Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jan Vyšín

Matematicko-didaktický profil sympozia v Bielefeldu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 20 (1975), No. 1, 39--44

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139848

vyučování

Matematicko-didaktický profil sympozia v Bielefeldu

(16. – 20. 9. 1974)

Jan Vyšín, Praha

Toto sympozium o vyučování geometrii bylo regionální akcí, kterou pořádal Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) bielefeldské univerzity za podpory ICMI. Výzkumná práce v didaktice matematiky (teorii vyučování matematice) patří podle názoru pořadatelů do oblasti mezivědního výzkumu, a proto bylo příznačné, že všecka zasedání symposia se konala v budově ústavu Zentrum für interdisziplinäre Untersuchung (ZIU). Rektor bielefeldské university prof. K. P. GROTEMEYER formuloval základní argument pro zřízení takové instituce slovy, že „obtíže, které vznikají při řešení problémů na pomezí dvou nebo více vědních oborů, nejsou – pokud se týká přípravy pracovníků – jen rázu kvantitativního, ale i rázu *kvalitativního.*"

Sympozium mělo být monotematické, ale během jednání – zejména v diskusích – se často zabočilo do širší oblasti, než je vyučování geometrii. Je to pochopitelné, neboť vyučování geometrii nelze vypreparovat, vyčlenit a izolovat od celé školské matematiky. Bylo prosloveno celkem deset hlavních přednášek, diskuse probíhaly ve třech skupinách, které měly vycházet z přednášek a doplňovat je; zhruba se měly skupiny zaměřovat na nižší stupeň, vyšší stupeň a na vzdělání učitelů. Poslední den (20. 9.) byl určen pro volnou tribunu – přihlášené příspěvky a sdělení:

Hlavní přednášky byly tyto:

H. J. VOLLRATH (NSR): Postavení geometrie ve vyučování matematice; rozbor současného vývoje.

W. SERVAIS (Belgie): Srozumitelné a moderní vyučování geometrii.

R. STOWASSER (NSR): Problémový přístup ke geometrii.

G. PICKERT (NSR): Význam deskriptivní geometrie pro matematické vzdělání.

H. FREUDENTHAL (Holandsko): Geometrie na základní škole.

A. J. BISHOP (Velká Británie): Názorná geometrie.

S. IYANAGA (Japonsko): Kombinace geometrie a algebry; kurs na japonské střední skole.

G. EWALD (NSR): Intuice a axiomatika; ukázka na výstavbě absolutní geometrie.

T. J. FLETCHER (Velká Británie): Geometrický názor a řešení úloh.

G. GLAESER (Francie): Incidenční geometrie ve službách progresívní a polykonkrétní pedagogiky.

Jak naznačují názvy přednášek, zaznělo na sympoziu několik tónů: předně se tu hodně hovořilo o axiomatické výstavbě geometrie, za druhé o problémovém vyučování geometrii, speciálně o řešení geometrických úloh, které čerpají náměty z reality, a za třetí o názorné geometrii a geometrické intuici vůbec. Kupodivu málo se hovořilo o prolínání geometrie lineárních útvarů s lineární algebrou a o metodě souřadnic vůbec, o geometrické topologii (o metrických prostorech), o teorii míry v geometrii a o novějších úsecích geometrie, např. o kombinatorické geometrii.

H. J. VOLLRATH hovořil ve své přednášce o sedmi „tvářích" školské geometrie; s nimi souvisí i její význam pro vyučování matematice a různé přístupy k ní. Geometrie se mu jeví jako „podkladová teorie" pro vyučování matematice, doporučuje realizovat různá pojetí, postupovat na nižším stupni intuitivně, na vyšším deduktivně. Zmíněných sedm „tváří" lze stručně charakterizovat takto: Geometrická zobrazení jako východisko, geometrie jako zásobárna pojmů, geometrie jako zdroj tvořivých postupů (řešení klíčových problémů), geometrie jako soubor impulsů pro činnosti (aplikace), příprava a využití prostorového myšlení (důležité i pro experimentování i vytvoření filozofického pohledu), problémový přístup ke geometrickým poznatkům (i ve spojení s poznáním historického vývoje), geometrie jako zásobárna forem.

