Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Břetislav Novák Svatopluk Fučík, Jaroslav Milota; Jaroslav Milota; Břetislav Novák

O práci s nadanými posluchači na katedře matematické analýzy MFF KU

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 16 (1971), No. 4, 181--186

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139775

O PRÁCI S NADANÝMI POSLUCHAČI NA KATEDŘE MATEMATICKÉ ANALÝZY MFF KU

SVATOPLUK FUČÍK, JAROSLAV MILOTA a BŘETISLAV NOVÁK, Praha

V posledních letech se na většině našich vysokých škol široce rozebírá otázka úpravy učebních plánů. Základní snahou je přiblížit co nejvíce výuku současnému stavu příslušného vědního oboru. Je pochopitelné, že by nemělo jít pouze o obsahovou stránku výuky, tj. o zahrnutí co nejnovějších výsledků do učebních osnov. Neméně důležitou stránkou zůstává i výchova posluchačů k tvůrčímu osvojování poznatků, a tím i příprava k jejich budoucí vlastní vědecké práci.

Chtěli bychom se v tomto článku zmínit o některých zkušenostech, které získal kolektiv pracovníků katedry matematické analýzy matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze se studentskou vědeckou prací.

Pracovníci katedry se většinou setkají s posluchači již v prvém ročníku při přednášce a cvičeních z matematické analýzy. V posledních letech byla tato přednáška značně rozšířena jak obsahově, tak i počtem hodin (6/4, 4/4, 4/2 a 4/4 týdně po jednotlivých semestrech). Ve druhém a třetím semestru současně probíhá zvláštní přednáška z teorie metrických prostorů (v rozsahu 2/0, 2/2), která s přednáškou z matematické analýzy úzce souvisí. Obsahová náplň těchto přednášek by si vyžádala rozsáhlého samostatného článku; zaměřme se proto jen na změny ve formě výuky. Již od prvého ročníku se při cvičeních zadávají krátké referáty; posluchači samostatně referují o svém zpracování některého jednoduchého problému, řešení příkladu nebo o některé krátké partii z literatury. Během čtvrtého semestru zpracovává každý posluchač ročníkovou práci (v rozsahu asi 10—20 stran), v níž má osvědčit svou schopnost samostatně řešit jednoduché problémy, zpracovávat danou tematiku podle literatury a v nemalé míře také prokázat svou schopnost přehledně a správně formulovat své myšlenky a závěry. Ve čtvrtém semestru studia je zařazeno matematické praktikum (3 hod. týdně); je věnováno referování rozsáhlejších úseků, které doplňují a rozšiřují probranou látku a kde jsou předkládány i problémy dosud neřešené. (Podrobnější obsah je patrný z učebního textu [1].)

Během třetího ročníku jsou posluchači matematiky již rozděleni na jednotlivé specializace. Na specializaci matematická analýza mají posluchači možnost zúčastnit se práce v některých seminářích, které katedra vypisuje buď přímo pro posluchače v rámci jejich studia, nebo které (částečně ve spolupráci s MÚ MFF KU nebo MÚ ČSAV v Praze) pořádá pro pracovníky fakulty a další zájemce. Pro zajímavost uveďme názvy některých seminářů z poslední doby: Banachovy prostory funkcí více proměnných, Teorie nelineárních operátorů, Nelineární parc. diferenciální rovnice, Evoluční rovnice atp.

