je možné. V novšom čase navrhli C. Schmieden a D. Laugwitz teóriu infinitezimálnych čísel pre analýzu. Napríklad Diracovu deltafunkciu popísali pomocou bodových funkcií, ktorých hodnoty mimo nekonečne malého okolia nejakého bodu sú infinitezimálne, ale v tomto bode sú nekonečne veľké a ktorých integrál má hodnotu 1. Hoci nepochybne táto teória má zásluhy, nerieši Leibnizov problém. To znamená, že nebuduje analýzu nad číselným systémom, ktorý obsahuje nekonečne malé a nekonečne veľké čísla.

Úplné vyriešenie tohto Leibnizovho problému podal Abraham Robinson v roku 1960. Ukázal, že idey a metódy teórie modelov sú vhodné na objasnenie pojmov „nekonečne malý“ a „nekonečne veľký“. Teória modelov je moderné odvetvie matematickej logiky. Jej ciele mohli by sme popísať asi takto: Je známe, že matematická teória sa dá formalizovať prostriedkami formálneho jazyka. Teória modelov sa na jednej strane zaoberá vlastnosťami výrokov, všeobecných viet alebo množín viet nejakého formálneho jazyka, vlastnosťami bezospornosti, úplnosti a podobne, a na druhej strane sa zaoberá súvislosťami medzi množinami viet nejakého formálneho jazyka a matematickými teóriami, v ktorých platia tieto vety.

Korene infinitezimálneho počtu sú v pojme reálneho čísla. Systém reálnych čísel **R** sa dá charakterizovať ako dedekindovsky úplné, usporiadané teleso. Z tohto plynie archimedovská vlastnosť. Môžeme hovoriť *o* systéme reálnych čísel, pretože každé dva systémy s touto axiomatikou sú navzájom izomorfné. Zdá sa, že táto veta o jednoznačnosti zabraňuje rozšíriť systém reálnych čísel tak, aby obsahoval nekonečne malé a nekonečne veľké čísla a aby predsa platili všetky vlastnosti systému **R**. Presne na tomto mieste vstupujú do hry pojmy a idey teórie modelov. Otázku si skutočne treba postaviť takto: V akom zmysle má mať rozšírený systém tie isté vlastnosti ako **R**? Bola to Robinsonova hlboká myšlienka, že formálny jazyk nám umožní upresniť Leibnizove tvrdenie. Teda, že sa dá bezosporne dokazovať, *ako keby* infinitezimálno existovalo. Robinson vytvoril prvé rozšírenia systému **R**, do ktorých patria nekonečne malé prvky a ktoré v istom zmysle majú tie isté vlastnosti ako **R**. Pri vhodnej interpretácii sa môže pokladať rozšírený systém za nový model pre nejakú množinu pravdivých viet v **R**. Takéto modely sa nazývajú neštandardné modely a z tohto pochádza názov „neštandardné čísla".

Existenciu neštandardných číselných systémov ukázal Robinson pomocou známeho *princípu lokalizácie* teórie modelov: *Ak nejaký systém viet nejakého formálneho jazyka L*) má tú vlastnosť, že každý konečný podsystém viet je pravdivý v nejakom (štandardnom) univerze, tak existuje neštandardné univerzum, v ktorom sú pravdivé všetky vety daného systému.* Tento princíp vyplýva zo slávnej Gödelovej vety o úplnosti. Táto veta hovorí: Množina viet nejakého formálneho jazyka L*) je práve vtedy logicky konzistentná (t. zn. nemôže sa z nich vyvodiť spor), ak existuje taká interpretácia symbolov v jazykovom univerze, že všetky tieto vety sú pravdivé.

Teraz krátko ukážeme, ako využil Robinson princíp lokalizácie, aby odstránil všetky protiklady, ktoré po storočia boli zdanlivo zviazané s infinitezimálnymi číslami.

Symbolom **R** označíme systém reálnych čísel. Nech K je množina všetkých viet, ktoré sú pravdivé v **R** a dajú sa formulovať v predikátovom počte prvého rádu. Nech slovník L tohto predikátového počtu obsahuje dostatočný zoznam symbolov tak, aby sa dalo popísať **R** a všetky n-árne relácie ($n = 1, 2, 3, \ldots$) v **R**. Teda zoznam obsahuje napríklad binárnu reláciu $E(x, y)$ pre rovnosť $x = y$, binárnu reláciu usporiadania $O(x, y)$ tj. $x < y$, ternárnu reláciu $S(x, y, z)$ pre súčet $x + y = z$, ternárnu reláciu $P(x, y, z)$ súčinu $xy = z$, unárnu reláciu $N(x)$ „x je prirodzené číslo", atď. Relácie sú podmnožiny kartézskych súčinov $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^n$. Funkcie na **R** sú špeciálne binárne relácie $F(x, y)$ s vlastnosťou $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[F(x, y)$ a $F(x, z) \Rightarrow E(y, z)]$, pričom symbol $\forall$ znamená „pre všetky".

