4. PETER PREŠNAJDER, katedra teoretické fyziky Univerzity Komenského, za soubor prací:

General optimized data representation by an analytic function, Lettere al nuovo cimento *5* (1972), 520—524.
Convergent expansions of pion-pion and pion-nucleon scattering amplitudes in two complex variables, (přijato do Acta F. R. N. Univ. Comenianae Phys.).
Stable representation of data by analytic functions, Proceedings of the second international symposium in high energy and elementary particle physics 1972, 309—318.

Bernhard Riemann

(Ke stopadesátému výročí narození)

Ivan Netuka, Jiří Veselý, Praha

Procházíte-li v knihovně podél polic, stěží přehlédnete sebrané spisy slavných matematiků jako byli L. EULER (asi 70 svazků), A. CAUCHY (26 svazků) nebo C. F. GAUSS (12 svazků). Mohli byste však přehlédnout nevelkou asi pětisetstránkovou knihu obsahující životní dílo RIEMANNOVO. Zvážíme-li však nesmírnou myšlenkovou hloubku a bohatost jeho objevů, jejich originalitu a tematickou různorodost a uvážíme-li, že jsou to plody přibližně patnáctiletého tvůrčího období, dospějeme jistě k závěru, že Riemann zaujímá v historii matematiky naprosto výjimečné místo.

Riemann bývá často považován za „čistého matematika", ale spíše opak je pravda. Je všeobecně známo, že značně rozšířil hranice matematického poznání, zajímal se však hluboce i o fyziku a vztah matematiky k fyzikální realitě. Jistě se nelze nezmínit o jeho pracích z geometrie (metrické i topologické aspekty), o funkcích komplexní proměnné, o diferenciálních rovnicích, trigonometrických řadách a integrálu nebo o eliptických a Abelových funkcích, o rozložení prvočísel, konformním zobrazení, o hypergeometrických řadách a minimálních plochách; je však nutné připomenout i práce o vedení tepla, o teorii plynů, o magnetismu a statické elektřině, světle, akustice nebo o stavbě oka a ucha a o filozofických otázkách přírodních věd. Slavný německý matematik F. KLEIN řekl na začátku tohoto století, že nikdo jiný neměl tak rozhodující vliv na současnou matematiku, jako Riemann. Další vývoj ještě zdůraznil význam Riemannových idejí.

Bernhard Riemann se narodil 17. září 1826 ve vesničce Breselenz (nyní NSR) v rodině luteránského pastora. Základy vzdělání získal od svého otce. Pozdějšímu svému učiteli počtů a geometrie působil trampoty svou bystrostí. Bohatý rodinný život (Riemann měl pět sourozenců) a hezké prostředí domova tvořily jeho citové zázemí a láska k rodině ho provázela po celý život. R. 1840 odešel z domova k babičce do Hannoveru, kde navštěvoval dva roky gymnázium; po babiččině smrti studoval dále v Lüneburgu. Cesty odtud pěšky domů, kterých se nechtěl zříci, ho dosti unavovaly a byly doprovázeny prvými zdravotními obtížemi.

Riemann vynikal v matematice již na gymnáziu a doslova hltal knihy a vědecké práce, které mu dával ředitel školy SCHMALFUSS k soukromému studiu. Když mu zapůjčil LEGENDREOVU více než osmisetstránkovou *Teorii čísel* a ptal se po šesti dnech, kam se až dostal, odpověděl Riemann: „Je to opravdu báječná kniha, zvládl jsem ji".

Ve dvaceti letech se Riemann na otcovo přání zapsal na göttingenské univerzitě jako student filozofie a teologie. Navštěvoval však i přednášky z matematiky a v krátké době se po svolení otce plně věnoval jejímu studiu. Gaussovy přednášky mu již nedávaly mnoho nového a tak r. 1847 odchází na berlínskou univerzitu. Jeho učiteli byli P. DIRICHLET, C. JACOBI a J. STEINER; prožil tam r. 1848 i březnovou revoluci (byl členem studentského vojenského oddílu) a r. 1849 se vrátil zpět do Göttingen, kde od r. 1850 navštěvoval krátký čas seminář z matematické fyziky a pracoval přitom na své doktorské disertaci. Promoval v pětadvaceti letech a začal pracovat jako asistent u profesora W. WEBERA. Na počátku své pedagogické kariéry měl potíže, neboť musel zpomalovat tok svých myšlenek, aby mu jeho žáci rozuměli.

