Abe Shenitzer

Několik úvah o vyučování matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 33 (1988), No. 1, 47--51

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139594

vyučování

NĚKOLIK ÚVAH O VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

Abe Shenitzer

Autor působí na katedře matematiky kanadské York University, Downsview, Ontario, M3J 1P3. V kritické úvodní části svého příspěvku reaguje na postoje kanadských studentů a učitelů k matematice a k jejímu vyučování. (Poznámka redakce.)

Nedávno jsem zhlédl divadelní hru o mladém Welšanovi, který začíná vyučovat dějepis v jedné anglické střední škole. Svou první hodinu zahajuje tím, že se jednoho studenta ptá, která strana – král či parlament – vyhrála v Anglii první občanskou válku. Po několika dotazech na podrobnosti se ptá: „Trevelyan se domnívá, že první občanská válka v Anglii byla nejdůležitější událostí v anglických dějinách. Co si o tom myslíte?" Tento učitel spolu se mnou zastává pedagogickou filozofii, která v kritické a hodnotící funkci vzdělávání spatřuje jeho hlavní přínos k intelektuálnímu a duševnímu vývoji studentů. Nevyložená nebo nedostatečně vyložená látka, která se jako strava servíruje ve všech základních a středních školách celým generacím studentů, rozvrací intelekt i duši studentů a vede je k cynismu a k opovrhování učitelem i vyučovacím předmětem.

Žádný předmět není obávanější a opovrhovanější než matematika, která je jednak obtížná, jednak zdánlivě bezvýznamná. A přitom právě tento předmět může posloužit k popisu symetrie a spojitosti, může poskytnout nástroje pro nejdůmyslnější fyzikální teorie, může odhalit bohatství a omezenost tvarů a dokonce i hranice samotného deduktivního myšlení.

Proč existuje tato ohromná trhlina mezi představou a skutečností? Proč se projevuje „strach z matematiky"? Vůbec nepochybuji, že základní příčina tohoto žalostného a skličujícího stavu spočívá v tom, že z vyučování matematice (a to od mateřské školy až po školu střední) byly vesměs vyřazeny jeho kritické a hodnotící složky a vše se zaměřilo na výuku matematických „faktů" a „dovedností".

Příliš často se stává, že to, co vyučujeme, je sice lokálně rozumné, ale celkově bezvýznamné a nesouvislé, je to Golem bez paměti, bez rozhledu i bez duše. A pak tu je způsob, jakým se snažíme splnit své povinnosti. Příliš často je tento způsob projevem dusivého poručníkování, které nás vede k tomu, že neustále předepisujeme požadavky, a to až do té míry, že se slovo „iniciativa" samo vytrácí ze studentova slovníku.

Nemám v úmyslu oslavovat studenty a pomlouvat učitele. Nejde mi zde o to, kolik studentů se chce učit, ale kolik učitelů umí učit, nebo přesněji, kolik učitelů má schopnost povzbudit *aspoň některé* studenty ke spolupráci na jejich vlastním intelektuálním a lidském růstu. A vzhledem k tomu, že se všichni učitelé školí na univerzitách, jsou to nutně univerzity, které se musejí stát iniciátory změn.

Klíčem k hodnotnému vyučování *všech* studentů na *všech* úrovních je odborná a intelektuální zdatnost jejich učitelů. Potřeba odborné zdatnosti učitele je zřej-

---

ABE SHENITZER: *Some Thoughts on the Teaching of Mathematics.* The Mathematical Intelligencer, vol. *8*, No 1, pp. 21–24. (Přeložila HANA RIPKOVÁ a JAROSLAV ŠEDIVÝ.)

má. Potřeba jeho zdatnosti v kritickém a historickém myšlení se naproti tomu považuje za méně důležitou. A právě proto se hlouběji zamýšlím nad intelektuálním aspektem matematického vzdělávání.

Mnoho učitelů základních a středních škol má slabé odborné matematické vzdělání a nemá prakticky žádné vzdělání v historii a filozofii matematiky. Sami se považují za dodavatele pestrého souboru matematických technik [= postupů, metod], ale rozhodně nevidí část svého úvazku v práci kritiků a intelektuálních historiků.

