Mary Coughlin

Matematika zakořeněná v tajemnu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 35 (1990), No. 5, 280--285

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139370`

diskuse

MATEMATIKA ZAKOŘENĚNÁ V TAJEMNU

Mary Coughlinová, Toledo, USA

Následující článek měl vyjít u příležitosti 250. výročí známé polemiky mezi představiteli vědy a církve, která ve svých důsledcích urychlila vývoj moderní matematiky. Text byl připraven do tisku v roce 1983, ale z ideologických důvodů k jeho publikaci nakonec nedošlo. To se nyní snažíme napravit.

Redakce PMFA.

Zveřejnění díla George Berkeleye *Analyst* v roce 1734, o němž se F. Cajori zmiňuje jako o „nejpozoruhodnější události století v britské matematice", vyvolalo důležité otázky o zdravém základu matematiky, které se odrážejí i v matematice současné. Berkeley napsal svou esej jako polemiku proti volnomyšlenkářským vědcům své doby a zvláště proti „nevěřícímu matematikovi", známému astronomovi Edmundovi Halleyovi. Berkeley, který byl právě zvolen biskupem, obvinil tyto materialisty, že zneužívají své vědecké autority, aby klamali jiné osoby ve věcech náboženské víry, v oblasti ležící zcela mimo jejich kompetenci. Dále tvrdil, že vědci jsou nedůslední, když kritizují základy náboženství, protože jejich vlastní věda má své kořeny v tajemnu. Podle Berkeleye jsou totiž některé partie matematiky nejen temné, ale přímo rozporné a spočívají na méně pevných základech než náboženství. Z toho důvodu každý, kdo odmítá náboženství, protože vyžaduje víru, by měl z téhož důvodu odmítnout i matematiku.

Aby obhájil své tvrzení, že matematika té doby byla zakořeněna v tajemnu, Berkeley zahájil ostrý útok na Newtonovu metodu fluxí tím, že nejprve ukázal na dvojznačnost základních pojmů a pak na chybné úsudky použité v důkazech. Nikdy nebral v pochybnost užitečnost ani správnost výsledků, ačkoli pokud jde o správnost, připisoval ji něčemu, co nazval „vzájemná kompenzace chyb". První část jeho kritiky, že totiž základní pojmy jsou zcela nejasné, byla namířena proti infinitezimálním veličinám jako základu Newtonovy metody. Tvrdil, že rychlosti, momenty, fluxe a okamžité přírůstky jsou „stínová jsoucna" nepřijatelná jako objekty exaktní vědy. O infinitezimálních veličinách si zažertoval: „Nejsou to ani konečné veličiny, ani veličiny nekonečně malé, ani to není prosté nic. Nemohli bychom je nazvat duchy zesnulých veličin?" Protože fluxe (neboli rychlosti) byly založeny na infinitezimálních veličinách, samotnou fluxi bylo obtížné si představit. V důsledku toho fluxe z fluxe nebo rychlost rychlosti přesahovala lidské chápání a užití znamének a symbolů jen zakrývalo zmatek a nedostatek jasnosti. Aby Berkeley zdůraznil své důvody pro napsání eseje – tj. pohrozit volnomyšlenkářům a ukázat na nedůslednost jejich útoků proti náboženství – poznamenal, že „když někdo dokáže strávit druhou nebo třetí fluxi, neměl by trpět nevolností před jakoukoliv stránkou božství".

MARY COUGHLIN: *Mathematics Rooted in Mystery.* The Mathematical Intelligencer, vol. 5, No 1, 1983, 48–51.

Druhou část své kritiky, že totiž důkazy jsou sporné, založil Berkeley na přezkoumání důkazů u dvou Newtonových výsledků, totiž fluxe pravoúhelníku AB a fluxe mocniny x^n. Potom, co analyzoval první z těchto důkazů, dospěl k závěru, že pouze mlčky předpokládaná úcta k autoritě může vysvětlit, proč Newtonovi žáci přijali za svou argumentaci mající tolik trhlin. Věřil, že sám Newton měl podezření o chybnosti svého důkazu, a proto jej nepoužil při odvození fluxe veličiny x^n. Důkaz, který použil a který je dále uveden, byl podle Berkeleyova názoru stejně neplatný jako ten první. Newton, podle Berkeleye, zvětšil x o přírůstek o, a tedy když x přejde v $x + o$, x^n přejde v $(x + o)^n$. Potom Newton rozvine $(x + o)^n$ podle binomické formule a ukáže, že poměr přírůstků veličin x a x^n bude roven 1 ku $nx^{n-1} + (nn - n/2)\,ox^{n-2}$ + atd. Potom nechá přírůstek o vymizet a dostane poměr 1 ku nx^{n-1}. Berkeley činí závěr, že uvažování je chybné. Nejprve se použije přírůstek o veličiny x k výpočtu přírůstku veličiny x^n. Potom, aby se obdržela fluxe, nechá se přírůstek zmizet. Když přírůstek zmizí, jak může zůstat poměr přírůstků? Berkeley tvrdí, že buď je o něco, nebo to není nic, a pokud zmizí, musí zmizet i všechno, co bylo odvozeno na základě jeho existence. A aby znovu zdůraznil své důvody k napsání eseje, poukazuje na to, že důkaz je nelogický, což je defekt, jaký by vědci nikdy netolerovali v otázkách božství.