W. SERVAIS ve své velmi široce založené přednášce začal historickými aspekty (Eukleidem a jeho kritikou); věnoval se podrobně otázce algebraizace geometrie pomocí vektorových prostorů a souřadnic (DIEUDONNÉ, CHOQUET, DESCARTES, DELESSERT) a v souvislosti s tím i problému zavedení reálných čísel, kterým se později zabýval obšírněji. (Vědecká) geometrie je podle H. FREUDENTHALA úplná a uzavřená kapitola matematiky; má dvě možné perspektivy: buď zemře, nebo bude „pozřena" algebrou a topologií; tato úvaha neplatí ovšem pro školskou geometrii. W. Servais se dále zmínil o zobrazeních a BACHMANNOVĚ teorii; domnívá se však, že se význam zobrazení přeceňuje. Doporučuje intuitivní prvky pro výuku, kreslení grafů a diagramů; doporučuje psychologickou analýzu geometrických pojmů podle FISCHBEINA, doporučuje vybudovat z logiky to, co je užitečné: metajazyk ne plně formalizovaný, kvantifikaci. Základy teorie množin a relací mají podle W. Servaise větší význam v geometrii než v algebře. Kromě toho obšírně vyložil celkem známou myšlenku geometrizace zavedení reálných čísel pomocí grupy homotetických afinit. V souvislosti s tím se zabývá otázkou uspořádání (pomocí rovnoběžné projekce); dále otázkou kolmosti a mírou geometrických útvarů. V závěru upozornil na knihu R. THOMA *Stabilité structurelle et Morphogénèse*, která pojednává o obecné teorii modelů a má matematický dodatek.

Přednáška W. Servaise byla encyklopedická, ale ne vyčerpávající; byla více odborná než didaktická.

R. STOWASSER předvedl řadu „slovních úloh" geometrického charakteru, vzatých zřejmě přímo ze školní praxe. Byly tu staré úlohy z čínských a indických sbírek, úlohy o grafickém zjišťování „špiónů" pomocí podobnosti, úlohy na použití osové symetrie a skládání osových symetrií (kulečníkový problém), úlohy na minimalizaci nebo maximalizaci apod. Řešení úloh bylo „ryze geometrické", tj, zpravidla konstrukční – zřídka početní, kombinatorického charakteru. Většina úloh byla určena pro věkovou úroveň 12–14 let. Náměty úloh připomínaly tematiku rozvíjenou v 19. století ve VUIBERTOVĚ časopise Journal des Mathématiques élémentaires.

R. Stowasser uvedl svoji přednášku několika výstižnými větami zaměřenými proti přehnanému axiomatizování; kritizoval „důkazový fanatismus" v geometrii, neboť „žák prý triviality nepochopí lépe po důkazu". O „axiomatické směsi" na střední škole řekl, že „proměnila kvetoucí zahradu geometrie v zaprášené cvičiště". Na to navázal svou „přímluvu za zajímavé problémy". V přednášce i v pozdějších diskusích bylo znát, že mluví školský praktik, který dobře cítí jedno z bolavých míst současné výuky. (R. Stowasser byl před svým příchodem na IDM středoškolským profesorem).

G. PICKERT charakterizoval nové postavení deskriptivní geometrie takto: „Tato disciplína nesmí ve škole jen konzervovat staré formule, nesmí být jen řemeslem; je třeba, aby své problémy vyjadřovala jazykem současnosti a aby své metody aplikovala na ostatní odvětví matematiky." Na to uvedl několik více méně známých námětů: vrstevnice, gradient, určenost prostorového útvaru průměty, Poincaréův prostorový model hyperbolické geometrie, rovinné konstrukce s prostorovým výkladem (osy elipsy), geometrii na kulové ploše, strukturální pohled na promítání, Pohlkeovu věta. G. Pickert zdůraznil, že jde jen o náměty, ne o jejich didaktické zpracování.

Zajímavá byla přednáška H. FREUDENTHALA; hovořil v ní v podstatě o holandském pokuse, který probíhal po jeden rok v 1., 3. a 5. ročníku. Přitom se dostal celkem samozřejmě na otázku: „Co je geometrie", kterou se obšírně zabývá ve své knize *Die Mathematik als pädagogische Aufgabe*. V souvislosti s tím pronesl H. Freudenthal několik závažných tezí: Bez geometrie na elementárním stupni nelze „zachraňovat" geometrii na vyšším stupni — na elementárním stupni je třeba připustit do geometrie i věci, které vlastně nejsou geometrické (to se také stalo i v holandském pokuse). Dlouho se nahrazovala skutečná geometrie ve škole verbální činností; nyní je třeba, aby se ve škole pěstovala geometrie, která se neopírá o vyjadřování, ale o kreslení, modelování apod.; aby se dětem dávaly podklady pro konverzaci a tím aby se rozvíjela jejich vyjadřovací schopnost.

