D. R. Woodall

Inductio ad absurdum?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 21 (1976), No. 1, 17--22

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139067

Inductio ad absurdum?

D. R. Woodall, Nottingham)*

Předpokládejme, že P_n je nějaké tvrzení o celém čísle n, které chceme dokázat pro všechna $n \geqq n_0$ (obvykle $n_0 = 0$ nebo $n_0 = 1$).

Princip matematické indukce se při školním vyučování nejčastěji uvádí v této formě:

A. Jednoduchá indukce. Platí-li P_{n_0} a $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ pro každé $n \geqq n_0$, pak P_n platí pro všechna $n \geqq n_0$.

To je skutečně pro mnohé studenty jediná forma matematické indukce, se kterou se kdy setkají. Mnoho popisů indukce včetně mnoha knih a filmů se zabývá téměř výhradně tímto jednoduchým případem. Kromě něho se při vyučování uvádí už jen jediná další forma indukce, a to tato:

B. Silná indukce. Platí-li P_{n_0} a $(P_{n_0} \,\&\, P_{n_0+1} \,\&\, \ldots \,\&\, P_n) \Rightarrow P_{n+1}$ pro každé $n \geqq n_0$, pak P_n platí pro všechna $n \geqq n_0$.

Tuto formu indukce lze snadno převést na *A* substitucí $Q_n = (P_{n_0} \,\&\, P_{n_0+1} \,\&\, \ldots \,\&\, P_n)$ pro každé n. Důkaz**) tvrzení *A* a *B* je v podstatě takovýto:

C. Metoda sestupu. Jestliže P_n pro nějaké $n \geqq n_0$ neplatí, zvolme nejmenší $n \geqq n_0$, pro něž neplatí. Můžeme-li odvodit existenci nějakého m, $n_0 \leqq m < n$, pro něž P_m neplatí, nebo můžeme-li dojít ke sporu nějakým jiným způsobem, pak tento spor dokazuje, že P_n platí pro všechna $n \geqq n_0$.

Z toho také vyplývá další forma matematické indukce, které obvykle používají profesionální matematikové:

D. Praktická indukce. Můžeme-li dokázat pravdivost tvrzení P_n (přičemž předpokládáme, pokud je to nutné, pravdivost tvrzení $P_{n_0}, P_{n_0+1}, \ldots, P_{n-1}$) pro každé $n \geqq n_0$,

---

*) Ze stejnojmenného anglického originálu přijatého do tisku v časopise „Mathematical Gazette" přeložil Bohdan Zelinka

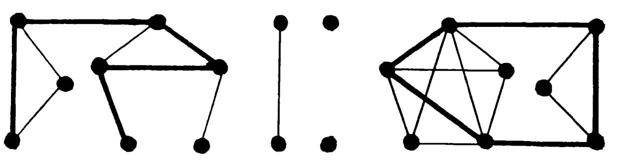
**) Označme C′ tvrzení: Neplatí-li P_n pro nějaké $n \geqq n_0$, potom existuje nejmenší n, pro které P_n neplatí. (Tj. množina přirozených čísel je relací $<$ dobře uspořádána.) Potom platí A $\Rightarrow$ C′. Přesněji: Buď P množina, $1 \in P$ a s funkce na P taková, že $s(x) \in P$ pro každé $x \in P$. Označme $(P, s, 1)$ soustavu (Peanovu soustavu) právě s těmito vlastnostmi:
(a) $s(x) \neq 1$ pro všechna $x \in P$;
(b) pro všechna $x, y \in P$ platí: $s(x) = s(y) \Rightarrow x = y$;
(c) jestliže $A \subset P$, $1 \in A$ a jestliže $x \in A \Rightarrow s(x) \in A$, potom $A = P$.
Na P definujeme operaci $+$: Pro všechna $x, y \in P$ $x + 1 = s(x)$, $x + s(y) = s(x + y)$.
Definujeme-li pro každé $x, y \in P: x < y$, právě když existuje $v \in P$ tak, že $y = x + v$, je potom Peanova soustava relací $<$ dobře uspořádána (a to neplatí, vynecháme-li (c)).
K důkazu C′ $\Rightarrow$ B: Buď $P' \neq \emptyset$ a relace $<'$ na P', které mají právě tyto vlastnosti:
(a′) P' je relací $<'$ dobře uspořádána;
(b′) ke každému $x \in P'$ existuje bezprostřední následovník, který označíme $s'(x)$;
(c′) každý prvek $x \in P'$ s výjimkou prvního (označme jej $1'$) má bezprostředního předchůdce.
Potom $(P', s', 1')$ je Peanova soustava (a tady nelze vynechat (c′)). (Pozn. red.)