Část první Berkeleyovy kritické připomínky se mohla zakládat na nedorozumění, že totiž fluxe neboli rychlost může být vysvětlena pouze v termínech pohybu. Z tohoto hlediska fluxe z fluxe musí být totéž co rychlost rychlosti, a proto, uzavírá Berkeley, druhá nebo třetí fluxe je nepochopitelná. Jestliže je však fluxe interpretována jako rychlost změny nějaké funkce, pak myšlenka druhé nebo třetí fluxe není o nic obtížnější, než je fluxe první. Berkeleyova kritika pojmu infinitezimální veličiny byla ovšem vnímavá a vedla k jeho druhé kritické připomínce týkající se metody. Jeho tušení, že sama metoda postrádá zdravý základ, bylo podložené a svědčí o pozoruhodném proniknutí do věci. Jeho námitky týkající se rozporné povahy nekonečně malé veličiny o, o které se předpokládá, že je buď nulou, nebo malou konečnou veličinou podle okamžité potřeby, míří správným směrem. Logicky vzato, přírůstek nemohl být něčím a pak zase ničím, ale aby mohl být odstraněn tento rozpor, vyžadovalo to jasný pojem spojitosti stejně jako limity. Zdá se být zřejmé, ačkoliv Augustus De Morgan byl jiného názoru, že Berkeley byl přesvědčen o tom, že na jeho námitky neexistuje odpověď. Věřil, a to nikoli bezdůvodně, že sám Newton měl některé výhrady vůči svému dílu. Ať tak či onak, protože jen málo matematiků 18. století vůbec pochopilo význam Berkeleyovy kritiky, okamžitou reakcí na esej byla záplava knih a článků napsaných na Newtonovu obhajobu. Tím se zatemnil Berkeleyův metafyzický cíl a matematická kontroverze vyvolaná publikací díla *Analyst* pokračovala dlouho potom, co Berkeley sám se jí přestal zúčastňovat.

Mezi obhájci Newtona, kteří byli přímo motivováni Berkeleyovou esejí, byli James Jurin, Benjamin Robins a Colin MacLaurin. Jejich výzkumy znamenaly rozhodný pokrok směrem k zapuzení infinitezimálních veličin a k vybudování pojmu limity. Ale protože metoda fluxí se tak dobře osvědčila v aplikacích a vedla k intuitivně správným výsledkům, mnoho matematiků 18. století bylo spokojeno se slepou, formální manipulací se symboly a mělo sklon ignorovat problém přesnosti. D'Alembertova rada „jdi kupředu a začneš věřit" vyjádřila převažující postoj. Teprve později, když se nevyhnutelně objevily paradoxy a rozpory, bylo zahájeno seriózní bádání o logických základech kalkulu a to pak bylo úspěšně dovršeno až koncem 19. století.

Koncem 18. století bylo vyvinuto úsilí odstranit infinitezimální veličiny z výkladu učení o fluxích. Ale nedostačující pojem funkce a z toho plynoucí závislost na geometrických pojmech pohybu a rychlosti stejně jako nedostatek vyhovujících definic limity a spojitosti zabránily přesnému zformulování kalkulu. Teprve na konci 19. století konečně spočinul kalkulus na dostatečně pevných základech, které uspokojily i ty nejnáročnější, a matematická polemika započatá publikací knihy *Analyst* se zdála být jednou provždy uzavřena.

