

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Štefan Schwarz

Matematická příprava posluchačův pre studium automatizácie a počítačov

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 22 (1977), No. 2, 61--72

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139886>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1977

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Matematická príprava poslucháčov pre štúdium automatizácie a počítačov*)

Štefan Schwarz, Bratislava

Býva dobrým zvykom skúseného rečníka, že sa vopred poistí voči eventuálnemu neúspechu. Bude preto rozumné povedať dve poznámky vopred.

1. Téma, o ktorej chcem prehovoriť, skrýva v sebe isté riziká. Je tu nebezpečenstvo zjednodušovania a nebezpečenstvo idealizácie. Zjednodušovanie ide ruka v ruku s idealizáciou. Spočíva v tom, že rečník má na mysli istého „abstraktného“ študenta a istého „abstraktného“ učiteľa. Obidve abstrakcie si vytvoril — nechtiac — podľa vlastných predstáv. Pritom sa na 90 % premieta vlastné vnútro navonok. Aj ten najrozhladenejší rečník prisudzuje študentom a učiteľom vlastnosti, ktoré títo nemajú.

2. Obávam sa, že to, čo tu poviem, ste už niekde počuli. Hádám, nie raz. Po prednáške budete možno sklamaní. Okrem toho je riskantné hovoriť hodinu na tému, o ktorej bolo napísaných tisíce strán. Riziko nesie rečník (a tak trochu aj náš priateľ L. Berger, neúnavný organizátor nášho matematického života).

Moja pôvodná úloha bola povedať niečo o tom, čo by mal študent, študujúci technickú kybernetiku a elektronické počítače, vedieť z matematiky. V prvej časti príhovoru sa pokúsím túto úlohu splniť podľa najlepšieho vedomia a svedomia. Veľkú väčšinu prítomných netvorí priamo učiteľia elektrotechnických fakúlt. Hádám sa nebudú príliš nudíť. Pôjde totiž z veľkej časti o otázky, ktoré sa dotýkajú širšieho okruhu učiteľov matematiky na vysokých školách. V druhej časti by som rád povedal niekoľko viac-menej kusých poznámok o vyučovaní matematiky vo všeobecnosti.

Nečakajte, prosím, hotové návody. Pôjde skôr o námety do diskusie, miestami vyslovene provokačného charakteru. Rád by som zdôraznil, že (ani v prvej, ani v druhej časti) si nerobím nárok na úplnosť, tým menej na to, že musím mať pravdu.

Ako pri normálnom matematickom výklade, musíme si určiť predpoklady, z ktorých budeme vychádzať. Budú celkom všeobecného charakteru.

Axióma 1. Existujú aj iné vedné odbory okrem matematiky. Tento predpoklad nie je triviálny. Mne to trvalo mnoho rokov, než som k tomuto poznatku došiel. (Aj keď som študoval fyziku.) Tendencie pokúšať sa vnucovať metódy vlastného odboru iným vedným odborom nie sú ani matematikom (menovite mladším) vonkoncom cudzie.

*) Prednáška, prednesená na 12. celoštátnej konferencii o vyučovaní matematiky na vysokých školách technických, ekonomických a poľnohospodárskych, 6.—10. septembra 1976 v Žiline.

A ako z praxe vieme, nie sú cudzie ani našim priateľom z fakúlt, s ktorými sa občas stretávame, v nie práve priateľských diskusiách.

Axióma 2. Matematika je samostatný vedný odbor, a to samostatný svojim obsahom a metódami. Nemôže teda nahradiť ani mechaniku ani elektrotechniku. A obrátene.

Tendencie tohto predpokladu sú prítomným prijemné a teda (v istej ťažko formulovateľnej logike) jasné. Menej jasné sú pracovníkom z iných vedných odborov, ktorí matematiku používajú. A to napriek úspešne ukončeným školeniam z marxistickej teórie poznávania.