pak z toho vyplývá, že P_n platí pro všechna $n \geqq n_0$. (Poznamenejme, že množina přípustných předpokladů $P_{n_0}, P_{n_0+1}, \ldots, P_{n-1}$ je při $n = n_0$ prázdná.) Jinými slovy, důkaz indukcí je jako každý jiný druh důkazu, až na to, že při dokazování P_n jsme oprávněni předpokládat, že n je nejmenší celé číslo (větší nebo rovné n_0), o němž dosud nevíme, zda pro ně tvrzení platí.

Zdálo by se, že toto tvrzení je velmi podobné tvrzení B a dokonce i tvrzení A; zde však je důraz na něčem zcela jiném. Při A nebo B se student osmělí začít tím, že dokáže „základ" neboli „počáteční podmínku" P_{n_0} a pak pokračuje dokazováním příslušné implikace; naproti tomu při D je na něho naloženo těžké břímě záležející v tom, že má dokazovat P_n pro každé n, a může mu při tom pomoci pouze připomínka v závorkách o tom, že je oprávněn předpokládat platnost tvrzení pro všechny předešlé hodnoty n, pokud to potřebuje.

Podle mého názoru B a zvláště A mohou vážným způsobem studenta mást. Mají svůj význam tehdy, pokud má být student seznámen s indukcí pouze jako s jistým druhem iterace. Pokud však má zájem o přesné dokazování nebo se má setkat s použitím indukce ve složitějších problémech, potom čím dříve se seznámí s C nebo s D, tím lépe. (Nechci zde kritizovat axióm indukce jakožto jeden z axiómů formální logiky; ten je vyjádřen v podobném tvaru jako A. Něco jiného je však brát něco jako logický axióm a něco jiného je užívat toho jako metody práce v praktické matematice.) Tento svůj názor bych zdůvodnil tím, že pracuji v oboru kombinatorické matematiky; v ní, podobně jako v teorii grup, patrně většina důkazů indukcí používá indukce spíše ve formě D než ve formě A nebo B. V jiných oborech matematiky tomu může být jinak. Přesto však doufám, že uvedené příklady přesvědčí čtenáře o tom, jak mohou formy A a B snadno vést k omylům.

V těchto příkladech *graf* G sestává z konečně mnoha *uzlů* a *hran*, každá hrana (a, b) spojuje dva různé uzly a a b a žádné dva uzly nejsou spojeny více než jednou hranou (viz obr. 1). Budeme jako obvykle předpokládat, že graf musí obsahovat alespoň jeden uzel, ale nemusí obsahovat žádné hrany. *Stupeň* uzlu je počet hran, které jsou s ním incidentní. *Cesty* a *kružnice* jsou definovány obvyklým způsobem, bez opakování uzlů



Obr. 1.

a hran, jak je ukázáno silnými čarami na obrázku. (Rozlišujeme tedy *cestu*, v níž se neopakují uzly ani hrany, od *tahu*, který může procházet jednotlivými uzly nebo hranami vícekrát.) *Délka* cesty nebo kružnice je počet jejích hran. Kružnice délky tři je *trojúhelník*. Dva grafy, dvě hrany nebo dvě kružnice v grafu jsou *disjunktní*, jestliže nemají společné uzly (a tedy ani společné hrany), a *hranově disjunktní*, jestliže nemají společné hrany (ale mohou mít společné uzly).