Po smrti Gaussově r. 1855 byl do Göttingen povolán P. Dirichlet; mluvilo se též o Riemannově jmenování mimořádným profesorem, došlo však jen ke zvýšení jeho platu na 200 tolarů (ročně). Téhož roku ztratil Riemann otce a sestru Kláru a tíhu starostí o rodinu převzal jeho starší bratr Wilhelm, poštovní úředník v Brémách, jehož plat byl královský ve srovnání s platem „ekonomicky bezcenného" matematika.

Riemann v té době pracoval zbaven rodinného zázemí s vypětím všech svých sil a jeho zdravotní stav se horšil. Odjel na zotavenou ke svému příteli do Harzu, kam za ním přijel i jeho kolega a jeden z nejlepších přátel R. DEDEKIND. I přes svou ostýchavost a uzavřenost získával Riemann oblibu ve společnosti. Po návratu do Göttingen byl jmenován r. 1857 mimořádným profesorem s platem 300 tolarů ročně. V té době mu zemřel bratr a krátce po něm sestra Marie – sestry Ida a Helena se přestěhovaly z Brém do Göttingen. V jejich přítomnosti se Riemann zotavoval a postupně získával novou chuť k práci. Nadcházelo nejhezčí období jeho života; bylo relativně krátké, bylo však prodchnuto intenzívní tvůrčí prací, která mu postupně získávala všeobecné uznání.

Napsat podrobný komentář k Riemannovu dílu v článku tohoto rozsahu není možné – sledování vývoje Riemannových myšlenek do dnešních dnů a hodnocení jejich významu by zabralo velkou část encyklopedie moderní matematiky. Vždyť jen jeho obrovský přínos pro geometrii by si zasloužil samostatný článek minimálně stejného rozsahu (zájemce odkazujeme např. na [4] a na ruský překlad jeho díla [6]). Čtenář nám proto musí odpustit, všimneme-li si na ukázku pouze několika vybraných výsledků.

Riemannovy práce jsou psány velmi hutně a nečtou se lehce ani dnes: důkazy jsou silně intuitivní, někdy neúplné, pokud zcela nescházejí; jsou často založeny na geometrických představách a bez váhání se v nich užívá fyzikální argumentace.

S Riemannem přichází nový pohled na teorii funkcí komplexní proměnné. Jeho doktorská disertace „*Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*" (1851; str. 3–43 v [6]) je základní prací pro teorii funkcí.

Pojem Riemannových ploch v této práci zavedených je dodnes předmětem velkého zájmu matematiků; Riemannova věta o konformním zobrazení se stala nepostradatelnou též pro fyziky i techniky a práce sama vyvolala zájem nejen o intenzívní studium komplexních funkcí, ale též o bádání v teorii potenciálu a teorii bodových množin. Topologické metody, které se v této práci objevují, tvoří zárodky moderní geometrie a topologie.

Počátky teorie funkcí komplexní proměnné sahají do druhé poloviny 17. století, kdy se u I. NEWTONA objevuje (formální) užití mocninných řad. V 18. století je známa Taylorova řada a v analýze se studují funkce definované pomocí integrálu. Komplexní čísla se objevují v roli nezávisle proměnné a u Eulera se v druhé polovině 18. století setkáváme se završením teorie elementárních funkcí komplexní proměnné. Začíná se pracovat i se speciálními funkcemi — J. d'ALEMBERT a L. EULER dospívají v souvislosti s úlohami hydromechaniky k soustavě parciálních diferenciálních rovnic

$$(*)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(známé dnes jako Cauchyovy-Riemannovy podmínky) a hledají její řešení jako reálnou a imaginární část analytické funkce.

