

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Tomáš Ficker; Luboš Pazdera

Nestacionární měření tepelné vodivosti pevných látek (laboratorní úloha pro fyzikální praktikum)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 43 (1998), No. 4, 308--313

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139748>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1998

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Nestacionární měření tepelné vodivosti pevných látek

(laboratorní úloha pro fyzikální praktikum)

Tomáš Ficker a Luboš Pazdera, Brno

1. Úvod

V článku je popsáno měření tepelné vodivosti pevných látek použitím nestacionárního pulzního režimu. Tato metoda byla vybrána s ohledem na využití ve studentských laboratořích. Článek zdůrazňuje hodnotu nestacionárních metod pro měření tepelných vlastností pevných látek.

Tepelná vodivost λ charakterizuje prostup tepla prostředím a je definována Fourierovým zákonem

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad } T, \quad (1.1)$$

kde \mathbf{q} je vektor hustoty tepelného toku a T je skalár teplotního pole. Matematický základ pro měření tepelné vodivosti je dán parciální diferenciální rovnicí difúzních dějů

$$c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}[\lambda \text{grad } T] + q_0, \quad (1.2)$$

kde q_0 je výkon, s jakým je teplo generováno v jednotkovém objemu látky, t je čas, c je měrná tepelná kapacita a ϱ je hustota látky. Pro izotropní látky ($\text{div}[\lambda \text{grad } T] = \lambda \Delta T$) platí zjednodušená rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c\varrho} q_0, \quad k = \frac{\lambda}{c\varrho}, \quad (1.3)$$

kde k je teplotní vodivost.

Všechny metody pro měření tepelných vlastností mohou být rozděleny do dvou základních skupin: (i) metody, které používají zdroje ($q_0 \neq 0$), a (ii) metody bez tepelných zdrojů ($q_0 = 0$). Ve druhé skupině je teplota T látky modulována kontaktem s nekonečnými zásobníky (výměníky) tepla, zatímco v první skupině působí zdroj tepla uvnitř vzorku nebo na jeho povrchu. Uvedené rozdělení je spíše konvenční, neboť např. vliv zdroje na povrchu může být zahrnut do počátečních podmínek rovnice (1.3), a tím obdržíme formálně metodu bez použití zdroje.

Doc. RNDr. TOMÁŠ FICKER, CSc. (1953), Ing. LUBOŠ PAZDERA, CSc. (1963), Ústav fyziky FAST VUT, Žižkova 17, 602 00 Brno.

Metody bez použití zdroje mohou být rozděleny též na stacionární ($\partial T/\partial t = 0$) a nestacionární ($\partial T/\partial t \neq 0$). Ve stacionárních metodách je nutné čekat na dosažení stacionárního stavu, kterého může být v mnoha případech dosaženo až za relativně dlouhou dobu.

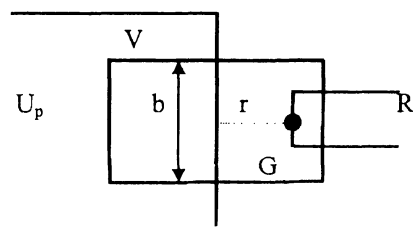
Metody užívající tepelného zdroje mohou být také rozděleny na stacionární a nestacionární, avšak v tomto případě vystupují do popředí dodatečné klasifikační faktory: (i) tvar povrchu zdroje (bodový, lineární, plošný nebo objemový), (ii) časová závislost zdroje výkonu (pulzní nebo kontinuální režim), (iii) povrch měřeného vzorku (deskový, válcový, sférický apod.).

Poněvadž konkrétní experimentální uspořádání mohou využívat různé kombinace prvků ze jmenovaných tří skupin (i)–(iii), existuje velký počet modifikací, z nichž každá vyžaduje nalézt svoji vlastní skalární funkci $T(x, y, z, t)$, která je řešením příslušné rovnice vedení tepla (1.3).

Existují stovky metod pro měření tepelné vodivosti. Správný výběr vhodné metody pro konkrétní situaci je velmi závažný. Při výběru metody by se měly uvážit některé pomocné skutečnosti:

1. Jestliže se nepožaduje vysoká přesnost měření, není nutno užívat složitých metod.
2. Stacionární metody jsou časově náročnější, a proto nejsou vhodné pro měření velkého počtu vzorků.
3. Jestliže povrch vzorku není možno upravit na přesně definovaný tvar, je výhodné použít metodu s bodovým nebo lineárním zdrojem.

Vysokoškolské studentské laboratoře mají určité zvláštní rysy, k nimž se musí přihlížet při výběru vhodné experimentální metody. Omezující skutečnosti jsou např. časové omezení (nejčastěji 90 minut na laboratorní práci), dále požadavky na relativně jednoduché technické zařízení nebo na srozumitelnost matematického aparátu.