P ř í k l a d 1. Je-li G graf, v němž každý uzel má sudý stupeň, pak existuje množina kružnic v G, po dvou hranově disjunktních, s tou vlastností, že každá hrana grafu G náleží některé z nich. (Souvislé grafy s touto vlastností jsou některým čtenářům známy jako *eulerovské* grafy.)

Důkaz indukcí podle počtu N hran grafu G. (P_N je tvrzení: „Každý graf s N hranami splňující předpoklady věty splňuje také její tvrzení.") Tvrzení zřejmě platí pro $N = 0$; předpokládejme tedy $N > 0$.

Nechť $v_0, v_1, \ldots, v_m$ jsou (vesměs různé) uzly grafu G v pořadí podél nejdelší cesty P v G; zde $m > 0$, protože G obsahuje alespoň jednu hranu. Poněvadž v_m má sudý stupeň, je spojen s nějakým uzlem v různým od v_{m-1}. Poněvadž P je *nejdelší* cesta, v musí náležet cestě P; budiž tedy $v = v_i$. Potom $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_m, v_i$ jsou uzly kružnice C. Odstraněním hran kružnice C získáme graf G', který obsahuje méně než N hran a v němž rovněž každý uzel má sudý stupeň; tedy podle indukčního předpokladu v G' existuje množina kružnic, po dvou hranově disjunktních, s tou vlastností, že každá hrana grafu G' náleží některé z nich. Přidáme-li k této množině kružnici C, dostaneme množinu kružnic v G, která splňuje tvrzení věty. Tím je důkaz hotov.

To je jistě správná úvaha. Jak však postupuje průměrný student? Vezme graf o N hranách, o němž předpokládá, že pro něj věta platí, a přidá k němu jednu hranu; potom však graf přestane splňovat předpoklady věty. Chudák student se na to několik minut beznadějně dívá a potom přejde k další úloze. Proč postupuje takovým divným způsobem? Prostě proto, že se mu stále vtloukalo do hlavy, že je při matematické indukci třeba dokazovat implikaci $P_N \Rightarrow P_{N+1}$, a z toho usuzuje (mylně), že musí začít s grafem o N hranách a snažit se nějak „postoupit" k $N + 1$. Jak je vidět, má štěstí, že přidání další hrany tak očividně porušuje předpoklady věty. Další příklad je mnohem zrádnější.

Příklad 2. Diracova věta o hamiltonovských kružnicích (Dirac [1], 1952). Je-li G graf o $n \geqq 3$ uzlech, v němž každý uzel má stupeň nejméně $\frac{1}{2}n$, potom G obsahuje hamiltonovskou kružnici (kružnici, která prochází každým uzlem grafu právě jednou – nezaměňovat s uzavřeným eulerovským tahem, který prochází každou hranou právě jednou a může tedy procházet některými uzly vícekrát).

Chybný „důkaz" indukcí podle n. Tvrzení zřejmě platí pro $n = 3$, tedy indukce může započít. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každý graf o n uzlech, který splňuje předpoklady. Vezměme takovýto graf K, který podle předpokladu obsahuje hamiltonovskou kružnici, a přidejme k němu nový uzel v. Je-li v spojen alespoň s $\frac{1}{2}(n + 1)$ jinými uzly, pak musí být spojen s některými dvěma uzly, které jsou spojeny hranou této hamiltonovské kružnice (protože jinak by nemohl být spojen s více než $\frac{1}{2}n$ uzly). Můžeme tedy přidat v k hamiltonovské kružnici a dostaneme tak hamiltonovskou kružnici nového grafu, což jsme měli dokázat.

