Karel Winkelbauer

O základních pojmech kybernetiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 21 (1976), No. 3, 149--150,151--155

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139711

novým narodila v Pise dcera Ida. O rok později onemocněl Riemann žloutenkou a téhož roku zemřela jeho sestra Helena.

Stále toužil po návratu k tvůrčí práci a stýskalo se mu po Göttingen, byl ale příliš sláb. Nabízené místo profesora v Pise nepřijal, hlavně ze zdravotních důvodů. Na radu lékařů zůstal v Itálii přes další zimu. V létě 1865 se jeho stav ještě zhoršil, přesto však se v říjnu vrátil do Göttingen. Dokončil práci o ζ - funkci a předal svému žáku HATTENDORFFOVI rozpracované pojednání o minimálních plochách. Zákeřná choroba stále více oslabovala jeho tělo, a tak se v červnu 1866 vydal potřetí do Itálie. Válkou zničené tratě velmi komplikovaly cestu — Riemann přijel k Lago Maggiore zcela vyčerpán. Tam tiše zesnul 20. června 1866 v Selasce.

Zemřel obklopen svými drahými, uprostřed ohromného množství nápadů a plánů, zemřel klidně a odevzdaně, tak jak žil — byl skromný, tichý, samotářský, navenek někdy nemotorný a melancholický. Byl věřící člověk a svůj život zasvětil královně věd, které neúnavně a oddaně sloužil až do smrti. Zemřel příliš brzo — jako ABEL, GALOIS, URYSON a jiní. Dokázal přesto silně ovlivnit vývoj matematiky a svým následovníkům zanechat neřešitelný problém: Jak by se vyvíjela matematika, kdyby žil o 20 let déle?

Literatura

[1] E. T. BELL: *Men of Mathematics*, vol. 2, Penguin Books, 1965.
[2] T. HAWKINS: *Lebesgue's Theory of Integration*, The University of Wisconsin Press, Madison, 1970.
[3] O. D. KELLOG: *Foundations of Potential Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1929.
[4] M. KLINE: *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, London, 1972.
[5] A. I. MARKUŠEVIČ: *Očerki po istorii těorii analitičeskich funkcij*, GITTL, Moskva, 1951.
[6] B. RIEMANN: *Gesammelte Mathematische Werke*, Teubner, Leipzig, 1876 (ruský překlad Moskva, 1948).
[7] J. L. WALSH: *History of the Riemann mapping theorem*, Amer. Math. Monthly *80* (1973), 270—276.

O základních pojmech kybernetiky

Referát přednesený na 11. celostátní konferenci o matematice na VŠTEZ, konané ve dnech 28.—31. srpna 1975 v Brně

Karel Winkelbauer, Praha

Můj úkol proslovit na této konferenci úvodní přednášku o základních pojmech kybernetiky mě staví do postavení velmi nesnadného. Jde o úlohu nejméně tak obtížnou, jako je úloha této konference zvládnout obsáhlé téma o postavení matematiky v kybernetice a v automatizovaných systémech řízení.

Máme-li mluvit o základních pojmech kybernetiky, musíme mít představu o tom, co to kybernetika je. Vznik kybernetiky byl historicky podmíněn vznikem automatizovaných systémů řízení, jejichž první teorii vypracoval zakladatel kybernetiky NORBERT WIENER. Jeho zásluhou byly zobecněny myšlenky teorie automatické regulace. Shrnul je v jednotnou soustavu, kterou nazval kybernetikou.

Na otázku, co je kybernetika, bych se vůbec neodvážil odpovídat, aby mi někdo nevytkl, že jsem něco opomněl, nebo naopak něco přidal, co podle názoru jiných do kybernetiky nepatří. Pro úvod do kybernetiky je vhodné si uvědomit to, že kybernetika není jediný vědní obor.

Kybernetika dnes představuje dosti pestrou sbírku matematických teorií, z nichž některé se již konstituovaly v rozsáhlé matematické disciplíny, např. teorie informace, teorie automatické regulace, teorie strategických her, statistického rozhodování (a rozhodování vůbec), teorie automatů a řada dalších.