Axióma 3. Učiteľ matematiky je tvor skoro dokonalý. V októbri má pripravené prednášky a cvičenia na celý rok. Neustále sa sám zdokonaľuje. Ak je zamestnancom elektrotechnickej fakulty, pozná základné princípy elektrotechniky a má hrubú predstavu o všetkých ostatných prednáškach na fakulte.

Tu by bolo asi lepšie povedať, že axiómy nie je možné spochybňovať.

Axióma 4. (Axióma permanencie.) Metodika nijakého predmetu sa nemôže tak zdokonaľiť, aby som za 1 hodinu zrozumiteľne predniesol a naučil to, čo pred rokom skúsený učiteľ prednášal 2 hodiny.

Presnejšie: Kvalita metódy je rastúca funkcia učiteľových skúseností, ale je to funkcia tvaru, ktorú demografovia (alebo biomatematici) nazývajú logistickou. V nijakom prípade to nie je priama úmernosť.

Axióma 5. Učebné plány tvoria ľudia so širokým rozhľadom, majú pritom na pamäti len a len terajšie a budúce záujmy študentov. Táto axióma je splniteľná.

Poznámka k 5. axióme. Učebné osnovy (na rozdiel od učebných plánov) tvoria matematici za pomoci tých, ktorí matematiku naozaj k svojim prednáškam potrebujú. O tom budeme ešte hovoriť. V tom je implicitne obsiahnuté aj tvrdenie, že nie každý, kto používa matematiku, je matematik. (Práve tak, nie každý, kto používa jazyk, je lingvista.)

I

Po výpočte týchto axiém prikrôčime teraz k tomu, aby sme charakterizovali obsah toho, čo sa študent naučil za prvých 4–5 semestrov.

Za východisko beriem doterajší stav na Elektrotechnickej fakulte SVŠT, kde sa predmety Lineárna algebra a Matematická analýza prednášali päť semestrov, dovedna v rozsahu $29 + 16 = 45$ hodín. (V tom je aj časť numerickej matematiky.) Pri rozumnej úprave hodín, a to na príklad $3/2$ pre Lineárnu algebru a $6/4, 6/4, 6/2, 6/2$ pre Matematickú analýzu, možno túto látku, hádam, predniesť v prvých dvoch ročníkoch. To je spolu $27 + 14 = 41$ hodín. (Treba to, pravda, vyskúšať.)

Chcem byť nielen poplatný obsahovej prestavbe, ale aj naozaj ju podporovať. Je však ťažké prebrať za 37 hodín to, čo sa doteraz preberalo 45 hodín, pričom je v tých 37 hodinách zahrnutý navyše aj predmet nazývaný „Numerická matematika a štatistika“ (s ktorým sa pri navrhovanej prestavbe počítalo v rozsahu $5/3$ v štvrtom semestri). Taká bola totiž situácia v júni tohto roku, a len tak-tak, že sa to nemalo začiatkom zimného semestra začať realizovať. Len tak mimochodom: V druhej polovici 20. storočia

nemožno prednášať matematickú štatistiku bez počtu pravdepodobnosti. A spájať spolu v jednej prednáške numerickú matematiku a štatistiku je ťažké nedorozumenie.

Čo sa teda študenti naučili (a čiastočne zabudli) pred nástupom do druhej polovice štúdia: Elementy algebry. Diferenciálny a integrálny počet jednej a viac premenných, včítane príslušných statí numerickej analýzy. Nekonečné rady. Elementy funkcie komplexnej premennej. Elementy obyčajných diferenciálnych rovníc (včítane operátorovej metódy).

Vzniká teraz otázka, *ktoré matematické partie sa používajú v rôznych odboroch technickej kybernetiky a počítačov.*

Musíme ostro rozlišovať medzi potrebami študentov a učiteľov. Niektoré učebné predmety pre tieto špecializácie nie sú viac ako 15–20ročné. Výber predmetov výuky, ich náplň a metodika, nemajú ešte nejaký relatívne definitívny tvar. V dôsledku toho ani požiadavky na matematickú prípravu nie sú (a nemôžu byť) celkom ujasnené.

