Jan Vyšín

Matematická meta olympiáda

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 18 (1973), No. 3, 154--156

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139297`

Matematická $^{\text{meta}}$olympiáda

První ročník této soutěže v roce 1972 obsahoval 12 úloh, jejichž texty byly uveřejněny po čtyřech v 1., 2. a 3. čísle Pokroků. Redakce dostala celkem jen 28 řešení od 6 řešitelů. Jsou to:

Ludmila Frantíková, odb. as. ped. fak. UPJŠ v Prešově (úloha 3)
Ján Gedei, odb. asistent, Bratislava (úloha 1)
Dr. František Matyášek, ped. fak. PU, Olomouc (úloha 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11)
František Nosek, prom. fyzik, výpočetní středisko VŠZ, České Budějovice (úloha 6)
Josef Páleníček, prof. v. v., Bystřice pod Hostýnem (úloha 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)
Alica Sivošová, profesorka gymn., Bratislava (úloha 1, 2, 6).

Ze zaslaných řešení lze prohlásit jen asi polovinu za věcně správná (není-li řešení úplné, nepokládáme je za správné). Dvě ze zaslaných řešení (s. Frantíkové a s. Gedeie) jsou spíše články s obšírným výkladem teoretických poznatků.

Ačkoli jsme se snažili při vyhlášení soutěže vysvětlit čtenářům Pokroků, že *jde o soutěž metodickou*, nepodařilo se nám to. Téměř všichni řešitelé řešili prostě matematické úlohy a příliš se nestarali o to, jak by přivedli své žáky k řešení a co by jim k úloze pověděli. V některých řešeních jsou sice jisté náběhy tohoto druhu, ale celé řešení není zpracováno tak, aby např. mohlo být návodem pro učitele-začátečníka, jak by měl s žáky pracovat. Je vidět, že jsme narazili na opravdovou slabinu ve vyučování matematice a že na tomto poli čeká didaktiky matematiky mnoho práce. Asi má pravdu s. Nosek, když konstatuje, že řešitelům není jasné, co od nich autoři úloh chtějí. Je také pravda, že např. komentáře MO nejsou obecně dostupné.

Není však třeba zoufat; první ročník matematické metaolympiády byl pokusný; budeme pokračovat v uveřejňování úloh i v roce 1973. Snad bude druhý ročník úspěšnější. Ze zaslaných řešení není asi žádné „vzorové“ po metodické stránce; přesto v dalších číslech některá řešení ve zkratce otiskneme. Snad prospějeme soutěži nejvíce tím, že ukážeme, jak by mohlo vypadat podle našich představ metodické zpracování řešení některých úloh.

Domníváme se dále, že aspoň jednoho z dosavadních řešitelů – průkopníků je třeba odměnit. V pořadí první je dr. F. Matyášek, jemuž JČSMF uhradí šestidenní pobyt v PLR v rámci výměnných zájezdů.

Nejvydatnější a nejcennější pomocí, kterou může žák-řešitel dostat od učitele, jsou vhodné impulsy. Prvním podnětem je vždy pomoc při správném pochopení textu úlohy. Dalšími podněty může být upozornění na analogický problém, na problém obecnější či speciálnější, podnět k účelnému experimentování, upozornění na různý matematický aparát, kterého by se dalo použít, pomoc při hledání protipříkladu, impuls pro volbu metody důkazu (důkaz sporem, matematickou indukcí, obrácením na základě úplného třídění, konstrukční důkaz existenční apod.). Impulsy se musí vyhledávat a podávat s citem a žáci se musí učit na ně reagovat. Až budou starší, popřípadě dospělí, převezme tuto roli učitele kolektiv, v němž budou pracovat, nebo studijní prameny, na něž se budou obracet.

První naší ukázkou bude řešení *úlohy* 2; její text zněl:

V rovině jsou dány dva shodné rovnostranné trojúhelníky ABC, KLM. Dokažte, že středy dvojic AK, BL, CM buď leží v přímce, nebo jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka. Pokuste se zobecnit tak, že nahradíte oba dané trojúhelníky dvěma navzájem shodnými množinami bodů.

Máme-li z této úlohy něco vytěžit matematicky a didakticky, budeme dávat takové impulsy, které povedou žáky k uplatnění shodných zobrazení.

Předně je třeba sestavit přehled všech typů shodných zobrazení v rovině. Obecně jsou známé identita, otočení a posunutí jako přímé shodnosti, osová symetrie jako nepřímá shodnost. Tento přehled si žáci doplní nepřímým zobrazením, složeným z osové symetrie a posunutí ve směru její osy (tzv. posunuté zrcadlení). Úplnost klasifikace se dá ověřit pomocí rozkladů shodností v osové souměrnosti; touto věcí se zde snad nemusíme zabývat.

Použití „vyššího prostředku", tj. grupy shodných zobrazení, se okamžitě rentuje. Snad už není ani třeba dalších impulsů, nanejvýš snad upozornění, že jeden z daných rovnostranných trojúhelníků je obrazem druhého v shodném zobrazení, které může být přímé či nepřímé.