Riemann považuje za základní a určující pro analytickou funkci $w = u + iv$ (proměnné $z = x + iy$) právě tuto soustavu (*) a na této vlastnosti analytických funkcí buduje celou teorii. Podle Dedekindova svědectví vznikly tyto pro Riemannovu životní dráhu tak důležité myšlenky o prázdninách r. 1847, kdy mu bylo 21 let. Riemann se však nezastavuje na této analytické definici a všímá si rovnic (*) též jako podmínek konformnosti zobrazení $z \to w$. Dospěl také k poznatku, že (reálné) funkce u, v vyhovují Laplaceově rovnici, a že jsou to tedy harmonické funkce, což mu umožnilo využít metod, které byly (pro trojrozměrný případ) známy v souvislosti s úlohami matematické fyziky. V Riemannově práci se (dvojrozměrná) Laplaceova rovnice stává základním kamenem celé teorie a teorie potenciálu zde slouží jako pracovní nástroj v teorii funkcí.

V těchto objevech byly velmi důležité fyzikální představy — Riemann např. vychází z fyzikálně zřejmého poznatku, že harmonická funkce je jednoznačně určena svými hraničními hodnotami. Zastavme se nyní na okamžik u Riemannova příspěvku k teorii konformního zobrazení (zhruba řečeno zobrazení, které je lokálně podobností). Obecný problém konformního zobrazení roviny (jehož původ souvisí s kreslením map) byl řešen Gaussem r. 1825, který v podstatě ukázal, že konformní zobrazení je zprostředkováno analytickou funkcí. To Riemann věděl a chtěl tento výsledek zobecnit v rámci své teorie. Na konci své disertace vyslovil větu (v obecnější formě pro Riemannovy plochy), jejímž speciálním případem je — dnes klasická — Riemannova věta: Jednoduše souvislou oblast D, jejíž doplněk obsahuje alespoň dva body, lze zobrazit prostě analytickou funkcí na jednotkový kruh.

Pro pochopení vývoje matematiky je vhodné si blíže všimnout (alespoň v jednoduchém případě, kdy D je omezená rovinná oblast ohraničená Jordanovou křivkou) myšlenky Riemannova důkazu zmíněné věty. Předpokládejme, že D obsahuje počátek a že umíme sestrojit (reálnou) funkci G s těmito vlastnostmi:

(i) G je harmonická funkce v $D - \{0\}$;

(ii) v oblasti D platí

$$G(z) = \log |z| - f \quad (f \text{ je harmonická funkce});$$

(iii) definujeme-li $G = 0$ na hranici ∂D oblasti D, je vzniklé rozšíření spojitá funkce.

Funkce G (v teorii potenciálu známá jako Greenova funkce oblasti D) je těmito podmínkami jednoznačně určena. Funkce

$$\Phi(z) = \exp(G(z) + \mathrm{i}H(z)),$$

kde funkce H se volí tak, aby funkce Φ byla analytická, zprostředkovává žádané (prosté) konformní zobrazení oblasti D na jednotkový kruh (viz např. [3], kap. XII, § 12).

Problém se tedy redukuje na nalezení funkce G, což je ekvivalentní s problémem nalezení harmonické funkce f na D, která nabývá hraničních hodnot $\log |z|$ (Dirichletova úloha). Pro existenci takové funkce přesvědčivě mluví fyzikální názor: při stacionárním dvojrozměrném tepelném toku je teplota popsána harmonickou funkcí, pokud je D homogenní těleso a teplota na hranici ∂D je popsána spojitou funkcí.