Musí nám byť jasné, že keď nám súdruhovia z odborných katedier povedia, čo by z matematiky potrebovali, metodické usporiadanie látky si musíme urobiť sami. Pretože nepoznajú (a ani to od nich nik nemôže žiadať) vnútorné súvislosti v rozsiahlych oblastiach matematiky, niet divu, že ich požiadavky niekedy vyzerajú ako vytrhnuté partie. Našou povinnosťou je zostrojiť z nich pevnejšiu stavbu. Obsah prednášky musí robiť človek rozhradený, nikdy by som to nezveril začiatočníkovi.

To, čo by sme mohli nazvať počítačovou informatikou, má veľa spoločného s technickou kybernetikou, ako sme si zvykli túto chápať. Obsah kybernetiky sa najlepšie popisuje výpočtom tém, ktoré rieši. Hlavný rozdiel je v tom, že informatika si pomerne málo všímá otázok regulácie všeobecných (a menovite spojených) systémov. Praktická počítačová informatika aplikuje dnes skôr všeobecné matematické metódy než mnohé, dnes už známe, pomerne hlboké, matematické výsledky. Tými všeobecnými metódami rozumieme kultúrny matematický prístup, ktorý vie rozlišovať podstatné od menej podstatného, vylučuje nejasné formulácie, vie nahradiť mlhavé slovné popisy matematickými formuláciami, atď. Nezabúdajme, pravda, že vychovávame najmenej na 20 rokov vopred. Vývin v tejto oblasti je nie rýchly, ale prekotný. A – ako to ešte zdôrazním neskôr – kde inde ako na vysokej škole sa má inžinier naučiť solidne základy matematiky.

Ako teraz zistiť, ktoré oblasti matematiky sa používajú v týchto odboroch? Ak ide o „vecnú stránku“, t. j. nezávisle, či to má byť pre študenta alebo učiteľa príslušného odboru, máme najmenej tieto tri možnosti (čiastočne za predpokladu, že tým odborom aj sami trochu rozumieme):

- A) Opýtať sa pracovníkov príslušných špecializácií.
- B) Pozrieť sa do existujúcich učebníc a monografií.
- C) Pozrieť sa do časopiseckej literatúry.

Ak ide o to, čo učí študentov, pristupuje k tomu:

- D) Pozrieť sa, ako sa to robí v iných krajinách.

Bod A treba v každom prípade realizovať, aj keď (ako možno čakať) odpovede budú silne subjektívne zafarbené. Nesmieme byť prekvapení, ak dvaja pracovníci, sediaci v tejže miestnosti, ale pracujúci v iných úzkych oblastiach, dajú dosť odlišné odpovede.

Pokusím sa teraz vysvetliť, prečo bod C, ktorý je z hľadiska „vecného“ mimoriadne užitočný, nie je pre účely vyučovania najvhodnejší. Tak, ako sú kybernetika a informatika „definované“, neexistuje vlastne odbor matematiky, a to včítane odborov veľmi abstraktných, ktoré by ste tu nenašli zastúpené. Stačí sa pozrieť do takých časopisov, ako je napr. naša Kybernetika, sovietska Kybernetika, alebo Peredača informácií, Information and Control, Mathematical System Theory, atď, atď. Vymenované časopisy (a mnohé ďalšie) sú matematického charakteru. Ale aj časopisy viac technicky zamerané, ako napr. Avtomatika, Avtomatika i telemekhanika, atď. nedávajú oveľa iný obraz. Nemá zmysel, aby som v hromade 50–60 časopisov tohto druhu hľadal, ktoré sú najreprezentatívnejšie. (Preto aj ten výber treba považovať za celkom náhodný.) Okrem toho existujú v našich knižniciach desiatky sborníkov (napr. veľmi osožné série Voprosy kybernetiky alebo Kybernetičeskij sbornik).

