Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Anna Sekaninová

D. V. Nostrand program in modern mathematics

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 19 (1974), No. 5, 293--296

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139675

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1974

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

matematiky přispěl k podchycení zájmu, probuzení talentů a k jejich výraznému rozvoji při soutěžích, jakými jsou matematická olympiáda a fyzikální olympiáda.

D. V. Nostrand program in modern mathematics

Anna Sekaninová, Brno

Americké nakladatelství D. Van Nostrand vydalo tzv. *D. V. N. program in modern mathematics*, což je soubor těchto pěti knih zabývajících se středoškolskou matematikou:

PETERS, SCHAAF, *Mathematics — a modern approach* (dva díly)

PETERS, SCHAAF, *Algebra — modern approach*

PETERS, SCHAAF, *Algebra and trigonometry — a modern approach*

LEWIS, GEOMETRY — *a contemporary course*.

V tomto příspěvku se zabývám prvními čtyřmi knihami, pátou jsem neměla k dispozici.

Knihy Mathematics — a modern approach jsou určeny jako učebnice pro sedmý a osmý ročník škol v USA, jejich cíl autoři formulují takto:

1. *Naučit základním početním dovednostem založeným na porozumění matematickým principům. V této souvislosti je nutné dát náležitou početní praxi.*
2. *Poskytnout přehled o základních matematických představách ve shodě se zralostí čtenáře. Na této úrovni by měl učitel často apelovat na studentovu intuici.*
3. *Seznámit čtenáře s duchem a metodami matematiky 20. století a s jejím kulturním významem v dnešním světě.*
4. *Obohatit studentovy znalosti získané v základních třídách a připravit jej pro nároky střední školy.*

Knihy jsou děleny do kapitol s ustálenou stavbu. Před každou kapitolou je odstavec zařazující látku do širších historických a vědních souvislostí; pak následuje výklad pojmů doprovázený cvičeními. Potom přijde shrnutí kapitoly se slovníčkem probraných pojmů, dále cvičení pro opakování celé kapitoly a test. Každou kapitolu uzavírá odstavec výhledů do vyšší matematiky (*Honor work*), které někdy téměř nesouvisejí s látkou probranou v kapitole. Autoři koncipují výklad tak, aby žáci mohli knihu číst stejně jako čtou knihy z jiných předmětů. Řekla bych, že na některých místech si výklad přečtou spíše dospělí, kteří se žáky pracují, než žáci sami. Výkladem z různých pohledů se autoři snaží vytvořit správnou intuitivní představu o probíraných pojmech. Jako příklad uvedu výklad o čísle nula:

Podívejme se, jak se čísla nula používá.

a) *Jestliže vaše třída má 28 žáků a všech 28 žáků je dnes přítomno ve škole, můžete říci: Dnes chybí nula žáků.*

b) *Ve včerejším utkání prohráli modří s červenými 0 : 4. Můžete říci: modří dali ve včerejším utkání nula gólů.*

c) *V zápisu čísla 2083 nula znamená, že číslo neobsahuje žádné stovky.*

d) *Prázdná množina nemá žádné prvky. Můžeme také říci, že prázdná množina má nula prvků.*

Přejděme ke stručné charakteristice obsahu učebnic. Názvy jednotlivých kapitol 1. dílu jsou tyto:

1. Co je matematika? 2. Zápisy čísel. 3. Používání celých čísel. 4. Nemetrická geometrie I. 5. Činitelé a součiny. 6. Nemetrická geometrie II. 7. Racionální čísla. 8. Desetinná čísla. 9. Jak měříme. 10. Poměr, úměra, procento. 11. Praktická měření.

12. Grafy a statistika. 13. Použití matematiky v obchodu. 14. Matematika a věda.

Nyní si všimněme, jak jsou probírány jednotlivé oblasti matematiky. Aritmetika začíná výkladem o přirozených číslech (nazývaných *couting numbers*), přičemž velká pozornost se věnuje různým způsobům zápisu čísla v různých číslicových soustavách (římské, arabské, egyptské) a počítání v různých číselných bázích (kromě desítkové se procvičují báze 7, 2 a 12). Obor přirozených čísel se nejprve rozšíří o nulu (vzniknou tzv. *whole numbers*) a dále se z něho vytvoří obor nezáporných racionálních čísel. Při probírání operací s čísly se vyšetřují vlastnosti těchto operací (asociativita, komutativita, distributivita, vlastnosti prvků 1 a 0 vzhledem k jednotlivým operacím i uzavřenost množiny čísel vzhledem k operacím). Probírají se kritéria dělitelnosti, přitom působí poněkud násilně, když po šesti příkladech se autoři obracejí ke čtenáři s obvyklou pro ně otázkou: „Souhlasíte, že ...?" a formulují obecnou větu.