Nech teraz I je nekonečná množina výrokov $O(r, b)$, kde r prebieha všetky reálne čísla a b je nová konštanta z L, ktorá nie je menom žiadneho prvku z **R**. Ďalej nech $J = K \cup I$, teda veta patrí do J, ak patrí do K alebo do I. Teraz ukážeme podľa

*) Autor má na mysli jazyky prvého rádu. Pozn. pr.

Robinsona použitím princípu lokalizácie, že množina $K \cup I = J$ má model. K tomu nám stačí ukázať, že každá konečná podmnožina H množiny $K \cup I$ má model. Teda H pozostáva z viet množiny K a nanajvýš konečného počtu viet tvaru $r_1 < b, r_2 < b, \ldots, r_n < b$. Musíme teraz nájsť vhodnú interpretáciu. Interpretujme všetky konštanty z H rôzne od b práve tak ako v K a b ako reálne číslo, ktoré je väčšie ako $r_1, \ldots, r_n$. Pri tejto interpretácii symbolov z viet množiny H je systém viet H pravdivý v **R**. Teda množina $J = K \cup I$ má podľa princípu lokalizácie model, označíme ho ***R**. Z existencie ***R** môžeme usúdiť, že existuje interpretácia symbolov z $J = K \cup I$ v modeli ***R**, označme ju φ. Všimnime si, že táto interpretácia priraďuje každému prvku $r \in \mathbf{R}$ jednoznačne určený prvok $\varphi(r)$ z ***R**. Ináč povedané, $\varphi : \mathbf{R} \to {}^*\mathbf{R}$ je injektívne, φ je jedno-jednoznačné zobrazenie z množiny **R** na podmnožinu množiny ***R**. Môžeme odteraz predpokladať, že **R** sa stotožní s touto podmnožinou. Teda môžeme pokladať ***R** za rozšírenie množiny **R**. Keďže axiómy, vyjadrujúce to, že **R** je usporiadané teleso, patria do K, je aj ***R** (pri interpretácii φ) usporiadané teleso! Pretože pre všetky reálne čísla r platí $r < b$ v ***R** označuje b také číslo, ktoré je väčšie ako všetky reálne čísla. Teda číslo b môžeme nazvať nekonečne veľkým číslom. Pri zobrazení φ má každá n-árna relácia v **R** kánonické rozšírenie v ***R**, ktoré má tie isté vlastnosti ako má daná relácia v **R**. Jedná sa však len o tie vlastnosti, ktoré sa dajú vyjadriť vetami z K. Toto kánonické rozšírenie nám dovoluje jednoznačne preniesť do ***R** všetky elementárne funkcie analýzy ako x^n, $\exp x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\cosh x$ atď., pričom vlastnosti, ktoré sa dajú vyjadriť v K, sa zachovajú. Napríklad nasledujúca veta patrí do K:

Pre všetky x a pre všetky y $[\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y]$. Teda rozšírenia funkcií cos a sin v ***R** majú túto istú vlastnosť. Tak isto každá podmnožina **S** množiny **R** má kánonické rozšírenie na podmnožinu ***S** množiny ***R**. Podmnožina ***S** má tie isté vlastnosti ako **S**, pokiaľ sa tieto vlastnosti dajú vyjadriť v K. Teda aj podmnožina **N** prirodzených čísel má jednoznačné rozšírenie ***N**, ktoré nazveme množinou prirodzenýeh čísel v ***R**. Pretože ***R** obsahuje nekonečne veľké a nekonečne malé čísla, je ***R** nearchimedovské. Do K však patrí veta, ktorá vyjadruje archimedovskú vlastnosť **R**:

$$(\forall a)(\forall b)\left[a > 0 \text{ a } b > 0 \Rightarrow (\exists n)\{n \in \mathbf{N} \text{ a } na > b\}\right].$$

Táto veta platí aj v ***R** pri interpretácii φ. Teda v ***R** máme „archimedovskú" vlastnosť v tomto zmysle:

$$(\forall a)(\forall b)\left[a > 0 \text{ a } b > 0 \Rightarrow (\exists n)\{n \in {}^*\mathbf{N} \text{ a } na > b\}\right].$$

Vzhľadom na obvyklú terminológiu nazveme prvky množiny ***R** *reálnymi číslami* a na rozlíšenie prvky množiny $\mathbf{R} \subset {}^*\mathbf{R}$ *štandardnými reálnymi číslami*. Reálne číslo $a \in {}^*\mathbf{R}$ sa nazýva *konečné*, ak $|a| < r$, kde r je štandardné reálne číslo. Reálne číslo h sa nazýva *infinitezimálne*, ak $|h| < r$ pre všetky kladné štandardné reálne čísla. Množinu všetkých konečných čísel z ***R** označíme ako R_0, množinu všetkých infinitezimálnych čísel ako R_1.