Po obecném úvodu uvedl H. Freudenthal několik ukázek z holandského pokusu. Pro předškolní věk: přiřaďování jídel členům rodiny sedícím u stolu, hry s kostkami a kostkovou stavebnicí. Pro 1. třídu: problémovou situaci „pohádkový ostrov" se sítí cest, ukazovateli, měřítkem, určováním stanoviště fotografa apod. Pro 3. třídu: problémovou situaci „čtvercová síť", cesty v síti, stejně dlouhé cesty, hry s obsahy, „proměňování" a doplňování obrazců, dělení na shodné části (šokující byly bezprostřední odpovědi žáků); problémovou situaci šachovnice a hrací kostka (překlápění), placení konzumovaného piva po zavírací hodině, vážení, grafický „jízdní řád" v příběhu o cestovateli, uspořádání fotografií s historickými náměty aj. V 5. třídě se řešily takové problémy jako např. získání (ztráta) jednoho dne při cestování „kolem světa" apod.

Charakteristické pro tento pokus je, že jako propedeutika geometrie byly zařazovány úlohy, které se tradičně do geometrie nepočítají, a že rozhodující kritérium pro hodnocení odpovědí žáků na nejnižším stupni byl výrok „Já to tak vidím."

A. J. BISHOP podal ve své přednášce pohled psychologa na otázky výuky geometrie (matematiky); i zde se ukázalo, že je těžko oddělit školskou geometrii od ostatní školské matematiky. I když někteří účastníci sympozia právem ironicky kritizovali přednášejícího, že matematika začíná tam, kde on skončil, přinesla Bishopova přednáška řadu pozoruhodných postřehů. Účastníci dostali mimoto i seznam literatury o 18 knižních titulech, na které se přednášející odvolával.

Podle A. J. Bishopa v dřívějších (anglických) školách byla geometrie „druhá" matematika. Reforma podporuje matematizaci geometrie; Bishop se však domnívá, že neexistuje nevizuální geometrie. Zatímco auditivní pochody jsou jednorozměrné, jsou vizuální pochody vícerozměrné. Produktivní myšlení navazuje na vizuální pochody a má v sobě jistou dualitu: vlastní myšlení a manipulaci se symboly. Intuici předcházejí (podle PIAGETA) činnosti; selžou-li činnosti, selže i intuice, a tedy i myšlení. A. J. Bishop uvedl několik materiálů pro činnosti: pomůcky pro parketování, skládání papírových útvarů, prostorové sítě, kresby na gumě, plastelina, MIRA (průhledná plastika) aj.

Dále hovořil o představování jako duševní aktivitě, kterou přirovnával k filmové paměti. Představy nám zpravidla neposkytují komplexní obraz a nesmíme jich příliš používat (viz známou devizu: ztratíš-li cestu, ptej se slepého). Uvedl pak několik cvičení (ne testů) pro 9leté, které „vyzkoušel" na účastnících sympozia. Šlo např. o takovéto úlohy:

Zavřete oči, představte si trojúhelník, označte jeho vrcholy A, B, C; který vrchol je vpravo — vlevo, která strana je vodorovná, která je nejdelší atd.

Obdobná cvičení byla formulována pro číslo (čtěte pozpátku), pro krychli, tetraedr, ciferník, trojici rovnoběžek aj.

Jako se žáci cvičí *počítat* zpaměti, měli by se cvičit i *konstruovat* zpaměti; na to jsou zpravidla příliš pohodlní. Představování předpokládá předchozí výcvik; A. J. Bishop uvedl opět na ukázku několik cvičení: představu tělesa, jehož tři sdružené průměty jsou kruh, rovnostranný trojúhelník a čtverec, dvojstředové promítání, znázornění situace 3.3 objektů nejrůznějšími způsoby (diagramy, čtvercovou sítí, Carollovými diagramy, topologicky, metricky). Cenné podněty můžeme získat v slepeckých školách.

Přednášející nakonec sám konstatoval, že obsah jeho přednášky byl zaměřen spíše pro výtvarné umělce, architekty, učitele, techniky a vědecké pracovníky a vyslovil podiv, že na tomto sympoziu umístěném v ZIU nebyli přítomni třeba geografové a výtvarníci.

Přednáška S. IYANAGY z Tokia byla v podstatě jen zpráva o osnově matematiky (geometrie) na japonských středních školách a po stránce matematicko-didaktické nepřinesla nic pozoruhodného.