Geometrie se hned probírá v prostoru. Nejprve se probírají incidenční vlastnosti, o nichž je formulováno osm axiómů. Používá se množinová symbolika. Dále je probírán pojem „mezi" na přímce, jednoduché geometrické obrazce jako trojúhelník a kružnice. Geometrie končí výkladem o obecných křivkách, zejména jednoduchých uzavřených křivkách. Přitom se probírají základy topologie roviny, zejména roztínání roviny křivkou na její vnitřek a vnějšek. Je zařazeno také měření v geometrii včetně obsahu a objemu základních geometrických útvarů (trojúhelník, rovnoběžník, hranol, kružnice a kruh, válec).

Z teorie množin jsou v první knize probrány základní množinové operace, prázdná množina a vzájemně jednoznačné zobrazení a korespondence. Množinové operace průnik a sjednocení jsou probrány zcela obecně v kapitole o geometrii. První knihu uzavírají dvě kapitoly týkající se použití matematiky jednak v obchodě (procentování, úroky), jednak ve fyzice.

Druhý díl obsahuje tyto kapitoly: 1. Kladná a záporná racionální čísla. 2. Rovnice a nerovnice. 3. Souřadnice v rovině; Pythagorova věta. 4. Geometrické konstrukce. 5. Měření. 6. Reálná čísla; iracionální čísla. 7. Nemetrická geometrie. 8. Povrchy a objemy. 9. Přímá a nepřímá úměrnost; trigonometrické poměry. 10. Koule. 11. Uspořádání a výběr; pravděpodobnost. 12. Matematika peněz a zisku. 13. Matematika ve světě vědy.

V aritmetice (popř. algebře) je budován obor reálných čísel tak, že se nejdříve rozšíří obor nezáporných racionálních čísel o záporná racionální čísla. Při tom se důsledně rozlišuje + a − jako znaménko operace a znaménko udávající kladnost nebo zápornost reálného čísla (podobně jako LANDAU v knize *Grundlagen der Analysis* pro reálná čísla). Existence iracionálních čísel se dokazuje geometricky obvyklým způsobem. Při výkladu o reálných číslech se opakují vlastnosti množiny celých a množiny racionálních čísel, přičemž jsou zdůrazněny ty vlastnosti, které z celých čísel tvoří uspořádaný okruh a z racionálních čísel hustě uspořádanou množinu. Výklad je zakončen vypsáním vlastností reálných čísel, které ukazují, že reálná čísla tvoří spojitě uspořádané těleso.

Kapitola o rovnicích a nerovnicích začíná poměrně obsáhlým výkladem o predikátech, nazývaných zde *open sentence*. Například se píše: $- < 4$ a brzy se začíná místo pomlčky psát písmeno, většinou x. Předpokládá se, že proměnná může nabývat jen hodnot z nějaké specifikované množiny.

V geometrii se zavedou pravoúhlé souřadnice a pomocí nich se popisují řešení rovnic a nerovnic. Jedna kapitola je věnována konstrukcím pomocí pravítka a kružítka. V kapitole VII jsou vyloženy základy teorie simplexů a dvojrozměrných a trojrozměrných mnohostěnů. Speciálně jsou studovány pravidelné mnohostěny a jejich sítě a je ověřována Eulerova věta. Pokračuje se ve výkladu obsahů a objemů; jedna kapitola je věnována kouli. Při výkladu trigonometrie pravoúhlého trojúhelníka se nejprve studuje funkce tg α a potom ostatní funkce.

Kapitola XI obsahuje základy kombinatoriky; obecné vzorce jsou předkládány k věření jen po zkoušce na několika příkladech.

V odstavcích *Honor work* jsou probrána tato témata: hlubší poznatky z teorie množin, základní fakta o diofantovských rovnicích, řetězové zlomky, různé hříčky (například zobecněné domino) a jiné.

V celém kursu je mnoho cvičení numerického charakteru s důrazem na slovní vyjadřování.

Jak je vidět z podaného obsahu obou dílů *Mathematics*, modernizační prvky se projevují ve výběru látky, v potlačení konstrukčních úloh, ve zdůraznění topologických pojmů v geometrii, ve snaze formálně zachytit algebraické vlastnosti číselných oborů. Naproti tomu, jak už bylo poznamenáno, deduktivních postupů se užívá zcela minimálně; obecné závěry se dělají z několika málo speciálních příkladů a jednou z nejčastějších frází obou knih je: „Souhlasíte, že...?" K nesporným přednostem obou knih patří jejich vynikající grafická úroveň.

Myslím, že bychom mohli těchto knih využít jako zdroje nových příkladů, jako ukázky výkladu zcela netradiční látky (zvláště v odstavcích *Honor work*) a toho, jak se v úvodech k jednotlivým kapitolám ukazuje bohatost matematiky a přírodních věd vůbec.

Na tyto knihy navazují Algebra a Algebra a trigonometrie. Kniha Algebra obsahuje proti předešlým v podstatě jen tyto nové oddíly: polynomy, systémy lineárních rovnic, kvadratické funkce. Algebraická témata dříve probraná, tj. číselné obory, případně trigonometrie, jsou zopakována a rozšířena celkem nepodstatně. Ani v této knize není uplatněna deduktivní metoda. V kapitole o kvadratické rovnici se podrobně studuje parabola, zmínka je i o grafech polynomů vyššího stupně.