Riemann řešil matematicky tento problém pomocí tzv. Dirichletova principu. Zdá se, že i tento název pochází od Riemanna, který se s podobným způsobem uvažování pravděpodobně setkal na Dirichletových přednáškách. Je však známo, že myšlenka užití extremální úlohy k důkazu existence se vyskytuje již u Gausse v souvislosti s metodou nejmenších čtverců. Dirichletův princip však již r. 1833 užil G. GREEN při studiu gravitačního potenciálu elipsoidu. Tento princip spočívá v hledání minima Dirichletova integrálu (integrálu energie)

$$\mathscr{D}(f) = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, ;$$

minimum se hledá ve třídě funkcí vyhovujících dané okrajové podmínce (zde je to podmínka $f(z) = \log |z|$). Funkce f, pro niž se minima nabývá, je harmonická, a poskytuje tedy řešení studovaného problému.

V této úvaze je několik úskalí. Není především zřejmá existence uvažovaného minima (záměna infima a minima!), není jasné, zda uvažovaná třída funkcí, pro něž je $\mathscr{D}(f) < < \infty$, není prázdná (obecně totiž prázdná být může) a kromě toho při odvození faktu, že tato „minimální“ funkce je harmonická, se pracuje s křivkovými integrály, takže hranice ∂D nemůže být moc „obecná“.

Jeden z nejvýznačnějších úspěchů matematiky 19. století, Riemannova geometrická teorie funkcí, užívala podstatně platnosti Dirichletova principu. WEIERSTRASS ostře tento princip kritizoval, a tím nesmírně zpochybnil Riemannovy výsledky (a vyvolal zároveň jejich intenzívní zkoumání). Riemannovi byla tato kritika známa, i když tiskem vyšla až po jeho smrti; uznal její oprávněnost, nicméně o správnosti své teorie byl neochvějně přesvědčen. „Záchrana“ Riemannovy teorie se stala velkým stimulem rozvoje matematické analýzy ve druhé polovině 19. století. Nové důkazy Riemannovy věty o konformním zobrazení podali C. NEUMANN a H. A. SCHWARZ (1870), avšak teprve na začátku století D. HILBERT za určitých předpokladů dokázal oprávněnost Dirichletova principu.

Všimněme si ještě dalšího geometrického (lépe topologického) Riemannova přínosu. Jeho představa analytické funkce není vázána jen na oblasti v rovině, uvažuje funkce definované na různých „plochách". Mimochodem připomínáme, že Riemannovi vděčíme za „zrovnoprávnění" bodu ∞ komplexní roviny prostřednictvím nyní obvyklého zobrazení na (Riemannovu) sféru bez „severního pólu". Nebylo by rozumné pokoušet se v krátkosti vysvětlovat pojem Riemannovy plochy a jeho význam. Jisté je to, že se v analýze (např. při studiu Abelových integrálů apod.) nevyhnutelně setkáváme s „víceznačnými funkcemi" (jako jednoduchý příklad uveďme „funkci" w proměnné z definovanou rovnicí $w^2 - z = 0$). Riemannova genialita spočívá — zhruba řečeno — v tom, že v jistém smyslu zachránil jednoznačnost víceznačných funkcí za cenu nahrazení rovinného definičního oboru jistými (Riemannovými) plochami. Nebude na škodu uvést názor z WEYLOVY knihy o Riemannových plochách: ...někdy se pohlíží na Riemannovy plochy jako na znázornění (užitečné a cenné) víceznačných funkcí; na Riemannovu plochu je však třeba pohlížet jako na základní pojem, jako na půdu, na níž analytické funkce rostou a dávají své plody.

V bádání o rozložení prvočísel se odráží Riemannovo mistrovské zvládnutí komplexní proměnné. Analytické metody v teorii čísel se ve větší míře objevují až v 19. století; hlavní problém, který si nasazení analytického aparátu vynutil, se týkal funkce $\pi(x)$, která udává počet prvočísel nejvýše rovných číslu x. Již L. Euler, A. M. Legendre, C. F. Gauss a další tušili, že pravděpodobně bude platit

$$(**) \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{(x/\log x)} = 1 .$$

P. L. ČEBYŠEV dokázal velmi přesné odhady pro funkci v (**), nepodařilo se mu však dokázat existenci limity. Vyšetřoval funkci (dnes ji nazýváme Riemannova ζ - funkce)