U obou typů nepřímých zobrazení je evidentní, že všecky středy dvojic vzor – obraz leží na téže přímce. Je-li shodnost, která převádí první trojúhleník v druhý, posunutí $\mathscr{T}$, vytvoří středy úseček vzor – obraz útvar, který vznikne z prvního trojúhelníka posunutím $\frac{1}{2}\mathscr{T}$; to je fakt, který žáci snadno „objeví" a dokáží za pomoci obrázku. Nejsložitější je případ, kdy vyšetřovaná shodnost je otočení $\mathscr{R}$ kolem středu S o úhel α v daném smyslu. Opět za pomoci obrázku žáci odvodí, že středy dvojic vzor – obraz vzniknou z prvního trojúhelníka otočením $\mathscr{R}'$, které má týž střed S, týž smysl jako $\mathscr{R}$, ale velikost $\alpha/2$. Ovšem toto otočení $\mathscr{R}'$ je ještě třeba složit se stejnolehlostí $\mathscr{H}$, která má střed S a konstantu $\cos \alpha/2$.

Dalším impulsem je otázka, zda bylo podstatné, že dané dva útvary byly dva rovnostranné trojúhelníky; při zamyšlení nad touto otázkou si žáci uvědomí velkou obecnost a výhodnost předcházejícího důkazu pomocí zobrazení.

Tato úloha přímo vybízí k srovnání metod. Dáme žákům další podnět, aby zkusili řešit úlohu v obecné formulaci pro dvě shodné množiny pomocí souřadnic. Místo dvou reálných souřadnic užijeme raději jedné komplexní souřadnice a tím se napojíme na další úsek školské matematiky – na aritmetiku komplexních čísel.

Analytické vyjádření *přímé shodnosti* $\mathscr{S}$ je

$$z' = az + b, \quad |a| = 1 .$$

Je-li $[z'']$ středem dvojice vzoru $[z]$ a obrazu $[z']$, platí

$$z'' = \tfrac{1}{2}(z + z'),$$

tj.

$$z'' = \tfrac{1}{2}(a + 1)\, z + \tfrac{1}{2}b . \tag{1}$$

Je-li $a + 1 = 0$ ($\mathscr{S}$ středová symetrie), je $z'' = \frac{1}{2}b$ (konstantní bod). Je-li $a + 1 \neq 0$, vyjadřuje (1) přímou podobnost.

Nepřímá shodnost $\mathscr{S}$ má vyjádření $z' = a\bar{z} + b \quad |a| = 1$.
Jako dříve vypočteme z''

$$z'' = \tfrac{1}{2}z + \frac{a}{2}\bar{z} + \frac{b}{2} \tag{2}$$

a dokážeme kolineárnost všech bodů $[z'']$ např. tak, že dokážeme, že pro všecka z jsou body $[\frac{1}{2}b]$, $[1/a(a + b + 1)]$, $[\frac{1}{2}(z + a\bar{z} + b)]$ kolineární.

Impuls: lze použít buď závislosti vektorů, nebo raději determinantu. V každém případě však žáci konstatují, že pro nepřímou shodnost je početní důkaz mnohem pracnější a delší (i když myšlenkově nenáročný) než důkaz ryze geometrický.

Analytickým řešením by však ještě neměly skončit úvahy o úloze 2. Zcela přirozeně se vnucuje přenést úlohu do jednorozměrného a trojrozměrného prostoru. V prvním i druhém případě bude ovšem třeba nejdříve hypoteticky formulovat výsledek (jaký útvar vyplní středy úseček vzor – obraz) a pak tento výsledek dokázat či korigovat. V obou případech budeme vedeni ke zkoumání příslušné grupy shodností.

*

Otiskujeme ještě texty třetí čtveřice úloh na rok 1973:

Úloha 21. V rovině je dáno n různých bodů ($n > 1$). Označme D (d) největší (nejmenší) z jejich kladných vzdáleností. Pak platí

$$\frac{D}{d} > \frac{\sqrt{(n)} - 1}{2}.$$

Dokažte.

Úloha 22. Určete poslední dvě nenulové cifry čísla 500! (500 faktoriál).

Úloha 23. V množině M všech přirozených čísel zavedeme dvě operace: $x \wedge y$ (největší společný dělitel čísel x, y) a $x \vee y$ (nejmenší společný násobek čísel x, y). Porovnejte struktury $(M, +, .)$, $(M, \vee, \wedge)$. V strutuře $(M, \vee, \wedge)$ sestavte rovnici a rozřešte ji.

Úloha 24. Je dána soustava tří rovnic

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = 0 \quad i = 1, 2, 3,$$

jejíž koeficienty a_{ij} splňují tyto podmínky:

a) $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} > 0$;
b) všecky ostatní koeficienty a_{ij} jsou záporné;
c) $a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} > 0 \quad i = 1, 2, 3$.

Dokažte, že soustava má jediné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Jan Vyšín

Metodicky zpracovaná řešení zašlete redakci Pokroků do konce srpna 1973 s označením „Matematická metaolympiáda".