Aritmetizace analýzy byla vyvrcholením století, které se vyznačovalo produktivitou a pokrokem v matematice. Revoluční objevy neeuklidovské geometrie a nekomutativní algebry učiněné dříve v tomto století vyústily v nové porozumění podstatě matematiky. Matematikové nyní mohli svobodně vytvářet svůj vlastní svět, nespoutaný svazky s fyzikálním vesmírem a ohraničený pouze požadavky konzistence. Vývoj v geometrii, algebře a analýze zajistil základy jejich vědy a byl odpovědný za optimismus, kterým byl prodchnut matematický svět začátkem 20. století. Zajisté by již Berkeley nemohl tvrdit, že „matematikové si počínají nerozumně, když si stěžují na nepochopitelnost náboženství, protože jejich vlastní věda je nerozumná".

Ale spočívá matematika 20. století skutečně na tak pevných základech, jak se to jevilo na přelomu století? Pohled na dlouhou historii matematiky prozrazuje že její první krize začala v 5. století př. Kr. s objevením se Zenonových paradoxů a s objevem, že ne všechny geometrické veličiny jsou souměřitelné. Tato krize byla částečně vyřešena kolem r. 310 př. Kr. Eudoxovou teorií proporcí, ale vyplula opět na povrch v souvislosti s vývojem infinitezimálního počtu v 17. století. Teprve mnohem později byla úplně vyřešena, když Cauchy, Weierstrass, Dedekind a Cantor nahradili nekonečně malé veličiny teorií limit a poskytli přiměřenou definici kontinua reálných čísel.

Obrátíme nyní pozornost k další krizi, která se projevila začátkem 20. století. V aritmetizaci analýzy byly použity různé postupy, jak definovat reálná čísla, ale všechny byly závislé na myšlence úplného a nekonečného souboru čísel. Potřeba objasnit pojem „nekonečno" vedla k vybudování teorie množin. Náhlé objevení se množinově teoretických paradoxů vyprovokovalo diskusi o základech, která může být docela dobře označena za krizi.

Zatímco jsme se mnohému naučili za dobu, kdy se někteří z nejschopnějších matematiků 20. století potýkali s problémem paradoxů, žádné uspokojivé řešení tohoto problému neexistuje a perspektiva, že bude nějaké nalezeno, je skutečně mimořádně mlhavá.

Je pravda, že pythagorejci čelili podobné krizi, když se objevily Zenonovy paradoxy, ale problémy, které vznikly kolem nesouměřitelnosti, iracionálních čísel a nekonečně malých veličin, byly uspokojivě vyřešeny objasněním příslušných pojmů a podáním pečlivých definic. Nyní však naše potíže pramení z omezenosti samotné naší schopnosti usuzovat. Ačkoli nikdy nebyla shoda názorů na to, co je to vlastně matematika, vždy se předpokládalo, jak podotkl Berkeley, že matematikové jsou mistry v usuzování *par excellence*. Proto výzva jim adresovaná, kterou představuje Gödelův objev, že nelze dokázat bezespornost aritmetiky, je hluboce znepokojivá a v tom, že si matematikové vůbec nezoufají tváří v tvář takovému objevu, je cosi překvapujícího. Důkazy toho, že úplná přesnost a absolutní konzistence možná nejsou realistickými cíli v matematice, se nedají popřít, ale je zde i tušení, že takové cíle možná nejsou nutné. Nakonec na žádnou jinou vědu se takové požadavky nekladou. Snad se matematikové podobně jako ostatní vědci budou muset spokojit s užíváním teorií, které jsou užitečné pro své výsledky, dokud se v nich neobjeví rozpory. Hermann Weyl tomu neoponuje, když říká, že ačkoli nemáme žádnou záruku konzistence pro všechny časy, je vždy dost času na to provést změny, až se objeví obtíže. Ti matematikové, kteří provozují svou praxi beze strachu z nedostatku jistoty, jsou stále nesmírně produktivní. Jejich ochota přijmout logiku a teorii množin, kterou potřebují, buď na intuitivní bázi, nebo s odvoláním se na autority, prostě potvrzuje výrok A. N. Whiteheada, že „věda je podnikání, v němž se rozum opírá o víru". Střízlivé vědomí, že konzistence a úplné zbavení se všech rozporů mohou matematikům navždy unikat, vzbuzuje tušení, že jejich spoléhání se na víru může být podstatnější, než vědci obvykle připouštějí. Je jisté, že útok na základy logiky a teorie množin provedený nějakým Berkeleyem 20. století by byl přinejmenším stejně udržitelný jako útok na Newtonovu metodu fluxí provedený autorem knihy *Analyst*.