Zo všetkého toho vyplýva jeden poznatok: Pre *vlastnú vedeckú činnosť* v týchto odboroch sú potrebné pomerne hlboké vedomosti z matematiky. To cítim dosť často „na vlastnej koži“, keď mám odpovedať na otázku 35–40ročného pracovníka, prečo neučíme tú matematiku, ktorú „on potrebuje“. (Samozrejme ide o človeka, ktorý chce sám aktívne pracovať.) Dá mi dosť námahy dokazovať, že matematiku sa treba doučať aj po skončení štúdia, a že špeciálnym partiami nemožno porozumieť bez znalostí základných poznatkov. A túto vec nevyrieši prídanie nejakej vyučovacej hodiny navyše. Aj tak niekedy pochybujem, že je ochotný so mnou súhlasiť.

Najpriateľnejší (a najmenej namáhavý) je bod B. Existuje veľa monografií, ktoré nám dávajú predstavu o tom, čo sa tu z matematiky používa. Stačí si vziať napr. knihy vyšlé za posledných 10 rokov. Prehľad o nich je v Referatívnom žurnále – matematika alebo v Mathematical Reviews. Je toho veľa a iste postačí aj štvrtina z nich. Keď dostatočne dlho *listujeme* v týchto knihách, prideme na to, že existujú isté partie matematiky, ktoré sa často vyskytujú. Nie sú príliš ťažké a tvoria akúsi matematickú kostru, na ktorú sa mnohé iné partie dajú „navesiť“.

Nasledujúci výpočet si nerobí nárok na úplnosť, a poradie odpovedá obvyklému matematickému členeniu (nie dôležitosti pre pedagogické účely).

Pre *automatizáciu* ide o tieto partie:

1. Podrobnejšia znalosť teórie matíc.
2. Diferenčné rovnice a Z-transformácia.
3. Problémy stability lineárnych a nelineárnych rovníc.
4. Parciálne diferenciálne rovnice.
5. Variačný počet.
6. Počet pravdepodobnosti. Teória informácií a kódovania.
7. Stacionárne náhodné procesy a korelačná analýza.
8. Teória optimalizácie.

K tomu treba poznamenať, že mnohé z týchto vecí sa dajú na úrovni pestovať len za predpokladu znalosti (aspoň základov) funkcionálnej analýzy.

Pre *počítače* (respektíve informatiku) ide o tieto partie:

1. Diskrétné algebraické štruktúry (včítane grafov a kombinatoriky).
2. Podrobnejšia znalosť lineárnej algebry (včítane matíc).

3. Počet pravdepodobnosti. Teória informácií a kódovania.
4. Matematická štatistika.
5. Operačná analýza a teória hier.
6. Teória automatov a jazykov.
7. Teória algoritmov.

Tieto partie vyžadujú istý stupeň abstraktného myslenia, ktorý vopred nie je možno predpokladať.

Takýto program je samozrejme *nereálny* pre študenta aj aspiranta. Aj profesionálni matematici sa z toho v priebehu štúdia učili iba časť. Keď teda predsa len chceme, aby budúci inžinier sa niečo dozvedel, musíme škrtať. Nech zvolíme akýkoľvek názov, obsah bude nevyhnutne obmedzený. Umením je vedieť urobiť vhodnú obsahovú náplň.