To, co tyto matematické teorie spojuje a tím určuje interdisciplinární charakter kybernetiky, je soubor idejí, principů a metod, jež se opírají o jednotící hledisko, které lze v prvním přiblížení vyjádřit tezí: Kybernetika studuje přírodní procesy z hlediska, že mohou nést informaci.

Je to tedy nepochybně pojem informace, který je jedním z nejzákladnějších pojmů kybernetiky. Proto obtížný problém, jak v poměrně krátkém referátu pojednat o základních pojmech kybernetiky, budeme řešit tak, že se ve výkladu omezíme jen na pojem informace, a to pouze na objasnění základních aspektů tohoto pojmu.

Pozn. Z toho, co bylo řečeno, je patrné, že kybernetiku lze chápat spíše jako metodu než jako vědecký obor. Totéž se ovšem tvrdí i o samotné matematice. Souhrn kybernetických disciplín je srovnatelný se souhrnem matematických teorií ve fyzice, takže kybernetiku lze srovnávat s matematickou fyzikou.

Vraťme se ještě k otázce, co je kybernetika. Wiener ji charakterizoval jako nauku o řízení a sdělování v živých organismech a ve strojích (control and communication in the animal and the machine); dnes bychom spíše mluvili o řízení a sdělování v systémech, ať již fyzikálních, technických, biologických či jiných. Je zvykem hovořit o regulaci (angl. control) a komunikaci v kybernetických systémech, kde adjektivum „kybernetický" má charakterizovat hledisko, z něhož tyto systémy posuzujeme. My budeme raději hovořit o fyzikálních systémech, kde adjektivum „fyzikální" bereme ve smyslu co nejširším (tj. systém pozorovatelný v reálném světě).

Řízení a sdělování chápeme jako vzájemné působení dvou (nebo více) fyzikálních systémů, vyšetřované nikoli z hlediska energetické nebo látkové bilance, nýbrž z hlediska bilance informační. Jde nám tedy při interakci dvou systémů nikoli např. o výměnu energie, ale o výměnu informace mezi oběma systémy. Přitom se pod pojmem informace rozumí fyzikální veličina, která je v uvedeném smyslu srovnatelná např. s energií. A jako fyzikové nemohou obecně říci, co je to energie, nemůžeme ani my říci, co je to informace, aniž vytvoříme vhodnou abstrakcí matematický model zachycující příslušný výsek reálného světa. V rámci určitého matematického modelu, nebo mluveno bourbakisticky, v rámci matematické struktury jistého typu pak tvoříme formální definici informace tak, aby zachycovala naše intuitivní představy o tomto pojmu. Aplikací vytvořeného modelu na adekvátní reálné jevy pak dospějeme k číselnému vyjádření této veličiny.

Vzájemná interakce mezi dvěma fyzikálními systémy, při níž posuzujeme informační bilanci ze stanoviska jen jednoho z nich, a to pevně zvoleného, tvoří případ unilaterální komunikace (přenos informace v jednom směru, a to ve směru ke zvolenému systému). Pro zvolený systém představuje druhý systém tzv. zdroj informace. Řízení můžeme chápat v prvním přiblížení jako bilaterální komunikaci, v níž jde o přenos informace v obou směrech.

Pozn. Vlastní matematický obor, který se zabývá jen přenosem informace v jejím ryzím pojetí, tj. jako výsledek interakce dvou systémů, je znám pod názvem teorie informace. Cílem této matematické teorie je proniknout do podstaty vzájemného působení systémů, při němž se uplatňují vedle vlastního pojmu informace takové pojmy, jako je např. transformování informace (kódování, přenos spojený se šumem, dekódování, identifikace) a její konzervace (paměť). Na druhé straně s pojmem řízení, resp. regulace, je spojen vedle procesu vznikajícího interakcí systémů ještě tzv. rozhodovací proces (zpracování informace): interakce mezi oběma těmito procesy způsobuje pak tzv. zpětnou vazbu.