Berkeleyova esej byla ovšem napsána nikoli ze starostlivého zájmu o základy matematické analýzy, ale kvůli zneuctění a ohrožení náboženské víry materialistickými matematiky. Podívejme se nyní na současný postoj vědců vůči náboženství. Stejně jako v Berkeleyově době mnozí z nich snižují náboženskou víru, protože je to pouhá víra; přece však podle Hermanna Weyla transcendentní svět, v nějž mnozí z nich věří, „stěží klade menší požadavky na sílu naší víry než učení dávných církevních otců nebo středověkých scholastických filozofů". Je pravda, že konflikt mezi náboženstvím a vědou prošel několika změnami od doby, kdy lidské mozky byly zaujaty Newtonovými objevy. Dřívější vědci od Koperníka po Newtona odmítali vyšší účel jako faktor působící na události a vyloučili Boha jako vysvětlení jevů ve fyzice, ale nikdy neměli v úmyslu zcela upřít Bohu místo ve vesmíru. Byli to nábožní lidé, jejichž víra v Boha byla nepopíratelná – ačkoli se můžeme ptát spolu s Immanuelem Kantem, co by vlastně znamenal Bůh, který by neměl žádný vztah k hodinám vesmíru. Nicméně je pochybné, zda dokonce Halley, kterého Berkeley nazývá odpadlíkem, popíral existenci Boha.

Koncem 19. a začátkem 20. století se ovšem povaha konfliktu mezi vědou a náboženstvím podstatně změnila. Vyhlídky vědy na přelomu století byly nesmírně optimistické. Až na několik oponujících hlasů se mělo všeobecně za to, že svět je racionální a že jenom věda může objevit jedinou možnou pravdu. Idea boha se jevila jako neslučitelná s vědeckým myšlením. Čas a stále přesnější měření zcela jistě vykoření všechna zbývající tajemství a neznámo. Intelektuálové jako B. Russel, Julian Huxley a A. J. Ayer obhajovali svůj ateismus, případně agnosticismus, poukazováním na iracionalitu náboženské víry a na její totální opozici vůči pokroku. Mnohým zřejmě věda nahradila náboženství. Bojácní duchovní, na neštěstí pro ně, přispěli ke zranitelnosti náboženství tím, že obhajovali neudržitelné pozice. Platnost vědeckých výsledků byla napadána argumenty z bible, a tak *bible* nevyhnutelně prohrála bitvu.

V dnešní době, v druhé polovině dvacátého století, by ovšem bylo obtížné najít známého teologa, který by argumentoval biblickým stvořením světa proti evoluční teorii. Ale i dnes je široce uznáván názor, že věda zničila potřebu náboženství. Freudovo tvrzení, že „pravda náboženství nemusí být vůbec brána na vědomí" je přijato tak všeobecně, že obzvláště mezi intelektuály se víra považuje za neinteligentní a zastaralou a její zapuzování za zbytečné. Filozof Kai Nielsen tvrdí, že náboženské pojmy nejsou dokonce dostatečně soudržné na to, aby se náboženská víra mohla stát rozumnou nebo obhajitelnou možností volby. A v prestižní *Encyklopedii filozofie* říká J. Smart, ze „by bylo nesprávné předpokládat, že by zvláštní rysy vědy 20. století ji nutně učinily méně nepřátelskou vůči náboženství než byla věda 19. století". Lhostejnost, se kterou je náboženství dnes posuzováno, je možná mnohem rafinovanějším útokem než bylo otevřené nepřátelství minulých časů. Zdá se být jasné, že ačkoli se změnila jeho podoba, Berkeleyův „nevěřící matematik" je stále živ a zdráv i v naší době.

Ačkoli okolnosti, které motivovaly napsání díla *Analyst* – podkopávání náboženské víry vědci a obtíže v základech matematiky – stále ještě převládají, situace je mnohem složitější, než byla v době, kdy Berkeley napsal svou esej. Otázky vyvolané Gödelovými výsledky jsou hluboké a vzdorují snadným odpovědím. Jaká je povaha matematické pravdy, jak chápat její význam a existenci? Je skutečnou aritmetikou ta, ve které platí nebo neplatí hypotéza kontinua? Je teorie množin cantorovská? Existují totiž vůbec nekonečné množiny? Podobně nové teologické pohledy vyvolaly v oblasti náboženství otázky, pro které jsou definitivní odpovědi minulosti již nedostačující. Do jisté míry jsou tyto pohledy výsledkem aplikace vědecké metody myšlení na zkoumání bible. Co se děje, když někdo věří? Čemu, jak a proč dokáže myslící člověk věřit? Existuje nějaké neproměnlivé jádro náboženské doktríny? Je víra slučitelná s pochybnostmi? Stejně jako muž z ulice si není vědom těžkostí, které leží pod povrchem jeho každodenní aritmetiky existují i lidé, kterým nedělá starosti naprostá nepochopitelnost obsahu tradičního katechismu. Současní teologové jsou si ovšem stejně jako matematikové více vědomi toho, že oblast jistoty v jejich oboru je omezená. Se zřetelem k současné situaci můžeme pouze spekulovat, zda by Berkeley, kdyby žil v dnešní době, vzal na sebe úkol napsat moderní verzi díla *Analyst*.