Obráťme sa stručne k bodu D. Problémy, ktoré máme my, majú aj iní. Zostaviť vhodné študijné programy – to trápi aj iných. Existuje niekoľko učebných pomôcok, ktorých slovenský názov by bol „Matematické základy kybernetiky“. Mám poruke tri také knihy, ktoré vyšli za posledné 3 roky. Ide o 400stránkové knihy. Nemôžem tvrdiť, že sú mi osobne veľmi po chuti. Je to často voľné vyprávanie, a mnoho pojmov, ktoré sa potom nepoužívajú. Je to skôr pomôcka pre čitateľa, ktorý číta odborný text a potrebuje si ozrejmiť pojmy. Ničmenej aj to dáva istú informáciu o tom, čo by sa asi mali študenti učiť. Veľmi dobrou pomôckou sú aj učebné plány a sylaby z MEI. Pre informatiku mám k dispozícii návrh niekoľkých variant, ktoré odporúča špeciálne zostavená komisia pre americké vysoké školy.

Pri návrhu, ktorý za chvíľu poviem, mám na pamäti tieto momenty:

1. Serióznosť vyžaduje postaviť radšej minimálny plán a nežiadať nerealizovateľné.
2. Inžinierske vzdelanie u nás musí byť širšie. Veľmi dobre vieme, že 50 % absolventov nakoniec pracuje v inej špecializácii alebo inom zameraní, než je to, na akom skončili vysokú školu.
3. Predmety a ich náplň treba vybrať tak, aby učili študenta novým metódam, ktoré ešte nepozná, a ktoré sa používajú na rozhraní matematiky a aplikácií matematiky čoraz častejšie.

Ako *jednu možnú variantu* (z nie príliš veľkého počtu prijateľných variant) navrhujem toto (za predpokladu, že základný kurz bude taký, ako som ho na začiatku uviedol):

Pre špecializáciu Automatizačná technika:

5. sem. Matematika pre automatizáciu a reguláciu, 4/2,
5. sem. Základy počtu pravdepodobnosti, 3/0,
6. sem. Elementy stochastických procesov, 3/0,
6. sem. Teória informácií a kódovania, 3/0.

Teda: V zime 7/2, v lete 6/0.

Pre špecializáciu Elektronické počítače:

5. sem. Diskrétna matematika, 4/0,
5. sem. Základy počtu pravdepodobnosti, 3/0,
6. sem. Automaty a jazyky, 3/0,
6. sem. Teória informácií a kódovania, 3/0.

Teda: V zime 7/0, v lete 6/0.

Asi poviete: Mnoho kriku pre nič! Na čo bol ten dlhý úvod? Ten úvod bol potrebný, aby som naznačil, *ako sa k takému návrhu dôjde*. To, pravda, bol len náznak odôvodnenia. Ak chcem tento príhovor v rozumnom čase skončiť, nemôžem sa tu ďalej o tom širiť. Verím, že v diskusii bude na to dosť príležitosti. Ak aj taký návrh prijmeme, vec sa zďaleka nekončí. Obsah vypracuje matematik, ale nemálo má k tomu čo povedať aj ten učiteľ, ktorý tieto veci v svojom predmete používa (alebo by mal používať). To nie je jeho právo, to je jeho povinnosť. To vyplýva z axiomy 1.

K tomu je potrebná jedna dôležitá poznámka: Existencia počítačov oživila záujem o *numerické metódy*. Nie je otázka, či ich preberať. Otázka je iba, či preberať numerické metódy ako zvláštny predmet, alebo ich vsunúť do kurzu analýzy, resp. algebry. Podľa jedného názoru je lepšie vsunovať. Nielen, že sa osvieži látka, ale nútíme tým študenta znova si premyslieť pojmy. (Keď berieme Simpsonove pravidlo a pod., študent je nútený si znova premyslieť pojem integrálu. Pri numerickom riešení diferenciálnych rovníc si objasní pojem a dôležitosť počiatočných podmienok, atď.) Existujú kontraargumenty. Pri každej numerickej metóde treba robiť odhady chýb, a tie vyžadujú predsa len trošku hlbšie znalosti. O tom možno diskutovať. Konkrétne numerické metódy vhodné pre počítač, nemusia byť totožné s matematicky najjednoduchšími, resp. najelegantnejšími metódami. Najst' najvhodnejší algoritmus pre počítač hraničí s tým, čo sa obvykle nazýva „art of computing“ (umenie numerických výpočtov). Aj keď numerické metódy patria do tzv. „čistej“ matematiky (a ako „čistej“!), výber a zdôvodnenie výberu metódy patrí skôr do prednášok o počítačoch. (Je jedným z najnovších nedorozumení, ktoré je široko rozšírené, považovať numerické metódy za „aplikovanú matematiku“.)