Z našich úvah plyne zjednodušené pojetí, že interakce mezi dvěma fyzikálními systémy je z hlediska výměny informace komunikací v širším smyslu. Výsledkem této interakce je přírodní proces (tj. fyzikální proces v širším smyslu slova), který z informačního stanoviska chápeme jako nosič informace. Nosiči informace se obvykle říká signál nebo zpráva. V současné terminologii je tendence nazývat zprávou (nebo určitěji výstupní zprávou) jen signál, který přichází bezprostředně od některého zdroje informace.

O tom, co je zpráva nebo signál, má jistě každý z nás svou více nebo méně konkrétní představu. Pokusme se nyní své představy konfrontovat s našimi abstraktními úvahami. Abychom dosáhli co největší jednoduchosti v dalším výkladu, omezme se na případy unilaterální komunikace, s nimiž se např. setkáváme ve sdělovací technice.

Jako příklad vezmeme televizní signál na počátku jeho vzniku, tj. před jeho dopravou k televizním přijímačům. Fyzikální systém, k němuž směřuje informace, je v tomto případě televizní kamera. Tento systém je v interakci se systémem představujícím zdroj informace, jímž je prostě zorné pole objektivu televizní kamery. Popišme si v hlavních rysech proces, který je nosičem informace.

V televizní kameře se obraz zachycený objektivem rozloží na $k = 625$ řádků a každý řádek na $l = 833$ bodů. Elektronový paprsek „ohmatá" každý z těchto bodů a „zapamatuje si" stupeň jasu každého z nich, a to vše během $1/25$ vteřiny ($m = 25$). Při nejjednodušší klasifikaci každého bodu podle jasu na tři stupně (černý, šedivý, bílý) dostaneme na výstupu z televizní kamery v diskrétních časových okamžicích vzdálených od sebe $1/N$ sekundy, kde $N = k \,.\, l \,.\, m$, jeden ze tří vhodně zvolených impulsů odpovídajících příslušným stupňům jasu. Co se děje dále, to už nebudeme brát v úvahu. Namísto toho provedeme rozbor tohoto procesu představujícího vstupní televizní signál.

Nejprve si označme jako S množinu všech stupňů jasu, která se zde skládá ze tří prvků. Prvky množiny S nazveme symboly. Symboly tedy reprezentují jakési elementární nosiče informace. Množina S všech možných symbolů se nazývá repertoár, ale častější název v teorii informace je prostě abeceda, přesněji abeceda informačního zdroje, a její prvky jsou písmena.

Za $1/25$ sekundy generuje zorné pole, tj. zdroj informace, $k \,.\, l$-člennou posloupnost z množiny S, tedy prvek ležící v S^q, kde jsme položili $q = k \,.\, l$. Množina S^q se de facto skládá ze všech možných „okamžitých" stavů zorného pole a důslednější by bylo vzít v našich úvahách za abecedu zdroje právě tuto množinu všech q-členných posloupností původních symbolů ležících v S. V této fázi výkladu lze konstatovat, že za dosti obecných předpokladů vyslovených v rámci budované matematické teorie (jež jsou v případě televizního signálu s dostatečnou přesností splněny) v podstatě nezáleží na tom,vyjdeme-li v našich úvahách z repretoáru S nebo z repertoáru S^q; bude totiž platit vztah, že množství informace nesené procesem (představujícím výsledek interakce s informačním zdrojem) je při repretoáru S^q právě q-násobkem množství informace, které odpovídá repertoáru S (jde o fakt matematicky netriviální).

Všimněme si nyní, že např. televizní signál, trvající právě jednu hodinu, je fyzikální proces, jehož realizace je matematicky popsána jako (25.3600)-členná posloupnost „stavů" zorného pole patřících do repertoáru S^q neboli jako prvek množiny S^n, kde $n = 60^2\, k\,.\,l\,.\,m$. O množině S^n mluvíme jako o prostoru zpráv délky n (je-li S abeceda zdroje) nebo jako o prostoru n-rozměrných signálů. Názorně řečeno, matematický popis televizního signálu zachycuje právě to, co je relevantní pro přenos televizního obrazu z hlediska rozlišovacích schopností lidského zraku. Z matematického stanoviska je ovšem výhodné, že tu jde právě o konečné posloupnosti prvků z konečné množiny.