G. EWALD se ve své přednášce nezabýval téměř vůbec otázkami didaktickými a soustředil se jen na axiomatickou výstavbu absolutní geometrie v rovině; přitom vycházel v podstatě ze známé BACHMANNOVY knihy (*Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*). Soustava axiómů, které přednášející uvedl, se skládala ze tří skupin: tří známých axiómů incidenčních, tří axiómů kolmosti a čtyř axiómů posunutí a otočení. Některé axiómy byly formulovány nejasně, bez kvantifikátorů, primitivní pojmy, nebyly analyzovány, motivace chyběly; G. Ewald také nepředvedl žádnou ukázku sekvence vět odvozovaných přímo z axiómů.

K axiomatickému výkladu geometrické teorie je na škole třeba přistupovat velmi citlivě, po předchozím lokálním uspořádání poznatků, možná i po předchozím uvedení několika modelů teorie a motivování axiómů. Proto lze právem tvrdit, že podle přednášky G. Ewalda nelze do školy zavést axiomatické budování geometrie: mimoto ještě zůstává otevřeným problémem, zda mezi „chudými" teoriemi má vůbec figurovat absolutní geometrie.

Přednáška T. J. FLETCHERA se opět soustředila na předvedení ukázek úloh z reality, jejichž matematizace vede převážně na úlohy geometrické. Přednášející navázal na tezi první přednášky (H. J. Vollratha), která charakterizovala geometrii také jako zásobárnu metod a postupů. T. J. Fletcher uvedl celou řadu úloh se sportovní tematikou: vytyčení běžecké dráhy na fotbalovém hřišti, problém zjištění vítězného mužstva ligy před ukončením kola (úloha vede na sousatvu nerovnic, která se řeší graficky pomocí průniků polorovin); jiná úloha s obdobnou tematikou se řeší jako úloha „o směsi" s použitím vektorové algebry. Další z předvedených úloh byl tzv. problém katalyzátoru ve výrobě, tj. jeho vyřazení z použití na určitou dobu; matematicky vede tato úloha na extrémy racionální lomené funkce. Ryze konstrukční charakter (použití stejnolehlosti) měla úloha o mechanismu používaném při výrobě skládacího nábytku. Závěr přednášky tvořil dlouhý důkaz neřešitelnosti rovnice 5. stupně algebraickými funkcemi, naprosto nepotřebitelný pro výuku na střední škole. Tento klasický problém nemá také celkem nic společného s geometrií; řeší se Galoisovou teorií a nanejvýš je možné vyskytující se grupy znázornit jako reprodukční grupy určitých těles.

Poslední přednášku proslovil G. Glaeser. Slovo „polykonkrétní" v názvu přednášky vyjadřuje různotvárnost modelů. Institut de Recherche de l'Enseignement Mathématique (IREM), v němž je G. Glaeser činný, pracuje experimentálně s dětmi 8–10letými v teorii grup. Děti se učí analyzovat a stukturalizovat situace, pracují s knoflíky a barvami, sestrojují modely, které jsou incidentně izomorfní. Studují se grupy automorfismů, např. čtveřice přímek, z nichž každé dvě jsou různoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem; přitom se ovšem o morfismech explicite nemluví. Dvanáctiletí žáci pracují se sítěmi, učí se např. pomocí sítí přenášet mapy a plány; jde tu o topologickou shodnost map a řešení úloh např. na planisféře. Děti se musí učit rozlišovat mezi ověřením a důkazem, musí se učit dokazovat. Geometrie je oblast školské matematiky, velmi vhodná pro heuristický postup, používá speciálního jazyka, může dobře využít didaktiky barev. To všecko jsou důvody, proč učit geometrii.

Závěr přednášky opět patřil „chudé" incidenční geometrii, kterou G. Glaeser velmi doporučuje (příklad automorfismů Pappovy konfigurace). O základní otázce vyslovené už v *New Trends III*, zda se má vycházet ve vyučování geometrii z afinní geometrie nebo z metrické geometrie, nebyla v této přednášce ani zmínka.

Diskuse k přednáškám (probíhající v sekcích) byly dosti roztříštěné, ale zato podnětné; žádné oficiální závěry celého sympozia nebyly formulovány.

Uvedeme některé náměty, o nichž se diskutovalo, a závěry, k nimž se při diskusích došlo.