Obr. 1. V – vzorek, U_p – pulzní zdroj, G – čidlo, b – délka lineárního zdroje, r – vzdálenost čidlo-drát, R – ohmmetr

V tomto článku představujeme jednu z metod, která je navržena a zkonstruována pro studentské laboratoře. Ze všech možných uspořádání nestacionárních experimentů byl vybrán následující: lineární tepelný zdroj (odporový drát) pracující v pulzním režimu, umístěný na povrchu vzorku (obr. 1). Nestacionarita metody zaručuje pružné a časově nenáročné měření, což je hlavní předností ve srovnání se stacionárními experimenty doposud většinou používanými v základních kurzech fyzikálního měření.

2. Experiment

Podstatou nestacionárního experimentu je měření časové závislosti teploty v přesně určených bodech vzorku, tj. stanovení funkce $T(x, y, z, t)$. Přesné analytické vyjádření funkce $T(x, y, z, t)$ je dáno řešením rovnic (1.2), resp. (1.3) doplněných o odpovídající počáteční a okrajové podmínky. Pro polonekonečný vzorek s lineárním pulzním zdrojem tepla je teplotní funkce T_l dána [1]–[3] následovně:

$$T_l = T_0 + \frac{Q}{2\pi\lambda t} \Phi\left(\frac{b}{4\sqrt{kt}}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4kt}\right), \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy, \quad (2.1)$$

kde T_0 je okolní teplota, Q je teplo vyslané z jednotky délky lineárního zdroje v jistém krátkém časovém intervalu Δt , r je vzdálenost mezi zdrojem a teplotním čidlem (např. termistorem) a b je délka lineárního zdroje (obr. 1). Čím větší jsou charakteristické rozměry vzorku ve srovnání se vzdáleností r , tím lépe je splněna aproximace polonekonečného vzorku. Lze ukázat [4], že deskový vzorek může být považován za polonekonečný, jestliže jeho tloušťka s je dostatečně větší než vzdálenost r , tedy $s > \sqrt{2}r$.

Je-li argument x funkce $\Phi(x)$ větší než jedna, tj.

$$x = \frac{b}{4\sqrt{kt}} > 1, \quad (2.2)$$

pak funkce $\Phi(x)$ konverguje k jedné, tj. $\Phi(x) \approx 1$, a teplotní funkce (2.1) má jednodušší tvar

$$T_l' = T_0 + \frac{Q}{2\pi\lambda t} \exp\left(-\frac{r^2}{4kt}\right). \quad (2.3)$$

Zjednodušená funkce (2.3) má extrém (maximum) v čase $t = t_m = r^2/(4k)$, a tedy je možno psát

$$\lambda = \frac{Qcr^2}{4t_m}, \quad \Delta t \ll t_m. \quad (2.4)$$

Pro čas t srovnatelný s časem t_m podmínka (2.2) může být (za použití (2.4)) přepsána do jednoduché podoby

$$\frac{b}{r} > 2, \quad (2.5)$$

kteřá je velmi dobře splněna i v námi použitým experimentálním uspořádání ($b \sim 14$ cm, $r \sim 3$ cm).

Je-li výraz (2.4) korigován [4] na konečnou dobu Δt trvání teplotního pulzu, dostaneme výraz pro tepelnou vodivost λ ve tvaru

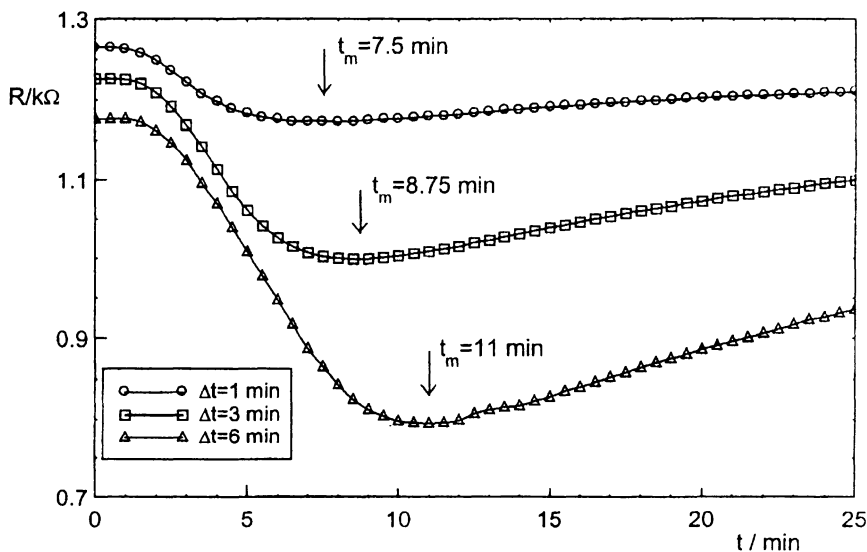
$$\lambda = \frac{Qcr^2}{4\Delta t} \left[\frac{\Delta t}{t_m} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{t_m}\right)^2 + \frac{5}{12} \left(\frac{\Delta t}{t_m}\right)^3 + \dots \right]. \quad (2.6)$$

Odtud vidíme, že zanedbáním členů s vyššími mocninami a použitím jen prvního členu $(\Delta t/t_m)$ se lze vrátit k méně přesnému vztahu (2.4).