Abstrahujme na okamžik od délky zpráv, položme $Z = S^n$, a zkoumejme otázku, v jakém smyslu je jakákoliv zpráva $z \in Z$ nosičem informace. Uvažujme takto: Před získáním informace víme jenom tolik, že zpráva, kterou dostaneme, leží v množině Z; získání informace záleží v tom, že se dozvíme, který prvek z množiny zpráv Z se realizoval. Intuitivně je jasné, že získané množství informace nezávisí na tom, jak „vypadají" prvky množiny Z; vyjádřeno matematicky, množství informace musí být číselnou funkcí kardinálního čísla množiny zpráv (stále předpokládáme, že Z je konečná množina). Nic nebrání tomu, abychom za množství informace získané realizací zprávy z množiny Z všech apriori možných zpráv považovali prostě číslo vyjadřující počet prvků množiny Z.

Vezměme však v úvahu ještě další okolnosti. Předně obsahuje-li množina Z právě jeden prvek, pak realizací zprávy z množiny Z nezískáme fakticky žádnou další informaci. Za druhé jsou-li zprávy z množiny Z psány jako posloupnosti dvojic písmen ze dvou abeced (např. jde-li o barevný televizní signál, jsou to dvojice (stupeň jasu, barva)), nebo obecněji, je-li $Z = Z_1 \times Z_2$, můžeme vyslovit matematicky rozumný požadavek, aby se množství informace chovalo v tomto případě aditivně; představuje-li f číselnou funkci na třídě všech konečných neprázdných množin, lze tento požadavek vyslovit ve tvaru:

$$f(Z_1 \times Z_2) = f(Z_1) + f(Z_2)\,.$$

Snadno nahlédneme, že všem předcházejícím požadavkům odpovídá funkce

$$f(Z) = \log(\mathrm{card}\, Z)\,.$$

Smluvíme-li se navíc, aby minimálnímu repertoáru nesoucímu faktickou informaci, tj. takovému, že card $Z = 2$, odpovídalo jednotkové množství informace, obdržíme jako bázi logaritmů číslo 2; to znamená, že informace bude číselně vyjádřena v bitech. Poznamenejme na okraj, že výše definovaná funkce f pro množství informace se v literatuře nazývá Hartleyova funkce.

Vraťme se opět k našemu příkladu televizního signálu jako prvku z množiny $Z = S^n$. Uvědomíme-li si, že televizní signál je vlastně lineární posloupnost různě se střídajících černých, šedých a bílých bodů, nepřekvapí nás skutečnost, jak slabá je vazba mezi sémantickým obsahem zprávy (obraz zorného pole) a její fyzikální realizací. Tato vazba se v jistém smyslu přece jen projeví, a to zákonitostmi pravděpodobnostního charakteru. Přitom tyto zákonitosti v podstatě nezávisí na tom, odehrává-li se v zorném poli televizní kamery sportovní utkání nebo divadelní představení.

Chceme-li tuto slabou vazbu zachytit v naší jednoduché teorii, musíme každé zprávě $z \in Z$ přiřadit ještě pravděpodobnost jejího výskytu; označme ji $p(z)$. Elementární pravděpodobnost p jako funkce na Z, nabývající nezáporných hodnot a splňující podmínku

$$\sum_{z \in Z} p(z) = 1\,,$$

tedy je další nutnou charakteristikou zprávy, resp. signálu jako nosiče informace.