Mnoho univerzitních učitelů považuje produkci nových výsledků za základní věc; ve studentech, kteří nevykazují schopnosti k výzkumné práci nebo alespoň mimořádnou zdatnost v osvojování technik, vidí druh „vzdělávaného balastu", který je nezbytný jen k tomu, aby si rozsáhlá vzdělávací instituce zachovala existenci. Jestliže těmto učitelům řekneme, že by neměli působit pouze jako dodavatelé matematických technik, ale občas také jako kritici a intelektuální historici, budou mnozí překvapeni úplně stejně jako jejich kolegové ze základních a středních škol.

Jestliže tohle všechno je v zásadě správné hodnocení stavu, pak je zřejmé, jak dosáhnout požadované nápravy. Univerzity musí dbát, aby náhodně sestavená odborná příprava učitelů pro základní i střední školy byla nahrazena jejich promyšlenou přípravou, která na nejmenší míru sníží jejich obtíže s osvojováním technik a zdůrazní matematické otázky. Kromě toho by univerzity měly dbát, aby si *všechny* kategorie učitelů uvědomovaly historické a kritické dimenze matematiky. A vůbec nejdůležitější je, aby univerzity dosáhly toho, že si všechny kategorie učitelů uvědomí, že *konečným cílem vzdělávání je vychovat svobodné, tj. samostatné muže a ženy s láskou nebo alespoň s úctou k učení.* Tolik k mému náčrtu změn.

Není žádným tajemstvím, že nynější vyučování matematice je zřídka pokusem o hodnotnou komunikaci. Mnohem častěji je to proces, ve kterém „nadřízený" poučuje „podřízeného". Nijak nepřispívá ke studentově samostatnosti, nevede k tomu, že by učitel a studenti společně kriticky posuzovali svou činnost. Studenti pracují podle příkazů, neusilují o hlubší porozumění látce. Jedním z nejzávažnějších projevů nízké psychologické kvality vyučovacího procesu, jeho paralyzujícího poručnictví a předpisování je to, že jen málo studentů matematiky si v nižších ročnících osvojuje návyk používat z vlastní vůle jinou odbornou knihu než učebnici.

Jsem snad tak naivní, abych si myslel, že můj návrh je kouzelným proutkem, který zažene všechno špatné a nastolí šťastný věk vzdělání? Rozhodně ne. Ale je to dobrý plán; příprava učitelů podle vytyčených zásad je základním krokem ve správném směru.

Jsem si plně vědom, že i když se nám říká učitelé, jsme postaveni do situace, v níž zaskakujeme v roli regulátorů společenského pohybu, jakýchsi strážců u závor. Tragické na tom je, že mnozí z nás jsou pohlceni uvedeným aspektem své role, že máme sklon zapomínat na roli učitelskou i na její základní a konečný cíl, o kterém jsme hovořili. Nikdy nesmíme tento prvotní cíl pustit ze zřetele. Prakticky to znamená, že musíme využít každou příležitost, jak rozvíjet chuť studentů učit se a učit je učit se samostatně. Rozhodující návyk, který jim musíme vštípit, je návyk číst *kriticky*.

Závěrečná poznámka. Chtěli bychom, aby naši studenti byli dobří v matematice.

Ale co když nejsou? Musí při naší péči potom skončit spíše s pocitem ponížení než povznesení? Myslím si, že ne.

Snažím se svým studentům jasně vysvětlit, že navzdory svému nadšení pro matematiku hodnotím matematickou dovednost právě jen jako dovednost. Říkám jim, že u lidské bytosti kladu na první místo její lidskost. Říkám jim, že když vidím někoho, kdo se potýká s nesnází, zvláště s matematickou nesnází, neobdivuji jeho nadání, ale mnohem více jeho vytrvalost a tvrdošíjnou trpělivost. Tyto kvality máme, abychom je uplatňovali.

Zbývá mi úkol, abych na příkladech ukázal, co rozumím vyučováním matematice, která je intelektuálně významná pro průměrně nadané posluchače. Popis svých příkladů chci uvést „programovou" poznámkou.

Nutnou (i když rozhodně ne postačující) podmínkou pro to, aby vyučování mělo nějaký význam, je odstupňovat důraz; jestliže je důležité všechno, není důležité nic. Někteří učitelé zdůrazňují logickou dokonalost matematiky, jiní její aplikace, další genetické faktory atd. Sám považuji genetický přístup za ústřední při probírání kterékoliv partie matematiky. Je důležité sledovat historický vývoj ideje nebo pojmu a věnovat se tomu, co by se dalo nazvat srovnávací matematikou. Nezáleží na tom, jak skromný je rozsah výkladu, vyučující však musí diskutované otázky umístit do historického a myšlenkového kontextu a zabývat se jejich významem. Přistupme nyní k příkladům.