Pretože $\mathbf{R} \subset R_0$, je množina R_0 neprázdna. Existencia nenulových nekonečne malých (infinitezimálnych) čísel v ***R** vyplýva z toho, že prevrátené hodnoty nekonečne veľkých čísel sú nekonečne malé.

Vieme, že $^*\mathbf{R}$ je usporiadané teleso. Potom z teórie telies vyplýva, že ku každému konečnému číslu $a \in R_0$ existuje jednoznačne určené štandardné reálne číslo, označme ho st (a)*), ktoré sa nekonečne málo líši od a, teda $a - \text{st}(a) \in R_1$. Vo všeobecnosti budeme hovoriť, že a_1 a a_2 sú nekonečne blízke, (označenie: $a_1 = {}_1a_2$) ak $a_1 - a_2 \in R_1$. Teda ku každému konečnému $a \in R_0$ existuje práve jedno štandardné reálne číslo st (a),pre ktoré $a = {}_1\text{st}(a)$. Táto funkcia „štandardnej časti" má nasledujúce vlastnosti: Pre všetky $a, b \in R_0$ je $\text{st}(a + b) = \text{st}(a) + \text{st}(b)$, $\text{st}(ab) = \text{st}(a)\,\text{st}(b)$, ak $a \leqq b$, tak $\text{st}(a) \leqq \text{st}(b)$, $\text{st}(|a|) = |\text{st}(a)|$, $\text{st}(\max(a, b)) = \max(\text{st}(a), \text{st}(b))$, takisto $\text{st}(\min(a, b)) = \min(\text{st}(a), \text{st}(b))$, ak $\text{st}(a) = 0$, tak $a = {}_1 0$.

Z existencie štandardnej časti vyplýva, že každé konečné reálne číslo sa dá jednoznačne napísať ako súčet jedného štandardného čísla a jedného nekonečne malého čísla. Keďže existujú nenulové nekonečne malé čísla, existujú aj konečné reálne čísla, ktore nie sú štandardné. *Monádou* štandardného reálneho čísla $r \in \mathbf{R}$ nazývame množinu všetkých $a \in {}^*\mathbf{R}$ takých, že $a = {}_1 r$. Monádu reálneho čísla $r \in \mathbf{R}$ označíme ako $\mu(r)$. Teda $\mu(0) = R_1$. Ak r_1, r_2 sú dve rôzne štandardné reálne čísla, tak $\mu(r_1) \cap \mu(r_2)$ je prázdna. Čiže dve štandardné reálne čísla sa rovnajú práve vtedy, keď ich rozdiel je infinitezimálny. Tento výrok možno pokladať za upresnené znenie jedného z axiómov, ktoré uviedol L'HOSPITAL v prvej učebnici infinitezimálneho počtu, ktorá vyšla v roku 1696.

V rámci $^*\mathbf{R}$ sa dá vybudovať infinitezimálny počet tak, ako si to asi Leibniz pred tristo rokmi predstavoval. Tu môžeme uviesť len niekoľko typických príkladov. Začneme limitami postupností. K tomu však potrebujeme niekoľko prípravných úvah o štandardných postupnostiach v $^*\mathbf{R}$ a o množine $^*\mathbf{N}$ prirodzených čísel v $^*\mathbf{R}$.

Nech $\{s_n\}$ je postupnosť štandardných reálnych čísel. Teda s_n je funkciou na $\mathbf{N}$, ktorú najprv definujeme pre všetky štandardné prirodzené čísla a ktorej hodnoty sú štandardné reálne čísla. Je jasné, že pri prechode z $\mathbf{R}$ na model $^*\mathbf{R}$ sa definícia $\{s_n\}$ rozšíri na všetky $n \in {}^*\mathbf{N}$, t. zn. na všetky prirodzene čísla v $^*\mathbf{R}$. Čitateľ sa ešte pamätá, že $^*\mathbf{R}$ je pravé rozšírenie množiny $\mathbf{R}$, t. j. $^*\mathbf{R}$ obsahuje prvky, ktoré nie sú štandardné. Najprv ukážeme, že existujú aj nové prirodzené čísla. K tomu poznamenajme, že v $\mathbf{R}$ platí nasledujúci výrok: Ku každému $r \in \mathbf{R}$ existuje $n \in \mathbf{N}$ tak, že $r < n$. Príslušná formula je

$$(\forall r)\,[r \in \mathbf{R}] \Rightarrow (\exists n)\,[n \in \mathbf{N} \text{ a } r < n]\,.$$