Provedeme nyní modifikaci námi zavedeného pojmu množství informace jako Hartleyovy funkce v rámci doplněné teorie. Bylo dávnou snahou sdělovacích techniků nahradit pro přenos příliš rozsáhlou množinu zpráv $Z = S^n$ při velkém n nějakou vhodně zvolenou menší množinou $E \subset S^n$, aby se dosáhlo větší spolehlivosti přenosu. A byl to právě průkopník teorie informace G. SHANNON, který jako první využil k této aproximaci původní množiny Z pravděpodobnostní charakteristiky signálu. Jeho myšlenku nyní rozvedeme. Zvolme číslo ε, představující horní hranici pravděpodobnosti chyby, kterou jsme ochotni tolerovat při této aproximaci, a nahraďme původní množinu Z některou její podmnožinou E, jejíž pravděpodobnost

$$p(E) = \sum_{z \in Z} p(z)$$

překročí číslo $1 - \varepsilon$, a to takovou, která má co nejmenší počet prvků. Logaritmus čísla (při základu 2)

$$N(\varepsilon) = \min \{\text{card}\, E : E \subset Z,\, p(E) > 1 - \varepsilon\}$$

pak prohlásíme za ε-aproximaci množství informace neseného signálem charakterizovaným elementárním pravděpodobnostním polem (Z, p).

Nám půjde o původní problém, kde $Z = S^n$ s měnícím se n, tj. s proměnnou délkou zpráv. Píšeme-li pro tento případ $N_n(\varepsilon)$ místo $N(\varepsilon)$, abychom vyjádřili závislost na délce zpráv, lze konstatovat, že rozumné je srovnávat mezi sebou pro různá n jen podíly

$$\frac{\log N_n(\varepsilon)}{\log (\text{card}\, S^n)} = \frac{1}{n} \log N_n(\varepsilon)\,.\,\text{konst}\,;$$

přitom číslo $(1/n) \log N_n(\varepsilon)$ představuje ε-aproximaci množství informace neseného n-rozměrným signálem vzatou na jeden symbol.

Za velmi obecných předpokladů na pravděpodobnostní distribuci signálu jako náhodného procesu lze dokázat, že (1) posloupnost $(1/n) \log N_n(\varepsilon)$ konverguje pro každé ε $(0 < \varepsilon < 1)$ a že (2) tato limita je nezávislá na ε; označme ji H. Číslo H lze interpretovat jako množství informace, které nese jeden symbol obsažený v daném signálu. Veličině H přiřazené signálu shora uvedeným způsobem se v teorii informace říká entropie (přesněji, entropie informačního zdroje).

Zvláště jednoduchý případ nastává, když zdroj informace generuje symboly skládající signál stochasticky nezávisle, tj. když elementární pravděpodobnostní pole (S^n, p_n) charakterizující n-rozměrný signál, je vytvořeno z jednorozměrného pravděpodobnostního pole (S, p) podle vztahu

$$p_n(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \prod_{i=1}^{n} p(s_i) .$$

V tomto případě lze entropii H vyjádřit jednoduchou a dobře známou formulí

$$H = \sum_{s \in S} p(s) \log \frac{1}{p(s)} .$$

Pozn. Správnost předcházejícího vzorce lze intuitivně ověřit touto úvahou: Poněvadž

$$p_n(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \prod_{s \in S} [p(s)]^{N(s)} ,$$

kde $N(s)$ je četnost výskytu symbolu s v posloupnosti $s_1, s_2, \ldots, s_n$, dostaneme na základě tzv. slabého zákona velkých čísel, že pro dostatečně velké n platí přibližně rovnost $N(s) = n\,p(s)$ s výjimkou jisté části množiny S^n, jejíž pravděpodobnost je zanedbatelně malá, tedy jistě menší než dané ε. Počet prvků v množině, kde tato rovnost platí pro každé s, je přibližně roven téměř číslu

$$\frac{1}{\prod_{s \in S} [p(s)]^{n p(s)}} ,$$

neboť součet pravděpodobností jednotlivých prvků ležících v této množině je téměř roven jedné. Máme tedy:

$$\frac{1}{n} \log N_n(\varepsilon) \doteq - \frac{1}{n} \log \prod_{s \in S} [p(s)]^{n\,p(s)} = - \sum_{s \in S} p(s) \log p(s) .$$

Precizace této úvahy vede k formálnímu důkazu hořejší formule pro entropii, i když její provedení je matematicky poměrně pracné.