II

Dovoľte mi teraz, aby som sa obrátil k druhej časti príhovoru a povedal niekoľko slov všeobecnejšieho charakteru. To neznamená, že nebudem hovoriť o konkrétnych veciach. Naopak! Chcem sa dotknúť *obmedzeného počtu veľmi konkrétnych problémov*.

Chcem povedať najprv niekoľko slov o aktuálnej téme, súvisiacej s Uznesením Predsedníctva ÚV KSČ o ďalšom rozvoji vzdelávacej sústavy. Stranícky dokument hovorí o *obsahovej* prestavbe vysokoškolského štúdia. Z toho hľadiska som hovoril predovšetkým o tom, čo nového by sme mali študentov učiť v dvoch špecializáciach. Obsah predmetov, medzi nimi aj matematiky ako predmetu výuky, sa stále mení. Aj stranícky dokument hovorí, že nejde o nejaký jednorázový akt. Pritom sa má počet týždenných hodín ustáliť na rozumnej miere, aby študenti mali čas sa učiť (rozumej rozmyšľať). To je určite správne.

Mám ale isté obavy. Nesmieme (nie ako matematici, ale ako učitelia, ktorým je zverená výchova mládeže) dopustiť, aby sa dobrá myšlienka zvrhla na škrtanie a pridávanie hodín, bez ohľadu na obsah. To by bol mechanický, ba čo viac, byrokratický prístup. Príkladom na taký nesprávny prístup je požiadavka, v zmysle ktorej mám do vopred daného počtu hodín „dosadiť“ náplň bez znalosti vecných úvah, na základe ktorých k zmenám voči minulosti (niekedy nemalým) prišlo. Nevieť tedy ani, čo z doterajšej látky vynechať alebo potlačiť. Princíp „aby vyšiel súčet hodín a skúšok“

a „aby boli všetci spokojní“, je príliš primitívny, než aby sa mohol nahlas uplatňovať. Ale v podvedomí existuje. Pritom naprostá väčšina učiteľov dobre vie, že závažnosť rôznych predmetov je rôzna a že priemerný študent potrebuje na strávenie rôznych predmetov niekedy dosť odlišné časové rozpätie.

Samozrejme nemám právo kritizovať iné odbory. Pre určenie výmery hodín a látky z matematiky sú rozhodujúce potreby predmetov, v ktorých sa matematika bude používať. To je nevyhnutné lojálne akceptovať. Ak je hodín málo, sú dve možnosti. Prvá možnosť: Nahustiť látku, čo vedie k tomu, že prednáška stratí matematický charakter a stane sa zbierkou predpisov. Druhá možnosť: Vynechávať celé partie. Prvú možnosť osobne odmietam.

Tendencia „odbaviť“ matematiku a fyziku za minimálny počet semestrov, a to čo najskôr, je dedičstvom počiatku tohto storočia. Dnes sa mi to vidí anachronizmom. Názov „základné štúdium“ môže byť pracovné označenie, ale sotva niečo viac.

Pokiaľ viem, matematici nemusia nariekať na to, že by mali „starosti s plnením noriem“. Existuje veľmi pádny dôvod pre všetky odvetvia inžinierskeho aj prírodovedného smeru, aby sa na matematike alebo fyzike nešetřilo. Celá spoločenská atmosféra u nás sa vymanila z predstavy, že študent po skončení štúdia je „hotový človek“. Musí sa aj ďalej učiť. Lenže, aby sa matematiku mohol doučať z kníh, na to musí mať solídne základy, a aj tak to ide ťažko. Kde inde ako na vysokej škole má solídne základy získať?