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

pro reálné hodnoty z. Riemann v této souvislosti upozornil na nutnost vyšetřovat ζ - funkci pro komplexní hodnoty z ;pokusil se i o důkaz (**) a poznamenává, že by bylo třeba znát rozložení nulových bodů ζ - funkce v pásu $0 \leqq \mathrm{Re}z \leqq 1$ (tam je funkce definována pomocí analytického pokračování). Vyslovil přitom domněnku (dnes slavná Riemannova hypotéza), že všechny tyto nulové body leží na přímce $\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}$. Toto tvrzení není dodnes ani dokázáno, ani vyvráceno. (Rovnost (**) byla dokázána r. 1896.)

Riemannova práce o funkci $\pi(x)$ vyniká náročnou početní technikou i hloubkou a jemností výsledků. Totéž lze říci i o další jeho práci o trigonometrických řadách (habilitační spis z r. 1854). Tato práce připravila půdu pro pozdější budování teorie funkcí reálné proměnné. Riemann v ní byl nucen sáhnout až do samotných základů soudobé analýzy. I když u komplexních funkcí předpokládal, že funkce (lépe: třída funkcí) je vymezena pomocí určitých vnitřních vlastností, které ji zcela popisují (viz (*)), u reálných funkcí zaujímal patrně pod vlivem Dirichletových přednášek zcela moderní stanovisko a chápal funkci jako jakékoli přiřazení $x \to f(x)$ mezi reálnými čísly.

Pro potřeby zkoumání trigonometrických řad Riemann revidoval dosavadní (Cauchyovu) definici určitého integrálu. Riemannova definice, která se nám dnes jeví jako přirozená až triviální, měla pro vývoj matematiky zásadní význam. Je totiž typem jakési „obecné definice" (o funkci se vcelku a priori nic nepředpokládá). Riemann též vyšetřil nutné a postačující podmínky integrovatelnosti a sestrojil příklady integrovatelných funkcí s hustou množinou bodů nespojitosti. Za zmínku také snad stojí, že patřil k prvním matematikům, kteří pochopili, že diferencovatelnost není pro spojité funkce nijak typická.

Z výsledků Riemannovy habilitační práce připomeňme tzv. Riemannovo-Lebesgueovo lemma (Fourierovy koeficienty integrovatelné funkce konvergují k 0). Riemannova originalita spočívá též ve vyšetřování obecných trigonometrických řad (koeficienty nejsou tedy obecně odvozovány od nějaké funkce), což se ukázalo závažné pro další rozvoj reálné analýzy; je zde i přímá souvislost s pozdějšími Cantorovými objevy v teorii množin. Riemann si uvědomoval velký rozdíl mezi chováním mocninných a trigonometrických řad – věděl, že o možnosti vyjádření funkce ve tvaru trigonometrické řady rozhodují její lokální vlastnosti.

Riemannovy objevy vyvolaly nové problémy, které on sám nebyl schopen vyřešit. Neúplnost výsledků byla pravděpodobně příčinou toho, že Riemannova práce o trigonometrických řadách vyšla až po jeho smrti r. 1867. Dedekind o této práci soudil, že zahrnuje studium „nejdůležitějších principů infinitezimální analýzy" a další vývoj tento jeho názor plně potvrdil.

Ani zdaleka jsme si nestačili všimnout všech důležitých Riemannových výsledků; připomínáme, že všech dosáhl v období kratším 15 let. Opustili jsme vyprávění o jeho životě v období, které bylo pro něj nejkrásnější a kdy jen úmrtí sourozenců bylo předzvěstí tragického konce.

Po Dirichletově smrti byl Riemann 30. 6. 1859 ustanoven řádným profesorem göttingenské univerzity a v prosinci téhož roku byl jmenován řádným členem berlínské Akademie věd. Také pařížská Akademie věd a Královská londýnská matematická společnost ho jmenovaly svým členem. Dosáhl tím v krátké době všech poct, kterých vědec může dosáhnout.