Táto veta patrí do K, a preto platí aj v $^*\mathbf{R}$, to znamená

$$(\forall r)\,[r \in {}^*\mathbf{R}] \Rightarrow (\exists n)\,[n \in {}^*\mathbf{N} \text{ a } r < n]\,.$$

Teda ak r je nekonečne veľké, tak existuje aj nekonečne veľké prirodzené číslo. Aby sme lepšie spoznali štruktúru prirodzených čísel $^*\mathbf{N}$, ukážeme, že každé neštandardné prirodzené číslo je nekonečne veľké. Čiže každé konečné číslo z $^*\mathbf{N}$ je štandardné číslo. K tomu poznamenajme, že pre konečné $\omega \in {}^*\mathbf{N}$ existuje štandardné prirodzené číslo $n \in \mathbf{N}$ tak, že $1 \leqq \omega \leqq n$. Do K patrí tento pravdivý výrok o $\mathbf{N}$:

$$(\forall k)\,[k \in \mathbf{N} \text{ a } 1 \leqq k \leqq n] \Rightarrow [k = 1 \text{ alebo } k = 2 \text{ alebo} \ldots \text{alebo } k = n]\,,$$

*) Za st (a) položíme $\inf\{r \in \mathbf{R} : a \leqq r\}$. Pozn. pr.

pričom 1, 2, ..., n sú tie konštanty formálneho jazyka, ktoré označujú prvých n prirodzených čísel. Pri prechode z **R** do ***R** dostaneme výrok, ktorý platí v ***R**:

$$(\forall k)\,[k \in {}^*\mathrm{N} \text{ a } 1 \leqq k \leqq n] \Rightarrow [k = 1 \text{ alebo} \ldots \text{alebo } k = n]\,.$$

Dostávame $\omega = 1$ alebo $\omega = 2$ alebo ... alebo $\omega = n$, t. zn. ω je štandardné prirodzené číslo. Teda ***N** pozostáva z prirodzených čísel a z nekonečne veľkých neštandardných prirodzených čísel. Množinu neštandardných prirodzených čísel označme ***N** ∖ **R**.

Pre ďalší výklad je dôležité, aby čitateľ nahliadol, že množina všetkých nekonečne veľkých čísel nepatrí do modelu ***R**.*) Spočíva to v tom, že podmnožiny ***R**-modelu majú s podmnožinami **R** spoločné práve tie vlastnosti, ktoré sa dajú vyjadriť vetami jazyka L. K bola množina pravdivých viet v **R**, ktoré sa dajú formulovať v L. K obsahuje jednu vetu, ktorá vyjadruje pravdivý výrok, že každá neprázdna podmnožina prirodzených čísel má prvý prvok. Ale ***N** ∖ **N** nemá prvý prvok. Ak totiž $\omega > n$ pre všetky štandardné prirodzené čísla, tak je tiež $\omega > n + 1$ pre všetky štandardné čísla n. Ďalej by sme mali $\omega - 1 > n$, čo znamená, že aj $\omega - 1$ by bolo nekonečne veľké. Vidíme, že ***N** ∖ **N** nemá najmenší prvok a teda nemôže byť množinou modelu ***R**. Podobne dostaneme, že ani **N** nie je množina modelu ***R**. Keďže táto množina je zhora ohraničená, napríklad nekonečne veľkým číslom, musela by mať aj ako množina prirodzených čísel najväčší prvok.

Teraz už môžeme odvodiť jeden základný princíp, a to *princíp permanencie*: *Podmnožina množiny* ***R**, *ktorá patrí do modelu a obsahuje všetky nekonečné prirodzené čísla, obsahuje až na konečný počet všetky konečné prirodzené čísla.* (Predpokladajme, že A je podmnožina prirodzených čísel, patrí do modelu, obsahuje ***N** ∖ **N**, a jej komplement $B = {}^*\mathbf{N} \setminus A$ v ***N** obsahuje nekonečne veľa štandardných prirodzených čísel. Podľa toho, čo sme ukázali pre ***N**, množina B obsahuje nekonečne veľké prirodzené čísla. Toto je však v spore s ${}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N} \subset A$.)