Příklad 1. Námětový kurs matematiky [1]

Následuje stručný popis kursu, který jsem zavedl do programu nabídnutého katedrou matematiky na univerzitě v Yorku (Downsview, Ontario, Kanada) především pro doškolování učitelů.

Tento kurs zahrnuje několik nezávislých témat, z nichž každé zkoumá významný matematický problém či ideu. Přestože výklad každého tématu zahrnuje popis historického vývoje důležitých idejí, nejde o kurs z historie matematiky. Je to spíše problémový kurs, který má účastníky přesvědčit, že matematika má smysl, že některé její problémy jsou hluboké a že vývoj některých jejích idejí je vzrušující kapitolou intelektuální historie.

Kritériem pro výběr témat je jejich matematický a kulturní význam a jejich odborná přístupnost. Ačkoli se snažím dělat obsah přístupný, trvám na minimu odborných detailů, bez nichž by kurs mohl degenerovat na povrchní tlachání. Na druhé straně je v tomto kursu technická stránka pouze prostředkem, výsledkem je ocenění idejí a jejich významu.

Ani témata ani jejich výklad nejsou předem pevně stanoveny. Snažíme se studentům dodat odvahu, aby témata sami navrhovali a přednášeli. Písemné referáty, které studenti předkládají, nesmí být parafrázemi článků z encyklopedie, ale musí se zabývat každým tématem tak jak se probíralo v hodinách.

Ve školním roce 1982—83 jsme zvolili tato větší témata:

1. Vývoj číselných oborů. (Diskuse zahrnovala srovnávání Eudoxova a Dedekindova přínosu a úvahy o hlavních rozdílech v jejich hlediscích.)
2. Archimédova *metoda.*
3. Některé řecké konstrukční úlohy a jejich moderní algebraická řešení.
4. Keplerovy zákony a Newtonův gravitační zákon.
5. Huyghensovy cykloidální hodiny. (Byla to jednoduchá ukázka síly diferen-

ciálního počtu a významu pojmu křivost.)

6. Minima a maxima. (Od izoperimetrického problému k variačnímu počtu.)
7. Objev hyperbolické geometrie a jeho intelektuální důsledky.
8. Geometrie, různé druhy geometrií a Kleinův Erlangenský program.
9. Fourierovy řady – jejich zrod a vliv na matematiku.
10. Hilbertův třetí problém. (Nemožnost elementární teorie objemu.)
11. Neurčitost jako pokrok. (Poznámky inspirované některými Gödelovými pracemi.)

Verze kursu pro rok 1984–85 obsahovala některá z výše uvedených témat a navíc i tato:

1. Fibonacciho posloupnost. (Toto málo slibné téma umožnilo ilustrovat význam představy o vektorovém prostoru a prodiskutovat vztahy lineární rekurence. Teorie vztahů lineární rekurence byla spojována s teorií lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a s teorií soustav lineárních rovnic.)
2. Komplexní čísla, kvaterniony a oktávy. Algebry s dělením. (Historický a odborný přehled.)
3. Izoperimetrický problém bez infinitezimálního počtu a bez existenčních předpokladů.
4. Diferenciální rovnice jako „přírodní zákony“. Determinismus. (Zabývali jsme se pouze několika diferenciálními rovnicemi. Ukázali jsme, že každá rovnice popisuje několik různých fyzikálních jevů.)
5. Diofantovské rovnice (spolu s poznámkami o Mordellově domněnce a o jejím řešení Gerdem Faltingsem).
6. Metoda postupných aproximací.
7. Nekonečně malé veličiny od Leibnize po Robinsona.
8. Kuželosečky v řecké geometrii, v astronomii a v geometrii 19. století.

Příklad 2.