Mám v tomto smere isté skúsenosti aj z posledných rokov. Viac ako 5 rokov konám špeciálne prednášky pod spoločným názvom „Vybrané kapitoly z diskretnéj matematiky“. V tomto (zatiaľ 10 semestrálnom) kurze som bral napr. algebraické štruktúry, logické obvody, automaty, počet pravdepodobnosti s podrobnou teóriou Markovovských reťazcov, teóriu kódovania, veľmi podrobne teóriu informácií, atď. Chodí tam 80–120 pracovníkov vo veku 25–50 rokov z katedier, z ústavov SAV a z výskumných ústavov. Z desiatok diskusií vyplýva, že ide o veci, ktoré sú im osožné. Sami by sa to však z rôznych dôvodov asi neučili. Učiť sa z knihy a živé slovo je rozdiel.

Druhá poznámka, ktorú mám na okraj obsahovej prestavby, je táto: Podľa môjho názoru nie je rozumné trvať na tom, aby všetky fakulty rovnakého zamerania v republike mali absolutne rovnaký študijný plán a rovnaké osnovy. (Samozrejme som takúto požiadavku v nijakom straníckom dokumente nenašiel.) To by mohlo viesť k zníženiu úrovne. Musí existovať istá konkurencia medzi jednotlivými vysokými školami. Je nedobré ju umele brzdiť. Treba udržať na uzde výstrelky a pritom uniformovať povedzme na 75 %. Nakoniec ani personálne ani vecné možnosti všetkých fakúlt nie sú rovnaké. Vrchným arbitrom v týchto veciach sotva môže byť nejaký vrchnostenský príkaz; skôr kolektívna skúsenosť. Prečo by sme mali postupovať tak, ako (pokiaľ viem) v nijakej inej krajine sveta?

III

V tomto príhovore som úmyselne hovoril málo o *studentoch* a vonkoncom som neosočoval stredné školy. Nie preto, že to považujem za nevkusné, ale preto, že by to bolo nespravodlivé.

Náš „abstraktný“ študent sa učil na nižších stupňoch školy najmenej 4 roky algebru, trigonometriu, analytickú geometriu, niečo o funkciách. Potom sa učí, dosť odlišným štýlom, dva-tri roky na vysokej škole. Ak jeho vedomosti majú byť aspoň trochu trvalé, nesmie byť ani matematiky príliš mnoho. To maximum je, hádam, 10 hodín týždenne (prednášok a cvičení spolu). Treba čas na trávenie. Jeho kapacita je obmedzená. Mnohí hovoria, že cvičení treba mnoho (hádam viac ako prednášok). Tým sa dá docieľiť súbežnosť štúdia. Neviem, či je to naozaj tak. Myslím si, že pokiaľ študent sám, bez pomoci, nezačne počítat a päťkrát sa sám nezmylí, nebude látke nikdy poriadne rozumieť. Preto je nevyhnutné vyberať pre nich vhodne volené „domáce úlohy“ a radiť im, ktoré príklady z existujúcich zbierok by si mali sami prepočítať. „Povinná kontrola“ je, pravda, dosť iluzorná.

Som zásadne proti tomu napchávať látku do prvých semestrov. Spoliehať sa na to, že študent si látku doma dôkladne premyslí je dosť nerealistické, pokiaľ je tej látky príliš mnoho. Výchova k samostatnému mysleniu je síce úlohou vysokej školy, ale z praxe viete, že to trvá veľa rokov, než sa človek naučí v istých kategóriách myslieť sám. Obzvlášť u poslucháča, ktorý (či chceme alebo nie) je nútený sa naučiť myslieť rôznym spôsobom, nie vždy exaktne matematicky.