Již uvedené semináře ukazují, že matematická analýza není v žádném případě jednolitý obor. Je to pochopitelné, protože za století svého vývoje se rozdělila původní tematika (zhruba studium funkcí, integrálů, diferenciálních a integrálních rovnic) na mnoho rozsáhlých odvětví a směrů, které třeba v současné době nemají mnoho společného. Tato rozsáhlost a značná různorodost má ovšem řadu výhod i nevýhod. Hlavní nevýhodou je to, že studium matematické analýzy vyžaduje velmi široké znalosti, a to jak z disciplín klasických (teorie funkcí reálné i komplexní proměnné, dif. rovnice, variační počet atp.), tak i z disciplín moderních (funkcionální analýza, abstraktní teorie míry) nebo i z odvětví, které do matematické analýzy přímo nepatří (algebra, topologie). Na druhé straně je ovšem výhoda, že každý posluchač specializace matematická analýza má velkou možnost výběru svého užšího zaměření se zřetelem na vlastní zájem od směrů vysloveně teoretických (funkcionální analýza, teorie funkcí a distribucí, teorie integrálu i řad atp.) přes směry úzce spjaté s aplikacemi (diferenciální rovnice, numerické metody funkcionální analýzy atp.) ke směrům přímo praktickým (otázky pružnosti a pevnosti atp.). Aby katedra umožnila posluchačům, kteří se vyhraněně zajímají o užší obor, efektivní studium, vypracovává často pro nadané posluchače individuální studijní plány pro poslední roky studia. V podstatě to znamená, že obvykle v posledních dvou letech studia, kdy nastává specializace vzhledem k diplomové práci, je studijní plán pro tyto posluchače modifikován tak, aby jeho výsledkem bylo sice solidní ovládnutí obecných partií, ale se zvláštním zřetelem na hluboké znalosti ve zvoleném úzkém oboru. Posluchač v takovém případě pracuje obvykle pod přímým vedením specialisty v tomto oboru, který ho uvádí do problematiky i úzkou spoluprací na řadě problémů. V neposlední řadě má matematická analýza tu výhodu, že její absolventi se mohou úspěšně uplatnit jak v práci kateder vysokých škol i ústavů ČSAV, tak i při aplikacích v závodech i různých výzkumných ústavech.

Z uvedeného nástinu průběhu výuky matematické analýzy přímo vyplývá několik úskalí. Výuka v prvém dvouletí jakkoliv zaměřená a maximálně zdůrazňující samostatnou práci vždy působí na velmi různorodý kolektiv, z něhož se jen jistá část bude věnovat matematické analýze. Výuka tedy nemůže respektovat individuální schopnosti, zájem a nadání posluchačů. Na druhé straně většina zmíněných seminářů pro vyšší ročníky má několikaletou tradici, a tedy i dosti vysokou úroveň. Přitom je žádoucí, aby se jejich práce zúčastnili posluchači již od třetího ročníku. Alespoň dvouletá práce v takovém semináři může totiž vést ke konkrétním výsledkům.

Naznačenou mezeru se naše katedra v posledních pěti letech snažila odstranit pořádáním dobrovolných seminářů a výběrových přednášek pro posluchače prvých dvou ročníků. Jejich dalším cílem je získat také nadané posluchače k hlubšímu studiu mimo rámec přednášek, probudit zájem o některou problematiku z matematické analýzy a v neposlední řadě posunout hranici pro studentskou vědeckou práci do nejnižších ročníků.

Základní potíž, kterou bylo nutno překonat, spočívala v zakořeněném předsudku (který byl mezi posluchači značně rozšířen), že v matematické analýze je obtížné nalézt problematiku vhodnou ke studentské vědecké práci v nejnižších ročnících. Názor zdánlivě logický, neboť matematická analýza jako jedno z nejstarších odvětví matematiky neskýtá hojnost problémů, které by bylo možno formulovat přístupně i posluchačům nejnižších ročníků a navíc takových, které by byly zajímavé, důležité a neřešené, ale přitom by nevyžadovaly příliš rozsáhlé znalosti.

Uveďme nyní na konkrétních případech dvou seminářů z poslední doby, jak se uvedené potíže překonaly a jakých výsledků se dosáhlo.

Prvý seminář tohoto druhu se zabýval teorií funkcí reálné proměnné. Započal pracovat v r. 1966—7 (vedoucí O. John a J. Milota) a pokračoval i v letech 1967—9 (vedoucí J. Milota a B. Novák). Z počátku jeho náplň pouze doplňovala a rozšiřovala látku z přednášek (konvexní funkce a nerovnosti, zobecnění věty o střední hodnotě, asymptotické chování funkcí atp.). V tomto období měl seminář značnou návštěvu (asi 25 posluchačů), a tedy nepříliš vysokou úroveň. Později se počet účastníků zmenšil na přijatelný pracovní počet a v závěrečném období vlivem diplomových prací pak ještě více zredukoval. (Lze však říci, že seminář byl dobrým „odrazovým můstkem" i pro ty, kteří nevydrželi až do konce. Zaměřili se vesměs na jiné obory a dosáhli již pěkných výsledků. Seminář jim dal alespoň základní průpravu pro metodiku vlastní práce a odvahu i ctižádost pokoušet se o vlastní výsledky.)