Teraz sa budeme venovať limitám štandardných postupností štandardných čísel $\{s_n\}$. Pri prechode z **R** do ***R** definícia $\{s_n\}$ sa automaticky rozšíri na celé ***N**. Takže ku každej štandardnej postupnosti $\{s_n\}$ štandardných čísel jednoznačne odpovedá postupnosť $\{{}^*s_n\}$ na ***N**, pričom ${}^*s_n = s_n$ pre všetky štandardné prirodzené čísla n. Ukážeme, ako sú určené vlastnosti postupnosti $\{s_n\}$ prvkami postupnosti $\{{}^*s_n\}$ pre nekonečne veľké hodnoty n. Najprv uvedieme tento jednoduchý výsledok:

Štandardná postupnosť $\{s_n\}$ *je ohraničená práve vtedy, keď* ${}^*s_\omega$ *je konečné pre všetky nekonečne veľké hodnoty indexu* ω. (Ako obvykle, štandardnú postupnosť nazývame ohraničenou, keď existuje konečná konštanta M tak, že $|s_n| \leqq M$ pre všetky štandardné prirodzené čísla n.) Teda ak $\{s_n\}$ je ohraničená, K obsahuje vetu

$$(\exists r)\,(\forall n)\,[[n \in \mathrm{N}] \Rightarrow [|s_n| \leqq r]]\,.$$

Táto veta platí tiež v ***R**. Z tohto vyplýva, že $|{}^*s_\omega| \leqq r$ pre všetky $\omega \in {}^*\mathbf{N}$. Naopak, predpokladajme teraz že ${}^*s_\omega$ je konečné pre všetky indexy $\omega \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$. Pretože ${}^*s_n = s_n$

*) O podmnožine P univerza modelu **M** hovoríme, že patrí do **M**, ak je definovateľná v príslušnom jazyku prvého rádu. Množina Q patrí zrejme do modelu ***R** práve vtedy, keď existuje množina $S \subseteq \mathbf{R}$ tak, že ${}^*S = Q$. Pozn. pr.

pre konečné n, je zrejmé, že $*s_n$ je konečné pre všetky $n \in *\mathbf{N}$. Teda pre ľubovolné nekonečne veľké kladné číslo μ z $*\mathbf{R}$ platí:

$$(\forall n)\,[[n \in *\mathbf{N}] \Rightarrow [|s_n| \leqq \mu]]$$

a v $*\mathbf{R}$ platí taktiež:

$$(\exists a)\,(\forall n)\,[[n \in *\mathbf{N}] \Rightarrow [|*s_n| \leqq a]].$$

Táto veta sa však dá formulovať v K a preto musí platiť v $\mathbf{R}$. (Ináč by negácia tejto vety platila v $\mathbf{R}$ a dala by sa vyjadriť ako veta v K. Teda platila by v $*\mathbf{R}$, čo je spor.) Čiže existuje štandardné reálne číslo a_0 tak, že v $\mathbf{R}$ platí $(\forall n)\,[[n \in \mathrm{N}] \Rightarrow [s_n \leqq a_0]]$. To však znamená, že $\{s_n\}$ je ohraničená.

Pokračujeme v teórii limít:

Štandardné číslo s je limitou štandardnej postupnosti $\{s_n\}$ pri n idúcom do nekonečna práve vtedy, keď $*s_n = {}_1s$ $(= \mathrm{st}\,(s_n))$ pre všetky nekonečne veľké indexy n. Podmienka je nutná. Z $\lim s_n = s$ vyplýva, že ku každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $n_0 \in \mathrm{N}$ tak, že v $\mathbf{R}$ platí výrok

$$(\forall n)\,[[n \in \mathrm{N} \text{ a } n \geqq n_0] \Rightarrow [|s - s_n| < \varepsilon]]\,.$$

Tento výrok sa však dá formulovať ako veta v L a patrí do K a preto platí v $*\mathbf{R}$. Keďže každý nekonečne veľký index n je väčší ako n_0, platí $|s - *s_n| < \varepsilon$. Toto však platí pre všetky $\varepsilon > 0$, teda číslo $|s - *s_n|$ musí byť infinitezimálne, a $*s_n = {}_1s$ pre všetky nekonečne veľké indexy n. Nech teraz naopak štandardná postupnosť $\{s_n\}$ má vlastnosť, že pre všetky nekonečne veľké n je $*s_n = {}_1s$, kde s je štandardné číslo. Nech ε je ľubovolné kladné štandardné číslo a nech I je množina všetkých indexov $n \in *\mathrm{N}$ pre ktoré $|*s_n - s| < \varepsilon$. Potom I je podmnožina množiny $*\mathrm{N}$, I patrí do modelu a obsahuje $*\mathrm{N} \setminus \mathrm{N}$. Potom však z princípu permanencie vyplýva existencia štandardného indexu n_0 tak, že I obsahuje všetky $n \geqq n_0$. Teda je $|s_n - s| < \varepsilon$ pre všetky $n \geqq n_0$. Dôkaz je skončený.

Z tohto bezprostredne vyplýva, že každá konvergentná štandardná postupnosť je ohraničená. Ak postupnosť $\{s_n\}$ konverguje k s, tak $*s_n = {}_1s$ pre všetky nekonečne veľké n. Čiže $*s_n$ musí byť konečné pre všetky nekonečné n.