Algebra a trigonometrie v podstatě zahrnuje opět všechnu dosavadní látku, navíc obsahuje ucelený výklad trigonometrie, zavedení komplexních čísel, dále kuželosečky, systémy rovnic o třech neznámých včetně nelineárních, logaritmy a posloupnosti a řady. Pojem limity posloupnosti je popsán zcela intuitivně. Úvodní kapitola obsahuje paragraf nazvaný Logická struktura, kde se neformálním způsobem vysvětlují základní logické funktory. V knize se od začátku objevují důkazy. Struktura výkladu je doplněna tzv. *library work*, kde studenti mají za úkol podle uvedené literatury zpracovat určité téma. Příkladem takové úlohy je tento text:

Řetězové zlomky jako

$$G = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

zajímají matematiky už po čtyři sta let. Jsou dnes velmi důležité, poněvadž objasňují povahu racionálních i iracionálních čísel.

Napište krátkou práci o tomto tématu ukazující například, že každé racionální číslo může být vyjádřeno jako jednoduchý řetězový zlomek.

Literatura: Freitag H. T. and Freitag, A. H., The Number Story. Washington, D. C., National Council of Teachers of Mathematics, 1960, pp. 60–69.

Olds, C. D., Continued Fractions. New York, Random House, 1962, pp. 5–19.

Reichmann, W. J., The Fascination of Numbers. New York, Oxford University Press, 1957, pp. 112–124.

V kapitole o komplexních číslech je zaveden pojem vektoru jako orientované úsečky, avšak goniometrický tvar komplexního čísla není uveden. Zhruba je možné říci, že oba díly algebry jsou svým výkladem tradiční (v našem pohledu).

Na závěr poznamenávám, že všechny knihy, o kterých byla řeč v tomto článku, jsou čtenáři k dispozici v Pedagogické knihovně v Brně.

Vím velmi dobře, že určitý stupeň přesnosti je ve vyučování důležitý, neboť by studenti měli být schopni pochopit, co je důkaz. Přesto je mnohem důležitější zdůraznit základní ideje a pěstovat studentovu intuici. Nevíme ovšem, co vytváří intuici. Dokonce i to, co je intuitivně zřejmé, může být předmětem velké polemiky.

Víte, že oblíbené slovo matematika je slovo „triviální", což je zkrácený způsob, jak říci „intuitivně zřejmé". Existuje nekonečně mnoho příhod o slově „triviální". Mou oblíbenou historkou je jedna o matematikovi, který na přednášce tvrdil, že výsledek je triviální. Jeden z jeho kolegů to odmítl, a tak se pustili do diskuse, která trvala až do konce přednášky. Studenti tiše odešli, a oba matematici se vehementně přeli více než dvě hodiny. Když nakonec vyšli ven, studenti se dychtivě ptali vyzyvatele na výsledek. Odpověděl: „Měl pravdu. Je to triviální".

*

Ačkoliv tvrdím, že přesnost není nezbytná ve většině středoškolské matematiky, zcela odlišně smýšlím o abstrakci, která je s ní v mnoha případech (trochu náhodně) spojena. Matematika je ve své podstatě abstraktní. Síla abstrakce umožnila lidstvu vyrůst nad nižší tvory. Schopnost abstrakce bychom měli ve studentech rozvíjet co nejdříve.

Existuje názor, že jediným způsobem, jak učit abstrakci, je vzít abstraktní systém axiómů a rozvíjet ho v detailech. Je to vhodný postup, já ho nekritizuji, ale není to jediný způsob, jak rozvíjet cit pro abstrakci. Abstrakce by měla začínat z prostých, konkrétních příkladů. Idea může být abstraktní, a přesto vysoce intuitivní.

*

Ať si myslíte cokoliv o mém názoru na přesnost, intuici a abstrakci, doufám, že máme jeden společný cíl — rozvinout v studentech co nejdříve schopnost vytvářet nové ideje. Soudím, že schopní studenti potřebují pouze lehké vedení, zvláště když jste tak šťastni, že máte skupiny, kam jste vybrali dobré studenty. Jsou-li mezi sobě rovnými, mohou být povzbuzeni k volnému tvoření myšlenek, i když určitá míra vedení je i zde velmi důležitá.

*

Myslím, že ve všech oblastech jsme povinni povzbuzovat tvořivou snahu svých studentů. V matematice je velkou výhodou, že můžeme přivést studenty k tvořivé práci v poměrně nízkém věku. V matematice existují významné příspěvky lidí, kteří nedosáhli dvaceti let. I když se vaši studenti nechystají tvořivě pracovat, ať se pokusí př jít na něco, co možná nebude nové pro matematický svět, ale bude to nové pro ně, něco, co nedostali jako pokrm, ale co poctivě objevili pro sebe především, něco, co jste sami dosud neslyšeli. Vím, že je to zpočátku nepříjemné, aby studenti věděli něco, co vy nevíte, ale největším úspěchem učitele je, umožní-li svým studentům, aby ho předčili.