V druhém období se seminář zaměřil na tematiku související s derivací a integrálem funkce jedné reálné proměnné. Tato náplň nebyla předem pevně stanovena. Vyplynula více méně organicky z řešení některých problémů, k nimž bylo třeba seznámit se s rozsáhlejší literaturou, z níž vyplynuly problémy další.

Uveďme nyní pro ilustraci tři z řady jednotlivých problémů, jimiž se seminář zabýval a v nichž se dosáhlo nejvýznamnějších výsledků. Pro podrobnější a další informaci odkazujeme na třináct původních prací, které tři z účastníků semináře (D. Preiss, J. Uher a L. Zajíček) publikovali, a které lze najít v našich matematických časopisech nebo v rumunské *Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées* v letech 1969—1971 (viz literaturu na závěr článku).

V teorii integrálu byla jednak studována ekvivalence různých definic určitého integrálu, hledány podmínky jeho existence i některé základní vlastnosti. Z druhé strany pro klasický Riemannův integrál bylo dokázáno toto obecné znění věty o substituci (řešení problému J. Maříka, podané nezávisle na částečném řešení anglického matematika H. Kestelmana):

Nechť funkce g má Riemannův integrál v intervalu $\langle a, b\rangle$. Zvolme $s \in \langle a, b\rangle$ pevně a položme $G(t) = \int_s^t g(w)\, \mathrm{d}w$ pro všechna $t \in \langle a, b\rangle$. Nechť funkce f je omezená v intervalu $\langle c, d\rangle = G(\langle a, b\rangle)$. Potom platí: Existuje-li jeden z Riemannových integrálů $\int_a^b f(G(t))\, g(t)\, \mathrm{d}t$, $\int_c^d f(x)\, \mathrm{d}x$, existuje i druhý a jsou si rovny.

Je zajímavé srovnat tuto větu s obvyklým zněním věty o substituci pro Riemannův integrál (viz V. Jarník, Integrální počet I). Důkaz věty je přitom úplně elementární, vychází pouze z definice Riemannova integrálu (viz [7]).

Další dva problémy úzce souvisí s Baireovskými funkcemi. Uvažujme systém B_0 všech spojitých funkcí (pro jednoduchost na intervalu $\langle 0, 1\rangle$). Je-li již definován systém B_n funkcí na inervalu $\langle 0, 1\rangle$ pro některé celé $n \geqq 0$, pak do systému B_{n+1} dejme ty funkce f definované na $\langle 0, 1\rangle$, které lze vyjádřit jako limitu posloupnosti funkcí ze systému B_n. Jak známo můžeme takto postupovat dále a definovat systémy B_α pro každé spočetné ordinální číslo α. Při každém kroku dostaneme vždy navíc nové funkce a z druhé strany existují funkce, které tímto postupem nejdou získat. Nyní lze např. ukázat že má-li spojitá funkce f derivaci f' v celém intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, je $f' \in B_1$ (a lze dokázat ještě silnější výsledek).

Prvý problém můžeme nyní formulovat takto: Existence derivace je požadavek značně silný. Je proto přirozené studovat některá zobecnění pojmu derivace, např. tzv. aproximativní derivace. Aproximativní derivací funkce f přitom míníme limitu

$$f'_{\mathrm{ap}}(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x},$$

kde t probíhá jistou měřitelnou množinu M, která má bod x za bod metrické hustoty, tj. pro $h \geqq 0$ $k \geqq 0$, $h + k > 0$ platí

$$\lim_{h,k \to 0} \frac{\mu[M \cap (x - h, x + k)]}{h + k} = 1$$

(μ značí Lebesgueovu míru). Vznikla pochopitelně otázka, zda výše uvedená věta platí i pro aproximativní derivace. Dlouho byl nejlepší známý výsledek, že aproximativní derivace patří do systému B_2 a řada autorů se dokonce snažila nalézt dodatečné podmínky, které by platnost tvrzení zaručovaly. Úspěch D. Preisse, který ukázal, že vždy je $f'_{\mathrm{ap}} \in B_1$, je tedy neobyčejně cenný (viz [10]).