Z horeuvedených výsledkov ľahko vyplývajú známe formuly o limitách, ako napríklad $\lim\,(s_n + t_n) = (\lim s_n) + (\lim t_n)$ a $\lim\,(s_n t_n) = (\lim s_n)(\lim t_n)$. Ak $\lim s_n = s$ a $\lim t_n = t$, tak pre všetky nekonečné n je $*s_n = s$ a $*t_n = t$. Z tohto dostávame $*(s_n + t_n) = *s_n + *t_n = {}_1s + t$ pre všetky nekonečné n. Pretože súčin nekonečne malého a konečného čísla je nekonečne malé, je $*(s_n t_n) = {}^n s_n *t_n = st + s(*t_n - t) + (*s_n - s)\,*t_n = {}_1st$.

Keď chceme dokázať, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, potrebujeme vyšetriť hodnoty $\sqrt[n]{n}$ pre nekonečne veľké n. Nech je $\omega \in *\mathrm{N} \setminus \mathrm{N}$ nekonečne veľké a položme $\sqrt[\omega]{\omega} = 1 + h$. Je zrejmé, že $h > 0$. Použitím binomického rozvoja dostaneme $\omega = (1 + h)^\omega = \sum_{k=0}^{\omega} \binom{\omega}{k} h^k$. Pretože $h > 0$, je súčet radu väčší ako každý jej člen a teda

$$\omega > \omega(\omega - 1)\,h^2/2$$

Dostali sme $0 < h < \sqrt{(2/\omega - 1)} = {}_10$. Vidíme, že $\sqrt[\omega]{\omega} = 1$ pre všetky nekonečne veľké ω, čo znamená $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Pripomíname, že sa štandardné číslo s nazýva hraničným bodom štandardnej postupnosti $\{s_n\}$, ak ku každému kladnému štandardnému číslu ε a každému štandardnému indexu $k \in \mathbf{N}$ existuje štandardný index $n \in \mathbf{N}$, $n > k$, tak, že $0 < |s_n - s| < \varepsilon$. Ukážeme: *Štandardné číslo s je hraničným bodom štandardnej postupnosti $\{s_n\}$ práve vtedy, keď existuje nekonečne veľký index $\omega \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ tak, že*

$$^*s_\omega =_1 s \text{ a } ^*s_\omega \neq s\,.$$

Nech s je hraničným bodom $\{s_n\}$. Potom podľa horeuvedenej definície nasledujúci výrok je pravdivý v $\mathbf{R}$:

$$(\forall\varepsilon)(\forall k)\,[[\varepsilon > 0] \text{ a } [k \in \mathbf{N}] \Rightarrow (\exists n)\,[n \in \mathbf{N} \text{ a } n > k \text{ a } 0 < |s_n - s| < \varepsilon]]\,.$$

Tento výrok sa dá formulovať v L, patrí do K a teda platí aj v $^*\mathbf{R}$. Nech $\varepsilon = h > 0$ je kladné nekonečne malé číslo a nech $k = \omega$ je nekonečne veľké prirodzené číslo. Potom v $^*\mathbf{R}$ platí nasledujúci výrok

$$(\exists n)\,[[n \in {}^*\mathbf{N} \text{ a } n > \omega] \text{ a } [0 < |^*s_n - s| < h]]\,.$$

Toto však znamená, že existuje nekonečne veľký index n tak, že $^*s_n =_1 s$ a súčasne $^*s_n \neq s$. Teda podmienka je nutná. Nech naopak existuje nekonečne veľký index n tak, že súčasne platí $^*s_n =_1 s$ a $^*s_n \neq s$. Keď zvolíme ľubovolné kladné štandardné číslo ε a prirodzené štandardné číslo k, potom v $^*\mathbf{R}$ platí nasledujúci výrok:

$$(\exists n)\,[[n \in {}^*\mathbf{N}] \text{ a } [n > k] \text{ a } [0 < |^*s_n - s| < \varepsilon]]\,.$$

Ako predtým vidno, že tento výrok platí aj v $\mathbf{R}$. Z tohto vyplýva, že s je hraničným bodom $\{s_n\}$. Dôkaz je dokončený.

Čitateľ si ľahko preverí, že *Cauchyho konvergenčné kritérium* nadobudne tento tvar: *Štandardná postupnosť $\{s_n\}$ konverguje práve vtedy, keď pre všetky nekonečne veľké prirodzené čísla ω a ω'* platí $^*s_\omega =_1 {}^*s_{\omega'}$.