Zdá se být ovšem jasné, že skeptický „nevěřící matematik" dneška*) je ponechán v situaci, kdy si má zvolit za svou filozofii matematiky některou z pochmurných alternativ: 1. Intuicionismus, ve kterém se nepřipouští „Cantorův ráj"; 2. formalismus, podle kterého je matematika bezúčelná a možná i nekonzistentní hra; nebo 3. logicismus ve smyslu Russela a Wittgensteina, podle kterého je matematika nesmírná tautologie, která neříká nic významnějšího než že A je A.**) Mnoho matematiků zjistilo, že takový skeptický přístup oslabuje jejich tvořivost.

---

*) Rozuměj: takový, který hledá opodstatnění matematiky v matematice samotné a nikoli mimo její rámec na základě určitého světového názoru. (Pozn. překl.)

**) Podrobnější informaci najde čtenář v článku E. Brieskorna *O dialektice v matematice*, PMFA 1979/1, 2, 3. (Pozn. překl.)

Hermann Weyl říká: „Vnějškově se nezdá, že by [tento postoj] škodil naší každodenní práci a přece musím pro jednou přiznat, že měl značný praktický vliv na můj matematický život. Usměrňoval moje zájmy do oblastí, které jsem pokládal za poměrně ‚bezpečné' a neustále oslaboval mé nadšení a rozhodnost, se kterými jsem konal svou vědeckou práci".

Myslím, že lze spravedlivě říci, že bez jistého druhu víry, která zahrnuje víru ve skutečnou existenci čísel a množin, a bez otevřenosti vůči tomu, co Weyl považoval za teologické myšlení, nebude plně obnovena tvůrčí energie matematiků. Neboť tvůrčí matematikové v plném významu toho slova potřebují mít pocit, že věda o nekonečnu není pouze užitečným nesmyslem, ale že je smysluplná, významná a pravdivá a že v sobě zahrnuje všechny krásy a všechna tajemství, které nám přislíbili Newton, Gauss a Cantor.

Přeložil Oldřich Kowalski

(Podzim 1983)

vyučování

O POJMU HMOTNOST

(Hmotnost, energie, relativita)

L. B. Okuň

1. Malý test místo úvodu

Einsteinův vztah, určující souvislost mezi hmotností tělesa a energií v něm obsaženou, je bezesporu nejvýznamnějším vztahem teorie relativity. Umožnil nám nově, hlouběji pochopit svět kolem nás. Jeho praktické důsledky jsou ohromné. V jistém smyslu se tento vztah stal symbolem vědy 20. století.

V literatuře se lze setkat se čtyřmi rovnicemi, které vyjadřují fyzikální smysl vztahu mezi hmotností a energií:

$$E_0 = mc^2\,, \tag{1.1}$$

$$E = mc^2\,, \tag{1.2}$$

$$E_0 = m_0c^2\,, \tag{1.3}$$

$$E = m_0c^2\,; \tag{1.4}$$

zde c je rychlost světla, E je celková energie tělesa, m je jeho hmotnost, E_0 je klidová energie, m_0 je hmotnost téhož tělesa v klidu.

V populárně vědecké literatuře, ve školních učebnicích a ve většině vysokoškolských učebnic převládá vztah (1.2) [a jeho důsledek – vztah (1.3)], který se obvykle čte zprava doleva a interpretuje se takto: hmotnost tělesa se zvětšuje s jeho energií jak vnitřní, tak i kinetickou.

V převážné většině seriózních monografií a vědeckých pojednání z teoretické fyziky, především z teorie elementárních částic, pro niž je teorie relativity pracovním nástrojem, se zpravidla vůbec nepoužívají vztahy (1.2) a (1.3). Podle těchto knih se hmotnost m tělesa při jeho pohybu ne-

Lev Borisovič Okuň, nar. 7. 7. 1929, člen korespondent AV SSSR, profesor. Od r. 1954 pracuje v Ústavu teoretické a experimentální fyziky v Moskvě v oboru teorie elementárních částic.

Článek je přeložen z časopisu Uspechi fizičeskich nauk, sv. *158*, č. 3, červenec 1989.