

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jan Vyšín

Matematická meta olympiáda

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 19 (1974), No. 3, 167

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139696>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1974

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Matematická ^{meta}olympiáda

Otiskujeme třetí čtveřici úloh 3. ročníku této soutěže.

Úloha 33. Dokažte, že ke každému přirozenému číslu n lze nalézt přirozené číslo, jehož dekadické vyjádření obsahuje jen cifry 1, 2 a které je násobkem čísla 2^n .

Úloha 34. Určete všechny polynommické funkce, které splňují podmínku

$$(\forall x) f(2x) = f'(x) \cdot f''(x).$$

Úloha 35. V rovině je dáno 6 bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Pak lze mezi nimi najít tři takové, že jimi daný trojúhelník má aspoň jeden vnitřní úhel velikosti $\leq 30^\circ$. Dokažte a rozvedte v problémovou situaci.

Úloha 36. Sestavte plán vyučovací hodiny, v které seznámíte 16leté žáky s tematikou funkce „celá část“ (znak $[\]$) a funkcí z ní odvozených. Naznačte řešení aspoň jedné rovnice obsahující takové výrazy jako např. $[2x - 1]$.

Metodicky zpracovaná řešení zašlete redakci PMFA nejpozději do konce srpna 1974.

Jan Vyšín

Fyzikální ^{meta}olympiáda

Úlohy k řešení:

• **T 9:** Doba kmitu matematického kyvadla je rovna $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ za předpokladu že kyvadlo koná jednoduchý pohyb kmitavý, tj. $\varphi \doteq \sin \varphi$ (φ měřeno v radiánech).

a) Určete relativní chybu pro výchylku $\varphi < 5^\circ$.

b) Kyvadlo bylo vychýleno o úhel $\alpha = 30^\circ$. Určete, jak se změnila doba kmitu.

• **T 10:** Označme hmotnost paliva v raketě m_p a hmotnost užitečného nákladu m_n ; celková hmotnost je $m_0 = m_n + m_p$. Označme dále $z = m_p/m_n$.

a) Dokažte, že účinnost rakety je

$$\eta = \alpha \cdot \frac{m_n}{m_0 - m_n} \cdot \ln^2 \frac{m_0}{m_n}$$

nebo

$$\eta = \alpha \frac{1}{z} \ln^2 (1 + z).$$