Této úvahy použil jeden student před několika lety a já jí od té doby používám jako cvičení. („Kde je chyba v tomto důkazu?") Průměrný student září štěstím, když přijde na to, že přidáním nového uzlu v nemusíme vždy dostat graf, který splňuje předpoklady věty, a myslí, že takto našel chybu v „důkazu". Zpravidla však vznese námitku, že jsme vlastně tvrzení dokázali pro určité grafy, které nesplňují předpoklady, a bývá uveden do rozpaků, když mu řeknu, že důkaz je chybný ne proto, že bychom dokázali něco více, než jsme měli, ale proto, že jsme nedokázali něco, o čem jsme předpokládali, že je dokázáno. Stačí ukázat graf o čtyřech uzlech a čtyřech hranách tvořících kružnici a otázat se studenta na vysvětlení, jak tento „důkaz“ ukazuje, že tento graf má hamiltonovskou kružnici; potom průměrný student správně určí chybu: ne každý graf o $n + 1$ uzlech (při n lichém) splňující předpoklady věty lze získat z grafu o n uzlech také splňujícího předpoklady přidáním nového uzlu. „Důkaz“ tedy dokazuje tvrzení jen pro některé grafy splňující předpoklady, ne pro všechny.

Tento problém tu vyvstává opět proto, že student je veden implikací $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ k tomu, aby považoval indukci za proces postupování od n k $n + 1$, a aby tedy začal grafem o n uzlech, o němž se předpokládá, že pro něj byla věta dokázána. Co by *měl* dělat, je začít grafem, pro nějž výsledek *není* znám, a *odstraňovat* uzly tak dlouho, až dojde ke grafu o menším počtu uzlů, pro nějž výsledek znám je. Jinými slovy, úvahy A a B vedou studenta k tomu, aby považoval indukci za proces postupování *vzhůru* od známého k neznámému, zatímco způsob použití indukce v praxi často spočívá v sestupování *dolů* od neznámého ke známému. V tomto smyslu A a B mohou vážným způsobem mást. Správný důkaz příkladu 2 indukcí neznám; velmi jednoduchý důkaz bez indukce podal NEWMAN ([2]) roku 1958.

Má další podstatná námitka proti A a B se týká toho, že tyto formy vyvolávají nesprávný dojem o úloze „základu“ neboli „počáteční podmínky“ P_{n_0}. Všimněme si například následujícího důkazu.

Příklad 3. Budiž G graf o n uzlech, v němž každý uzel má stupeň alespoň m, kde $m \geqq \frac{1}{2}n$. Pak G obsahuje alespoň $\frac{2}{3}(m - \frac{1}{2}n)$ disjunktních trojúhelníků.

Důkaz indukcí podle m. Tvrzení věty zřejmě platí pro všechna $m \leqq \frac{1}{2}n$; pro ně není třeba nic dokazovat. Předpokládejme tedy $m > \frac{1}{2}n$. Poněvadž $m > 0$, graf G obsahuje alespoň jednu hranu; budiž (a, b) hrana grafu G. Uzel a je spojen alespoň s $m - 1$ uzly z celkového počtu $n - 2$ uzlů různých od a i b a totéž platí i pro b. Protože $2(m - 1) > n - 2$, existuje uzel c různý od a i od b, který je spojen s a i s b, takže a, b, c jsou uzly trojúhelníka. Odstraněním těchto tří uzlů a všech hran s nimi incidentních dostaneme graf G' o $n - 3$ uzlech, v němž každý uzel má stupeň alespoň $m - 3$. Podle indukčního předpokladu G' obsahuje alespoň $\frac{2}{3}(m - 3 - \frac{1}{2}(n - 3)) = \frac{2}{3}(m - \frac{1}{2}n) - 1$ disjunktních trojúhelníků, tedy G obsahuje alespoň $\frac{2}{3}(m - \frac{1}{2}n)$ disjunktních trojúhelníků, což mělo být dokázáno.