Vyvoďme nyní z našich úvah některé závěry. Pro kybernetiku je především typické nedeterministické pojetí našeho světa, které lze zhruba charakterizovat tím, že náš svět je jednou z možných realizací náhodného procesu, takže jeho budoucnost je podmíněna jeho minulostí jen ve stochastickém smyslu. Toto wienerovské pojetí stojí zdánlivě v rozporu s tím, že rozsáhlé partie kybernetiky dosud zpracované v literatuře vycházejí z deterministického aspektu základních myšlenek, jež kybernetika přinesla vývoji vědy. Toto deterministické pojetí, jakýsi průmět kybernetických idejí do deterministické roviny, idejí, které vedle „deterministické“ šíře mají ještě „pravděpodobnostní“ hloubku, nejvíce proniklo do popularizačních výkladů kybernetiky, když se ukázalo, že wienerovské pojetí je běžnému čtenáři těžko dostupné bez speciální přípravy. Není jistě přehnané tvrzení, že v současné době většině těch, kteří jsou upřímně přesvědčeni, že aplikují obecné myšlenky kybernetiky ve svém oboru, je pravděpodobnostní pojetí kybernetiky cizí.

V našem výkladu jsme deterministického přístupu použili při zavedení Hartleyovy funkce pro množství informace. Snadno se přesvědčíme, že Hartleyova funkce pro vyjádření množství informace je speciálním případem entropie, dosadíme-li do hořejšího vzorce pro entropii za $p(s)$ číslo

$$p(s) = \frac{1}{\text{card } S};$$

to znamená, že deterministický přístup odpovídá případu stejnoměrného diskrétního rozložení pravděpodobnosti, v němž každému symbolu (a též každému n-rozměrnému signálu) přisuzujeme stejnou pravděpodobnost výskytu. Jde tu o použití známého principu symetrie při nedostatečné znalosti reality. Ve všech konkrétních případech, v nichž figuruje deterministické pojetí kybernetických idejí, se lze přesvědčit, že bylo skrytě použito uvedeného principu symetrie.

Je zajímavé, že právě popularizace kybernetiky má velkou zásluhu na tom, že nematematikům uplatňujícím kybernetický způsob myšlení ve svém oboru umožnila vidět svět „brýlemi" matematických struktur, tj. vytvářet matematické modely té „své" reality, a tím leckdy dospět k nečekaným výsledkům ve vlastní práci. Jak vím ze styku s těmito „uživateli" kybernetiky, právě toto vytváření abstraktních modelů je na kybernetice nejvíce fascinuje.

Shrňme závěrem: Kybernetický způsob myšlení je zdrojem vytváření matematických modelů jistých specifických rysů nás obklopující reality. Pokusili jsme se vyložit použití tohoto způsobu myšlení při zavedení nejzákladnějšího pojmu kybernetiky, totiž pojmu informace, a to jak na deterministické, tak i na nedeterministické úrovni. Učinili jsme to jenom pro zdroje informace, i když typičtějším a zásadně důležitějším je pojem informace pro sdělovací kanály.

Cílem našeho elementárního výkladu bylo ukázat aspoň na jednom případě použití základních kybernetických idejí. Kritickému čtenáři se autor omlouvá, že nepřetlumočil mluvený projev v dostatečně výstižně psané slovo.

V současné praxi hrají výjimečnou roli výpočetní prostředky. Žáci se musí seznámit s idejemi, které jsou základem soudobé početní techniky. Není třeba, aby ze školy vycházeli programátoři, ale je absolutně nutné, aby střední vzdělání dávalo aspoň obecnou představu o možnostech současné početní techniky a o abecedě programování, které těsně souvisí s logickým vzděláním studenta. Bez logicky přesného myšlení nelze sestavit dobrý program pro elektrické počítací stroje. To je důvod, proč současné programování nutně vyžaduje stálou pozornost k logickému vzdělání žáka. Takové vzdělání má velký polytechnický význam, protože logické návyky získané ve škole budou krajně nutné v další praktické práci při sběru a zpracování informací, při hledání poruch ve složitých technických systémech, při řízení technologických procesů a sestavování odpovídajících matematických modelů.

G. V. Gnedenko