Ve školním roce 1983–84 jsem přednášel kurs dějin matematiky, který měl toto ústřední téma: Řecké kořeny infinitezimálního počtu a geometrie a jejich další vývoj. (Posluchači kursu byli učitelé z praxe. Část kursu zabývající se infinitezimálním počtem se opírala o knihu C. H. Edwardse *Historický vývoj infinitezimálního počtu.*)

V kursu se diskutovalo o těchto hlavních tématech:

1. Kořeny vyšší matematiky v pracích Archiméda a Eudoxa.
2. Filozofické pokračování ve 14. století. (Oresne aj.)
3. Technické pokračování [ve smyslu metod výpočtů] v 17. století (Cavalieri, Descartes, Fermat aj.)
4. Vytvoření aparátu infinitezimálního počtu Newtonem a Leibnizem; kritické srovnání přístupů Newtona a Leibnize k infinitezimálnímu počtu.
5. Newtonova role v objevení diferenciálních rovnic jako jádra infinitezimálního počtu a v růstu matematické fyziky. Determinismus.
6. Nekonečně malé veličiny od Leibnize k Robinsonovi.
7. Fourierovy řady a jejich vliv na matematiku:
   a) vliv na pojem funkce,
   b) vliv na pojem integrálu,
   c) vliv na matematickou fyziku a na další obory.
8. Přínosy Cauchyho, Riemanna, Weierstrasse a Lebesguea k vývoji ústředních pojmů infinitezimálního počtu.

9. Eudoxos a Dedekind. Aritmetizace analýzy.
10. Axiomatická metoda. Eukleidovská geometrie a geometrie v 19. století.

Příklad 3. Kurs geometrie

Ve školním roce 1983–84 jsem vedl kurs geometrie, který lze popsat jako úvod do Kleinových geometrických idejí a jako diskusi o objevu hyperbolické geometrie a o jeho revolučním vlivu na matematické myšlení. Tento materiál považuji za velice vhodný k dosažení onoho tajemného vedlejšího účinku, který je znám jako „matematická zralost". (Grupy se rodí spolu s invarianty. Dějiny se stávají spíše dějinami idejí než kronikou [= časovým sledem] stejně bezvýznamných událostí.) Materiály, které jsem používal, zahrnovaly švýcarský středoškolský text [2] o geometrii transformací (úplně rozebraný), nástin dějin axiómu rovnoběžnosti a objevu hyperbolické geometrie [3], úvahu o významu objevu hyperbolické geometrie [4] a důkaz bezespornosti axiómů rovinné hyperbolické geoemtrie (Poincarého model) podaný v [5].

Doufám, že mé příklady ilustrují, co rozumím vyučováním intelektuálně závažné matematiky.

Nyní vyslovím závěrečnou obžalobu a výzvu.

Rozčiluje mne, že snaha učit takovouto matematiku je dosud okrajová a jakoby podezřelá činnost, kterou vykonávají izolovaní jedinci, velice omezovaní nedostatkem podpory a malým množstvím materiálů, jež by byly odborně přístupné a intelektuálně ne zcela triviální. V tuto chvíli se zdá být až na hranici dosažitelnosti i samotný záměr vytvořit osnovy integrované a intelektuálně ne zcela triviální matematiky na univerzitní úrovni.

Zatímco dlouhodobým cílem zůstává to, co můžeme nazvat intelektualizace učitelské přípravy jako klíč k matematicky významnému vzdělávání *všech* studentů; bezprostředním cílem by mělo být získat podporu univerzit pro rozsáhlé experimenty, které by zahrnovaly kursy a osnovy s významnou kritickou a historickou složkou. To znamená, že ti, kdo učí matematiku, se nesmějí sami považovat buď výhradně za matematiky ovládající matematickou techniku nebo výhradně za historiky a filozofy matematiky, ale raději za matematiky s historickými a filozofickými zájmy, kteří by rádi viděli, aby vyučování matematice bylo na všech úrovních prostoupené těmito zájmy.

Literatura a poznámky

[1] Podrobnější popis kursu a výčtu témat byl otištěn v německém časopise Der Mathematikunterricht, vol. *30*, sešit 2/1984, vydávaném nakladatelstvím Verlag Friedrich Velber, 30016 Seelze 6, NSR. O anglickou verzi si napište autorovi.

[2] Jeger, M.: *Transformation geometry.* Allen & Unwin Ltd., 1966.

[3] Kelley & Matthews: *The non-Euclidean hyperbolic plane.* Springer Verlag. Jde o úvod ke knize.

[4] Guillen: *Bridges to infinity.* J. P.Tarcher, Inc., pp. 105–115.

[5] Moise: *Elementary geometry from an advanced viewpoint.* Addison Wesley, 1963, ch. 25.