Povedzme si ešte niečo o množinách modelu $^*\mathbf{R}$. Už sme naznačili, že pri prechode z $\mathbf{R}$ do $^*\mathbf{R}$ sa každá podmnožina S množiny $\mathbf{R}$ rozšíri na množinu $^*S$ množiny $^*\mathbf{R}$. Množina $^*S$ má tie isté vlastnosti ako S, pokiaľ sa dajú vyjadriť vetami z K. Keď r je konštanta z L, ktorá označuje prvok z S, potom obsahuje K vetu, ktorá má tvar $(\exists x)\,[x = r \text{ a } x \in S]$. Toto jednoducho znamená, že r je prvkom S. Táto veta platí tiež v $^*\mathbf{R}$ a vyjadruje to, že $^*S$ je rozšírením S. Keď S je konečná podmnožina množiny $\mathbf{R}$, $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, potom je $^*S = S$. Platí to preto, lebo veta

$$(\forall x)\,[[x \in S] \Leftrightarrow (\exists i)\,[[i = 1 \text{ alebo } i = 2 \text{ alebo} \ldots \text{alebo } i = n] \text{ a } [x = s_i]$$

patrí do K a teda platí v $^*\mathbf{R}$, pričom n a prvky z $^*S$ chápeme ako konštanty. Z toho $S = {}^*S$.

Ukážeme teraz dôležitú vlatnosť množín modelu $^*\mathbf{R}$. Žiadna nekonečná podmnožina S množiny $\mathbf{R}$ nie je množinou modelu. Pre množinu prirodzených čísel $\mathbf{N}$ sme to už ukázali. Tento poznatok využijeme na to, aby sme túto vlastnost dokázali pre všetky nekonečné podmnožiny množiny **R**. Vieme, že každá nekonečná podmnožina S množiny **R** obsahuje nekonečnú prostú postupnosť $\{s_n\}$, $n \in \mathbf{N}$. Nech $\{{}^*s_n\}$, $n \in {}^*\mathbf{N}$, je jej rozšírenie v ***R**. Nech T je množina všetkých ${}^*s_n \in {}^*S$, pre ktoré existuje $n \in {}^*\mathbf{N}$ tak, že ${}^*s_n \in S$. Je zrejmé, že $\{s_n\}$ je podmnožina množiny T. Ukážeme, že T obsahuje len prvky s_n. Keby existoval prvok $r \in T$, $r \neq s_n$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$, potom by v ***R** platil výrok: $r \neq {}^*s_n$ pre všetky $n \in {}^*\mathbf{N}$ (všimnime si, že r je štandardné reálne číslo). To je však v spore s definíciou prvku r. Pretože S je množina modelu, je T ako prienik dvoch množín modelu tiež množinou modelu. Poznamenejme, že postupnosť $\{{}^*s_n\}$ je prostá, pretože postupnosť $\{s_n\}$ bola prostá. Vidíme, že množina všetkých $n \in {}^*\mathbf{N}$, pre ktoré ${}^*s_n \in T$ je rovná **N**. Teda **N** patrí do modelu, pretože T aj $\{{}^*s_n\}$ sú z modelu. Toto je spor, pretože **N** nepatrí do modelu.

Z tohto môžeme okamžite vyvodiť: *Ak štandardná postupnosť $\{s_n\}$ štandardných čísel má tú vlastnosť, že $\{{}^*s_n\}$ je štandardné číslo aj pre všetky nekonečne veľké n, potom môže postupnosť nadobúdať nanajvýš konečný počet hodnôt.* Platí to preto, lebo množina hodnôt postupnosti $\{{}^*s_n\}$ v ***R** patrí do modelu, obsahuje len štandardné čísla, a ako sme práve ukázali, musí byť konečná.

Dokážeme teraz známu *Bolzano-Weierstrassovu* vetu: *Každá ohraničená nekonečná postupnosť má aspoň jeden hraničný bod.* Nech je teda $\{s_n\}$ ohraničená nekonečná postupnosť štandardných čísel. Z tohto vyplýva, že $\{{}^*s_n\}$ je konečné pre všetky nekonečné n. Pretože štandardná postupnosť $\{s_n\}$ obsahuje nekonečne veľa rôznych prvkov, existuje aspoň jedno $\omega \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ tak, že ${}^*s_\omega$ je neštandardné číslo. Z nášho kritéria pre hraničný bod vyplýva, že $\mathrm{st}\,({}^*s_\omega)$ je hraničným bodom postupnosti $\{s_n\}$.

Krátko vyšetríme niektoré výsledky týkajúce sa reálnych funkcií. Nech f je reálna funkcia definovaná pre $a < x < b$. Funkcia f sa pri prechode do ***R** rozšíri na funkciu ${}^*f$, ktorá má tie isté vlastnosti ako f, pokiaľ sa dajú vyjadriť vetami z K.

Podobne ako predtým sa dá ukázať:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *práve vtedy, keď* $f(x_0 + h) = {}_1 l$ *pre všetky nekonečne malé* $h \neq 0$. *Funkcia f je spojitá v bode $x = x_0$ práve vtedy, keď $f(x_0 + h) = {}_1 f(x_0)$ pre všetky nekonečne malé h. Funkcia f je spojitá na intervale (a, b), ak* $\mathrm{st}\,({}^*f(x)) = f(\mathrm{st}\,(x))$ *pre všetky $a < x < b$, pre ktoré* $a < \mathrm{st}\,(x) < b$.