Uspořádání experimentu a měření

Jako měřený vzorek byla použita klasická stavební cihla ($29\text{ cm} \times 14\text{ cm} \times 6,5\text{ cm}$). K povrchu cihly je přiložen odporový drát ($R_0 = 1,2\ \Omega$) sloužící jako lineární zdroj tepla (obr. 1). Drát je potažen tenkou vrstvou tmelu (cihlový prášek smíchaný s vodním sklem). Ve vzdálenosti 3 cm od drátu je umístěn malý polovodičový snímač — perličkový termistor ($R_0 = 1,4\text{ k}\Omega$ při 18°C) — zaznamenávající tepelný pulz. Odpor termistoru je závislý na teplotě — klesá s rostoucí teplotou. Maximální teplota je proto registrována jako minimální odpor termistoru, který může být měřen běžným digitálním ohmmetrem. Termistor je opět chráněn proti mechanickému poškození tenkou vrstvou cihlového tmelu a navíc je pokryt malým hranolkem ($3\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 1,2\text{ cm}$) polystyrenu, který eliminuje vliv tepelného záření a vzdušného tepelného vedení. Toto opatření omezuje zdroj chyb při vlastním měření.

Měřicí procedura je snadná: napěťový zdroj (6 V) je spojen s odporovým drátem po dobu Δt a pak vypnut. Po spuštění zdroje se odpor termistoru čte z digitálního ohmmetru každou celou minutu t . Čtení se provádí dostatečně dlouho tak, aby mohlo být určeno minimum funkce $R(t)$. Minimum na křivce $R(t)$ určuje čas t_m , kdy maximum tepelného pulzu dosáhne teplotního čidla. Hodnota času t_m je užita pro výpočet v souladu s rovnicí (2.6). Hodnoty ostatních veličin ρ a c použitých v (2.6) mohou být převzaty z literatury [4, 5] — pro cihlový materiál je $\rho \approx 1800\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a $c = 878\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.



Obr. 2. Realizované měření

Obr. 2 ukazuje časovou závislost teploty $T(t)$ pomocí hodnot odporu $R(t)$ teplotního čidla G umístěného 3 cm od zdroje tepla. Byla provedena tři nezávislá měření pro teplotní pulzy v trvání $\Delta t = 1\text{ min}$, 3 min a 6 min a k nim byly nalezeny příslušné časy $t_m = 7,5\text{ min}$, $8,75\text{ min}$, 11 min . U těchto hodnot je možno pozorovat rostoucí

hodnotu t_m pro zvětšující se hodnoty Δt . Vysvětlení této skutečnosti plyne z rovnice (2.6): protože λ musí zůstat konstantní pro všechny hodnoty Δt a t_m , pak při rostoucím Δt musí růst také t_m .

Pro pulzy $\Delta t = 1$ min, 3 min a 6 min byly pomocí vztahu (2.6) určeny hodnoty tepelné vodivosti $\lambda = 0,85 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $0,83 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a $0,75 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, které jsou v dobrém souladu s tabulkovou hodnotou $\lambda_{\text{tab}} = 0,7$ až $1,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ [4, 5].

V dalších odstavcích si krátce všimneme přesnosti experimentu a analýzy experimentálních chyb. Podobně jako u jiných experimentů, i v tomto případě můžeme diskutovat tři základní zdroje nepřesností:

(i) *Nepřesnosti teoretického modelu.* Analyzujeme dvě používané aproximace, tj. $\Phi(x) \sim 1$ pro $x = b/(2r) > 1$ a omezení na první tři členy $(\Delta t/t_m)^n$ nekonečné řady (2.6). V našem případě se hodnota $\Phi(2,33) = 0,9802$ liší od jedné o 1,98 %, což je přijatelně malá diference. Nicméně druhá použitá aproximace, tj. omezení na první tři členy řady (2.6), může vést k podstatně větším nepřesnostem, zejména pro delší pulzy $\Delta t > 3$ min, jak je zřejmé již i z přibližného odhadu chyby součtu řady (2.6), tj.

$$\Delta\lambda \approx \frac{\rho c r^2}{4\Delta t} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta t}{t_m}\right)^4 + \left(\frac{\Delta t}{t_m}\right)^5 + \dots + \left(\frac{\Delta t}{t_m}\right)^{15} \right]. \quad (2.7)$$

Pro tři vybraná měření ($\Delta t = 1$ min, 3 min, 6 min, $t_m = 7,5$ min, 8,75 min, 11 min) dostaneme $\Delta\lambda = 0,001 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $0,021 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a $0,096 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, což představuje relativní chyby $\eta = 0,12 \%$, $2,5 \%$ a $12,8 \%$.