– Je záchrana geometrie v systematické výuce? – Je deskriptivní geometrie nepostradatelným prvkem pro vzdělání učitelů? – Je třeba se emancipovat od Eukleida; nemáme zdůrazňovat eukleidovské konstrukce; konstrukční úlohy však musíme řešit, konstrukce musíme zdůvodňovat. – H. Freudenthal je skeptický k zadaným geometrickým úlohám, při jejichž řešení mají žáci hledat konstrukci podle určitých úmluv; žáci by měli raději sami hledat problémy. – Kdy se mají učitelé připravovat na problémové vyučování, mají-li na samotné studium málo času? – Pro rozvoj tvořivosti není vhodné volit ryze geometrické úlohy. – Došlo se opět na otázku: Co je geometrická složka matematického vzdělání? – Nikde se nedá tak dobře učit dedukci jako v geometrii, kde má žák před sebou stále model, který situaci zjednodušuje a podněcuje fantazii (Steiner). – Vyučování se stává sterilním, nejsou-li k dispozici podnětné modely. –

Rozvinula se diskuse o cílech výuky: Není snadné stanovit cíle výuky, je mnoho implicitních cílů (Freudenthal). – Vznikla rozprava o termínech „množina všech bodů…“ a „geometrické místo bodů“, o přímce jako prvku a přímce jako množině bodů. – Může být ve škole geometrie nahrazena jiným úsekem matematiky? (Ne, míní Servais). – Deskriptivní geometrie se nesmí ani „utopit“ v matematice, ani se nesmí stát technickým kreslením; poskytuje nám dobré aplikace i motivace – kartografie, stereovize (Pickert). Je hlavní stránka konstrukční geometrie teoretická nebo technická? Mají se zavádět konstrukční úmluvy? Některé z úloh předvedených na sympoziu jsou pěkné, ale nehodí se pro systematický kurs geometrie (Bauersfeld) – Freudenthal je skeptický k řešení úloh o maximech a minimech pomocí diferenciálního počtu. Žákům by se mělo ukázat nejen, jak se složitým aparátem řeší úlohy jednoduché, ale i jak se primitivním aparátem řeší úlohy složité. – Často se vyskytují učebnice, kde za učenou teorií následuje několik triviálních cvičení, např. v lineární algebře; žádá se proto „snížení metod“ (Stowasser) – Freudenthal chválí švédské děti za to, že se při každé příležitosti ptají „k čemu to je?“, ale podotýká, že ne všechny jednoduché struktury je možné aplikovat. – Snad vhodným příspěvkem do „volné tribuny“ bylo mé sdělení o sondě z kombinatorické geometrie.

I když sympozium nesplnilo všechna očekávání, i když se přednáškami a diskusemi neobsáhly všechny otázky školské geometrie a mnohé problémy vyústily opět v otázky, přesto sympozium umožnilo zdravou výměnu názorů i informací a dalo mnoho podnětů pro další úvahy a experimenty v klíčovém problému školské matematiky – geometrii.

Kalifornská státní univerzita v Berkeley*)

Jan Kučírek, Brno

Základní studium

Školní rok je v Berkeley rozdělen na tři části, kterým se však zcela nelogicky říká kvartály (původně existoval i čtvrtý, letní kvartál, který se však neosvědčil a byl zrušen). V každém kvartálu musí student zapsat tolik přednášek, aby za ně získal přibližně 15 bodů. Jeden bod přitom odpovídá zhruba třem hodinám, které student stráví týdně jednak na přednášce, jednak při domácí přípravě na ni. Závažné důvody, pro které student hodlá zapsat méně než 12 (nemoc, vedlejší zaměstnání) nebo více než 15 bodů (zvláštní talent), musí oznámit předem děkanovi fakulty a vyžádat si od něho zvláštní souhlas. Za čtyři roky, tj. během základního studia (Undergraduate Study), shromáždí tak celkem 180 bodů, což jej opravňuje k získání titulu B.A. nebo B.S. a tím i ke zdárnému ukončení základních studií na vysoké škole. Celostátní statistika ukazuje, že z 1 000 žáků devátých tříd střední školy ukončí 750 střední školu (tj. 12. třídu), 400 pak pokračuje ve studiu na univerzitách a jen jedna polovina z nich, tj. 200 základní studia ukončí a získá příslušný titul.

Teoreticky má student možnost zapsat na univerzitě kteroukoli přednášku. Taková praxe byla však málo efektivní, a jednotlivé fakulty proto vypracovaly doporučení, co má student v kvartálu zapisovat, aby mohl během čtyř let získat nezbytný počet bodů. Tato doporučení jsou většinou studenty respektována i proto, že jim dávají možnost volit si asi 20 % zapsaných přednášek podle vlastního zájmu, aniž by

*) Dokončení článku z čísla 6/1974.