Co si s tímhle počne náš milý student, kterému byl vštípen princip indukce ve formách A a B? Je vážné nebezpečí, že začne takto: „Tvrzení je zřejmé pro $m = \frac{1}{2}n$, předpokládejme tedy $m > \frac{1}{2}n$.“ Přitom se zcela ignoruje ta skutečnost, že za prvé n může být liché a za druhé se m při indukčním kroku vždy snižuje o tři. Správné „počáteční podmínky“ pro tuto speciální induktivní úvahu jsou tři případy $m = [\frac{1}{2}n] - 2$, $m = [\frac{1}{2}n] - 1$ a $m = [\frac{1}{2}n]$, které lze naštěstí všechny pokrýt nerovností $m \leqq \frac{1}{2}n$.

Podobná situace nastává i tehdy, když „počáteční podmínky“ pro induktivní úvahu nesestávají z několika prvních hodnot proměnné, ale jsou rozloženy nějakým jiným způsobem. Výbornými příklady této situace jsou PYMOVY elegantní důkazy Mengerovy věty ([3]) a věty o spojování ([4]), oba z roku 1959. Mnohem jednodušší příklad je tento:

Příklad 4. Jsou-li a a b dva různé uzly grafu G, pak každý tah spojující a a b (tj. každá posloupnost uzlů a hran tvaru

$$x_0, (x_0, x_1), x_1, (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), x_n,$$

kde $a = x_0$ a $x_n = b$) obsahuje vybranou posloupnost, která je cestou spojující a a b.

Důkaz indukcí podle délky n tahu. Jsou-li uzly $x_0, x_1, \ldots, x_n$, které se vyskytují v tahu, všechny navzájem různé, potom tento tah je sám cestou a není třeba nic dokazovat. Jestliže $x_i = x_j$ pro nějaká čísla i a j, $0 \leqq i < j \leqq n$, pak

$$x_0, (x_0, x_1), \ldots, (x_{i-1}, x_i), x_i(= x_j), (x_j, x_{j+1}), \ldots, (x_{n-1}, x_n), x_n$$

je kratší tah spojující a a b a obsažený v původním tahu; tvrzení tedy plyne z indukčního předpokladu.

Zde (a také v [3] a [4]) se pro každou hodnotu n rozlišují dva případy, z nichž jeden vyžaduje použití indukce a pro druhý lze tvrzení dokázat přímo (ve výše uvedeném příkladě triviálně). (To je důvod, proč je v D uvedeno, že je možno předpokládat pravdivost $P_{n_0}, \ldots, P_{n-1}$, *pokud je to nutné*; v některých případech v induktivních důkazech to nutné není.) Pro každou hodnotu n lze považovat neinduktivní případ za jednu „z počátečních podmínek". To, že každý tah má kladnou délku, ukazuje, že v případě $n = 1$ nevzniká induktivní případ, tedy „počáteční podmínky" zahrnují celý případ $n = 1$; avšak nezmíníme-li se o tom, nikterak tím důkaz neznehodnotíme. Opravdu by se důkaz zlepšil tím, že bychom přidali (jak to činí Pym – [3] a [4]) poznámku „Tvrzení zřejmě platí pro $n = 1$, předpokládejme tedy $n > 1$"? Taková poznámka by byla poměrně neškodná a předpokládám, že mnozí čtenáři (a dokonce i autoři) by se cítili jaksi nejistí, kdyby tam nebyla. Přitom však na ní vůbec nezáleží, protože nikde dále v důkaze nepotřebujeme předpokládat, že $n > 1$. Jak jsem poznamenal, existuje neinduktivní případ pro každou hodnotu n a způsob, jakým zacházíme s případem $n = 1$, je zřejmě tentýž jako způsob, jakým zacházíme s neinduktivním případem pro jakoukoliv jinou hodnotu n. Je to jistým způsobem nešťastné, že jsou studenti vedeni k tomu, aby dokazovali počáteční podmínky před dokazováním indukčního kroku; počáteční podmínky totiž zahrnují právě ty případy, v nichž induktivní úvaha selhává, a nemůžeme předem vědět, které případy to budou, dokud neukončíme důkaz indukčního kroku.