Druhý problém souvisí se zajímavou vlastností tzv. darbouxovských funkcí, tj. funkcí, které zobrazují interval buď na jednobodovou množinu, nebo zase na interval. V r. 1927 upozornil Lindenbaum na zajímavou skutečnost, že každou reálnou funkci definovanou na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ lze vyjádřit jako limitu posloupnosti funkcí, které jsou na tomto intervalu darbouxovské. Vznikla otázka, zda-li se některé vlastnosti funkce f dají přenést na členy této posloupnosti. Konkrétně: co lze tvrdit o členech této posloupnosti, víme-li, že daná funkce patří do systému B_α (pro $\alpha = 0, 1$ je úloha jednoduchá, neboť každá spojitá funkce na intervalu je darbouxovská). Dlouho byly známy značně slabší výsledky a zejména ani v poslední době nebyl řešen případ $\alpha = 2$. D. Preissovi se podařilo velmi vtipnou metodou (nezávislou na metodách jiných autorů) dosáhnout definitivního řešení následující větou: Je-li $f \in B_\alpha$, $\alpha > 0$, existuje posloupnost f_n, která k f konverguje a taková, že každá funkce f_n je darbouxovská z některého systému B_β pro $\beta < \alpha$. V nejobtížnějším případě $\alpha = 2$ dokonce ukázal, že za f_n lze vzít posloupnost derivací jistých funkcí (viz [3], [4]). (Poznamenejme, že každá derivace spojité funkce je darbouxovská a patří do systému B_1, z druhé strany existují funkce z B_1, které nejsou darbouxovské, a dokonce existují darbouxovské funkce z B_1, které nejsou derivací žádné funkce.)

Více než tříletá činnost tohoto semináře velmi jasně prokázala, že i v oboru tak široce studovaném a klasickém, jako je teorie funkcí jedné reálné proměnné, mohou vzniknout studentské vědecké práce s výsledky, o než se dlouho pokoušela řada významných matematiků, a tedy s výsledky bez nadsázky světové úrovně.

Druhý seminář, o němž bychom se chtěli zmínit, vznikl pro posluchače prvého ročníku v r. 1970 pod vedením S. FUČÍKA. Je to seminář, jehož činnost stále pokračuje. Okruh studovaných problémů vystihuje nejlépe jeho název: „Řešení nelineárních operátorových rovnic". Naznačme opět stručně jeho problematiku.

Jsou-li dány dvě množiny M, N a zobrazení T množiny M do množiny N, je přirozené klást otázku, za jakých předpokladů lze ke zvolenému $y \in N$ nalézt $x \in M$ tak, že $Tx = y$ („řešení rovnice s pravou stranou") nebo (pro případ $M = N$) otázku, kdy existuje bod $x \in M$ takový, že $Tx = x$ („existence pevného bodu").

Je známo, že celá řada matematických problémů z lineární algebery, z teorie integrálních a diferenciálních rovnic atp. se dá formulovat jedním z uvedených způsobů. Uveďme jednoduchý příklad. Je-li $M = N = E_n$ množina všech n-tic reálných čísel a jsou-li dána reálná čísla $a_{ij}(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, můžeme n-tici $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ přiřadit n-tici $y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ vztahy

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \,.$$

Tím je dáno zobrazení T a nalezení prvku x, pro nějž je $Tx = y$, odpovídá řešení soustavy lineárních rovnic.

Celý seminář je rozpočten na čtyři roky. V právě uplynulém období se věnoval zejména zobecněním známé Banachovy věty o kontrakci: Je-li M úplný metrický prostor (viz V. Jarník, Diferenciální počet II) a T kontrahující zobrazení M do sebe (tj. existuje konstanta $k < 1$ tak, že pro všechna $x, y \in M$ je $\varrho(Tx, Ty) \leqq k\varrho(x, y)$, kde ϱ je daná metrika v prostoru M), pak existuje právě jedno x takové, že $Tx = x$. Zobecnění spočívalo např. ve zkoumání tzv. neexpanzívních zobrazení ($\varrho(Tx, Ty) \leqq \varrho(x, y)$). Dále byla věnována pozornost jednorozměrnému případu, tj. M byla nějaká množina reálných čísel.