Nasleduje jednoduchý neštandardný dôkaz Bolzano-Weierstassovej *vety o strednej hodnote*: *Ak f je spojitá na $a \leqq x \leqq b$* a $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, *potom existuje číslo ξ, $a < \xi < b$ tak, že $f(\xi) = 0$.* Rozdeľme interval na n rovnakých dielov s koncovými bodmi $x_k = a + (k/n)(b - a)$, $0 \leqq k \leqq n$, $x_0 = a$, $x_n = b$ a uvážme, že pre každé n existuje najmenšie prirodzené číslo p tak, že $f(x_p) < 0$ a $f(x_{p+1}) \geqq 0$. Pretože tento výrok sa dá sformulovať ako veta v K, platí tento výrok aj v ***R** . V ***R** voľme n nekonečne veľké a všimnime si, že pre príslušné $p, p + 1 \in {}^*\mathbf{N}$ je rozdiel $x_{p+1} - x_p$ nekonečne malý. Teda x_p a x_{p+1} majú tú istú štandardnú časť, označme ju ξ. Zo spojitosti f v bode ξ vyplýva, že $f(\xi) = \mathrm{st}^* f(x_p) = \mathrm{st}^* f(x_{p+1})$. Pretože $f(x_p) < 0$, $f(x_{p+1}) \geqq 0$, je $f(\xi) = 0$, čo sme tvrdili.

Na záver si chceme všimnúť diferencovateľnosť v modeli ***R**. Funkcia f je diferencovateľná v $x = x_0$ práve vtedy, keď existuje reálne číslo $l \in \mathbf{R}$ tak, že

$$\frac{\Delta^* f(x)}{\Delta x} = \frac{^*f(x + \Delta x) - {^*f(x)}}{\Delta x} = {}_1 l$$

pre všetky nekonečne malé $\Delta x \neq 0$.

Pre diferencovateľné funkcie f na $a < x < b$ platí $^*f(x + \Delta x) - {^*f(x)} = f'(x)\,\Delta x + x\,.\,\varepsilon(\Delta x, f)$, pričom ε je nekonečne malé pre všetky nekonečne malé Δx. Spojitosť funkcie f vyplýva z toho, že $f'(x)\,\Delta x + x\,.\,\varepsilon(\Delta x, f)$ je nekonečne malé. Teda každá diferencovateľná funkcia je spojitá.

Týmto spôsobom sa dá vybudovať celý infinitezimálny počet bez ťažkostí. Po tomto stručnom popise je však jasné, že Robinson uzavrel viacstoročný spor. Ukázal, že je možné vybudovať neprotirečivý infinitezimálny počet na základe nekonečne malých a nekonečne veľkých čísel. Rozšírený systém reálnych čísel **R** nám nepochybne umožňuje presvedčivo odôvodniť Leibnizov infinitezimálny počet. Pre menej elementárne použitia ako tu, musíme náš prístup prehĺbiť a uvažovať o zložitých číselných systémoch. Takéto systémy a iné zobecnenia neštandardných modelov nájde čitateľ v dole citovanej literatúre.

Vybraná literatúra

[1] A. Robinson: *Non-standard Analysis.* Proc. Roy. Acad. Sci. Amsterdam, *A 64* (1961), 432—400.

[2] A. Robinson: *Non-standard Analysis.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, Amsterdam, 1966.

[3] W. A. Luxemburg: *Non-standard Analysis.* Lectures on A. Robinsons theory of infinitesimals and infinitely large numbers, Pasadena (1962), rev. ed. (1964).

[4] W. A. J. Luxemburg: *What is non-standard analysis?* Supplement, Am. Math. Monthly *80* (1973), 38—67.

[5] W. A. J. Luxemburg and K. Stroyan: *An introduction to Non-standard Analysis.* To appear.

[6] W. A. J. Luxemburg and A. Robinson (ed.): *Contributions to Nonstandard Analysis.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, Amsterdam 1972.

[7] M. David and R. Hersh: *Non-standard Analysis.* Scientific American, June 1972, 78—86.

Logika je hygienou, kterou matematik provádí, aby udržel své ideje zdravé a silné.
Potřebujeme pochodeň, která nám zdaleka osvětlí konec cesty, intuice je takovou pochodní.

H. Poincaré

Nestavte nikdy logickou káru před heuristické koně.

M. M. Schiffer

Rozumové operace jsou jako útoky jízdy v bitvě — jejich počet je silně omezen, vyžadují čerstvé koně a musí být zasazeny v rozhodujících momentech.

A. N. Whitehead