Čtenář možná pociťuje, že tento poslední typ úvahy, který je jen částečně induktivní, zachází tak daleko od jednoduché indukce, že by se vlastně ani neměl nazývat indukcí. Poněvadž se zde vlastně používá jako při všech induktivních úvahách metody sestupu, měl bych snad tuto věc vyjasnit tím, že bych tento důkaz popsal jako „důkaz sestupem", slova „indukční předpoklad" bych nahradil slovy „sestupový předpoklad" a přidal bych slova „což je požadovaný spor" pokaždé, když je tvrzení dokázáno pro uvažovanou hodnotu n. Zdá se to snad příliš neobvyklé, ale rozhodně to není obtížnější než obvyklý důkaz sporem. V praxi se úvaha D přijímá a používá profesionálními matematiky pod názvem „důkaz indukcí". Zahrnuje skoro všechny běžně používané formy induktivní úvahy; hlavními výjimkami jsou transfinitní indukce a takzvaná „zpětná indukce", při níž se například dokazuje P_1, $P_n \Rightarrow P_{2n}$ pro $n \geqq 1$ a $P_n \Rightarrow P_{n-1}$ pro $n \geqq 2$.

Shrnuto: Podle mého názoru posedlost jednoduchou indukcí zavádí na scestí. Jednoduchá indukce není pravou podstatou indukce, ale pouze jejím speciálním případem (i když se v elementárních úvahách setkáváme nejčastěji právě s ní). Úvaha D je výhodnější než A nebo B z těchto čtyř důvodů:

1. D se více blíží metodě sestupu, která je úhelným kamenem všech forem indukce, zatímco A a B vedou studenty k tomu, aby nahlíželi na indukci jako na nějakou nejasnou iteraci.

2. Jak je vyloženo v příkladech 1 a 2, důraz na „postup vzhůru" v A a B, zvláště důraz v A na dokazování, ze $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, může vážně zavést na scestí všechny studenty kromě těch nejschopnějších, zatímco v D se klade důraz spíše na sestup než na postup, což je velmi často při používání indukce vhodnější.

3. A a B vzbuzují zcela klamný dojem o úloze „základu" neboli „počáteční podmínky", která, jak je uvedeno v příkladech 3 a 4, se nemusí skládat pouze z tvrzení P_{n_0}.

4. Je mnoho použití indukce, jako v příkladech 3 a 4, v nichž A ani B prostě nelze použít (nebo jich lze použít jen s velkými komplikacemi), zatímco D zahrnuje téměř všechny formy induktivních úvah používané v praxi.

Literatura

[1] G. A. Dirac: *Some theorems on abstract graphs*, Proc. London Math. Soc. (3), *2* (1952), 69—81.
[2] D. J. Newman. *A problem in graph theory*, Amer. Math. Monthly *65* (1958), 611.
[3] J. S. Pym: *A proof of Menger's theorem*, Monatshefte für Mathematik *73* (1969), 81—83.
[4] J. S. Pym: *A proof of the linkage theorem*, J. Math. Anal. Appl. *27* (1969), 636—638.

Výzkum vysokoteplotního plazmatu a řízené termonukleární reakce

Ladislav Krlín, Praha

1. Úvod

Již řadu let vědci z mnoha zemí upozorňují na možné negativní důsledky bouřlivého civilizačního rozvoje. V předcházejících epochách se zdálo, že zdroje surovin a energie jsou nevyčerpatelné. Několik historických populačních skoků svědčí o tom, že lidstvo si vytvářelo vždy jistou rovnováhu s možnostmi, které příroda dávala; limitujícím faktorem však byl spíše charakter výroby. Rozvojem techniky člověk neustále získával více potravin i energie a současně se zdálo, že hranice možností jsou v nedohlednu. Nelze nyní pochybovat o tom, že se objevily varovné příznaky upozorňující, že lidstvo musí plánovat svou budoucnost. Současná světová populační exploze vyžaduje nutnost produkovat stále více potravin. V poslední době však vyvstal další přízrak — energetická krize. Civilizační trend ve vyspělých státech klade obrovské nároky na energetické