Již po krátké době se může seminář pochlubit pěknými výsledky. Posluchači J. ZAHRADNÍKOVI (známému z XVIII. ročníku MO) se např. podařilo velmi pěkně zobecnit a doplnit práci amerického matematika R. DE MARRA z r. 1963; jeho práce bude také publikována.

Náplň tohoto semináře nesouvisí přímo s učebními plány; jde totiž většinou o výsledky z posledních let, kde neexistuje ucelená literatura. (V dalších letech se seminář bude zabývat tzv. Brouwerovou a Lerayovou-Schauderovou teorií, totálně spojitými operátory a teorií monotonních operátorů.) Je to problematika značně důležitá, která má přímé aplikace v řadě matematických disciplín. Posluchači jsou tím vhodně připravováni na práci ve speciálních seminářích, které se pořádají na MFF KU (např. semináře vedené doc. J. NEČASEM a doc. J. KOLOMÝM).

Oba semináře, i když byly vedeny odlišně a studovaly problematiku dosti odlehlých oborů, již prokázaly, že tímto způsobem je možné získat nadané posluchače k úspěšné mimostudijní práci v matematické analýze. Katedra počítá s organizací podobných seminářů s různým zaměřením v příštích letech.

Literatura

[1] J. Lukeš a kolektiv: *Referáty a praktika z matematické analýzy*, učební text, rektorát UK 1970.

[2] D. Preiss: Charakterisace funkcí majících až na spočetnou množinu derivaci zprava rovnou nule, Čas. pro pěst. matematiky *94* (1969), 194—8.

[3] D. Preiss: Limits of derivatives, Comment. Math. Univ. Carolinae *9* (1969), 307—309.

[4] D. Preiss: Limits of derivatives and Darboux-Baire functions, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. *8* (1969), 1201—1206.

[5] D. Preiss: Bemerkung zu einem Problem von V. Jarník, Časopis pro pěst. mat. *95* (1970), 146—9.

[6] D. Preiss, J. Uher: Poznámka k první větě o střední hodnotě integrálního počtu, Časopis pro pěst. matematiky *94* (1969), 199—201.

[7] D. Preiss, J. Uher: Poznámka k větě o substituci pro Riemannův integrál, Časopis pro pěst. matematiky *95* (1970), 345—347.

[8] L. Zajíček: O Baireových třídách, Časopis pro pěst. matematiky *95* (1970), 240—241.

[9] L. Zajíček: Poznámka k teorii integrálu, Časopis pro pěst. matematiky *95* (1970), 242—247.

[10] D. Preiss: Approximate derivatives and Baire classes, Czech. Math. Journal *21* (1971) — v tisku.

[11] D. Preiss: Limits of approximatively continuous functions, Czech. Math. Journal *21* (1971) — v tisku.

[12] D. Preiss: Poznámka o symetricky spojitých funkcích, Časopis pro pěst. matematiky *96* (1971) — v tisku.

G. Polya:

To, co učitel ve třídě řekne, není neďůležité, ale to, co si student myslí, je tisíckrát důležitější. Ideje by se měly rodit ve studentově mysli a učitel by při tom měl hrát roli porodní asistentky.

Existuje jedna „vyučovací metoda", která se nemine účinkem: je-li učitel otrávený při vyučování svému předmětu, bude celá třída otrávená.

Student mi předkládá dlouhý výpočet na mnoha řádcích. Při pohledu na poslední řádek vidím, že výpočet je chybný, ale zdržím se, abych to řekl. Dávám přednost tomu, že projdu spolu se studentem řádek po řádku: „Začal jsi dobře, první řádek je správný, další řádek také, udělal jsi to a to. Další řádek je také správný. Co si myslíš o tomto řádku?" Chyba je na tomto řádku, a když ji student sám objeví, má naději se něčemu naučit. Když však rovnou řeknu „To je špatně", bude student dotčen a nebude poslouchat, co budu dále říkat. A řeknu-li „To je špatně" příliš často, bude student nenávidět mne i matematiku, a všechny moje snahy, pokud jde o něho, vyjdou naprázdno.