Výběr hodnot b , r , Δt je tedy závažný z hlediska přesnosti použitého modelu i spolehlivosti celé metody.

(ii) *Nepřesnosti měřicího zařízení.* Tyto nepřesnosti jsou dány např. teplotním zpožděním perličkového termistoru, jeho omezenou citlivostí i konečnou aktivní plochou jeho měrného tělíska. Dalšími parametry, které omezují přesnost zařízení, jsou vlastnosti ohmmetru, dále konečný časový krok pro čtení hodnot odporu R a odvod tepla s povrchu vzorku. Nastavení optimálních parametrů zařízení může být dosaženo dodržением následujících podmínek:

- Aktivní plocha S bodového termistoru je podstatně menší než druhá mocnina vzdálenosti r , tedy $S \ll r^2$.
- Časová relaxační konstanta τ určující teplotní flexibilitu termistoru je značně menší než čas t_m , tedy $\tau \ll t_m$.
- Citlivost termistoru musí být dostatečně vysoká — teplotní součinitel termistoru $\beta \geq 1500 \text{ K}$ (odpor termistoru $R = R_0 \exp(-\beta/T)$).
- Citlivost ohmmetru je srovnatelná nebo vyšší než citlivost termistoru.
- Časový krok čtení hodnot odporu R je dostatečně menší než t_m .
- Teplota vzorku v průběhu měření nepřekročí okolní teplotu o více než jeden řád, čímž se omezuje odvod tepla s povrchu vzorku.

Námi použitý časový krok 1 min představuje krajní chybu 0,5 min a pro nejmenší hodnotu extrému $t_m = 7,5$ min představuje relativní chybu 6,7%, což je nejnepříznivější případ z našich tří měření. Zbývající dvě relativní chyby jsou 5,7% a 4,5%. Použití polovičního časového kroku by bylo vhodnější.

(iii) *Chyby vznikající vlivem lidského faktoru a na základě statistické povahy vzorků.* Na rozdíl od předchozích dvou zdrojů systematických chyb (i) a (ii) jsou zdrojem těchto chyb náhodné vlivy. Jak je známo, chyby experimentátora mohou být odhadnuty na základě opakovaných měření na jednom vzorku při zachování konstantních parametrů experimentu. Chyby vznikající na základě statistické povahy vzorků lze stanovit pomocí měření na více vzorcích. V obou případech je nutné provést obecnou chybovou analýzu a určit např. střední nebo pravděpodobnou chybu aritmetického průměru λ . Za obvyklých podmínek chyby experimentátora nepřevyšují několik procent. Chyby plynoucí ze statistické povahy vzorků mohou dosahovat podstatně větších hodnot, pokud vzorky nejsou připraveny speciální technologií.

3. Diskuse

Článek popisuje jednoduchý způsob měření tepelné vodivosti látek ve studentských laboratořích. Popsané zařízení vyžaduje pouze minimální náklady a je instruktivní z pedagogického hlediska. V rámci jedné výukové hodiny laboratorního cvičení (90 min) je možné pohodlně proměřit dvě charakteristiky $R(t)$. Doporučujeme mít k dispozici dva cihlové vzorky, aby se předešlo čekání na chladnutí vzorku v případě nesprávného měření. Celé experimentální zařízení je snadno ovladatelné a studenti obvykle nemají žádné potíže během měření. Popsaný experiment byl zaveden do našich studentských laboratoří před dvěma roky a po celou tuto dobu vykazuje dobrý a spolehlivý provoz.

L i t e r a t u r a

- [1] CARSLAW, H. S., JAEGER, J. C.: *Conduction of Heat in Solid*. Clarendon Press, Oxford, 1959.
- [2] JACOB, M.: *Elements of Heat Transfer*. John Wiley, New York, 1957.
- [3] MC. ADAMS, B.: *Heat Transmission*. Mc Graw-Hill, New York, 1942.
- [4] KREMPASKÝ, J.: *Meranie termofyzikálnych veličín*. SAV, Bratislava, 1969.
- [5] ROCHLA, M.: *Stavební tabulky*. SNTL, Praha, 1987.