Navštívil s Dedekindem Berlín a byl tam přijat s patřičnou úctou C. W. Borchardtem, E. Kummerem, L. Kroneckerem a K. Weierstrassem; seznámil se s italskými matematiky Bettim a Casoratim. O velikonocích r. 1860 odjel na měsíc do Paříže (pozoruhodné je, že soutěžní práce z matematické fyziky, kterou předal pařížské Akademii, neobdržela žádnou cenu, ačkoliv zůstala po dlouhou dobu nevyčerpatelným zdrojem cenných myšlenek); jeho materiální podmínky se natolik zlepšily, že se mohl r. 1862 oženit s Elisou Kochovou, přítelkyní svých sester.

Asi za měsíc po svatbě onemocněl uprostřed léta zánětem pohrudnice, který vyvolal onemocnění plic. Na doporučení lékařů (a na základě přímluv vlivných přátel) odjel do Itálie, kde se mu velmi líbilo – tamní pobyt do jara příštího roku byl snad vůbec nejhezčím obdobím jeho života. Při návratu zpět se silně nachladil a do Göttingen přijel ve velmi špatném stavu. Brzy se musel opět vrátit do Itálie. V prosinci r. 1863 se Riemannovým narodila v Pise dcera Ida. O rok později onemocněl Riemann žloutenkou a téhož roku zemřela jeho sestra Helena.

Stále toužil po návratu k tvůrčí práci a stýskalo se mu po Göttingen, byl ale příliš sláb. Nabízené místo profesora v Pise nepřijal, hlavně ze zdravotních důvodů. Na radu lékařů zůstal v Itálii přes další zimu. V létě 1865 se jeho stav ještě zhoršil, přesto však se v říjnu vrátil do Göttingen. Dokončil práci o ζ - funkci a předal svému žáku HATTENDORFFOVI rozpracované pojednání o minimálních plochách. Zákeřná choroba stále více oslabovala jeho tělo, a tak se v červnu 1866 vydal potřetí do Itálie. Válkou zničené tratě velmi komplikovaly cestu — Riemann přijel k Lago Maggiore zcela vyčerpán. Tam tiše zesnul 20. června 1866 v Selasce.

Zemřel obklopen svými drahými, uprostřed ohromného množství nápadů a plánů, zemřel klidně a odevzdaně, tak jak žil — byl skromný, tichý, samotářský, navenek někdy nemotorný a melancholický. Byl věřící člověk a svůj život zasvětil královně věd, které neúnavně a oddaně sloužil až do smrti. Zemřel příliš brzo — jako ABEL, GALOIS, URYSON a jiní. Dokázal přesto silně ovlivnit vývoj matematiky a svým následovníkům zanechat neřešitelný problém: Jak by se vyvíjela matematika, kdyby žil o 20 let déle?

Literatura

[1] E. T. BELL: *Men of Mathematics*, vol. 2, Penguin Books, 1965.
[2] T. HAWKINS: *Lebesgue's Theory of Integration*, The University of Wisconsin Press, Madison, 1970.
[3] O. D. KELLOG: *Foundations of Potential Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1929.
[4] M. KLINE: *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, London, 1972.
[5] A. I. MARKUŠEVIČ: *Očerki po istorii tëorii analitičeskich funkcij*, GITTL, Moskva, 1951.
[6] B. RIEMANN: *Gesammelte Mathematische Werke*, Teubner, Leipzig, 1876 (ruský překlad Moskva, 1948).
[7] J. L. WALSH: *History of the Riemann mapping theorem*, Amer. Math. Monthly *80* (1973), 270—276.

O základních pojmech kybernetiky

Referát přednesený na 11. celostátní konferenci o matematice na VŠTEZ, konané ve dnech 28.—31. srpna 1975 v Brně

Karel Winkelbauer, Praha

Můj úkol proslovit na této konferenci úvodní přednášku o základních pojmech kybernetiky mě staví do postavení velmi nesnadného. Jde o úlohu nejméně tak obtížnou, jako je úloha této konference zvládnout obsáhlé téma o postavení matematiky v kybernetice a v automatizovaných systémech řízení.