Na túto obmedzenú kapacitu treba prihliadať pri rozložení počtu hodín do jednotlivých semestrov.

A snáď by som povedal niekoľko, možno nepopulárnych, slov *o učiteľoch*.

Niektorí naši učitelia (menovite mladší) sa často (niekedy príliš často) rozčulujú nad slabunami a slabosťami študentov. Aj nad tým, že si nevedia zadeliť čas. Mám na to veľmi provokačnú otázku. Naučí sa aj každý učiteľ matematiky za jeden rok toľko nového, koľko žiada od študenta? Asi nie. Samozrejme viem, že si utvrdzuje, spresňuje a prehľbuje poznatky, píše skriptá, zdokonaľuje metodiku, vykonáva dôležité pedagogické a spoločensky osožné funkcie.

Tak celkom bez problémov to však nie je. Prijali sme axiómu, že matematika je samostatná veda. Úlohou matematika, profesionála, je pestovať tie partie matematiky, ktoré sú potrebné pre rozvoj matematiky a jej aplikácií. Vývin matematiky je možný len za súčasného harmonického rozvoja všetkých jej častí. Keď sa však začne preceňovať tradičný obsah a tradičné formy a nepotlačia sa tendencie k nevšímavosti k aplikáciám v iných vedných odboroch, hrozí nebezpečenstvo sterility. To platí pre každého matematika, nech je zamestnaný kdekoľvek. (V posledných úvahách možno miesto slova „matematik“, dosadiť „pracovník ktoréhokoľvek vedného odboru“.)

IV

Dovoľte mi, aby som po týchto „umravňujúcich rečiach“ povedal niekoľko slov *o metóde vyučovania*.

Ako prebieha proces matematického *objavovania*? Máme najprv izolované poznatky, triedime ich, hľadáme vzťahy medzi nimi, dávame ich do celkov. Axiómy, logika, presnosť mi najprv nepomôžu. Treba istú „predvídavosť“. To, čo sa pritom deje, patrí – hádam – niekam do psychológie, rozhodne mimo matematiku. Ale je to tu! Ako ďalší

krok verifikujeme, či je pravda to, čo sa nám zdalo byť pravdivým. Často sa mýlime. Nakoniec nájdeme predpoklady, za ktorých sa tvrdenia, ktorých platnosť sme tušili, dajú naozaj odvodiť.

Vyučujeme aj takto? Samozrejme, že nie. Nemáme čas a bolo by to často nerozumné. Lenže – márna sláva – akýkoľvek učebný proces by mal začať istými intuitívnymi úvahami. V istom zmysle musí ísť študent po ceste, po ktorej bola matematika objavo- vaná. Samozrejme, po skrótenej ceste. Tieto intuitívne úvahy by mali byť rozvinuté prv než pravidlá pre operácie. V stredoškolských osnovách je na to relatívne dobre pamätané. Vo vysokoškolských učebniciach sú tie partie, ktoré v našom žargóne voláme „klasický- mi“, podávané spôsobom, ktorý zďaleka nezodpovedá postupu objavu. Vynechávajú sa celé dlhé procesy systematizovania poznatkov, ktoré v prvej fáze zdanlivo nesúviseli. Vynechávame proces hľadania. Aplikujeme krásne a hladko. Niet divu, že študent sa často zhrozí, ak dostane takúto „vypolitúrovanú“ teóriu. Nevidí napríklad vôbec cestu, ako by sám mohol robiť samostatný výskum v matematike, t.j. nielen nachádzať nové veci, ale aj znovuobjavovať známe veci. Toto posledné sa z hľadiska osobného zadosťučinenia študenta (a aj učiteľa!) nesmie podceňovať.

Každé vyučovanie by sa malo začať *motiváciou*. Ona prispieva k tomu, že študent začína intuitívne cítiť, ako by mohli vyzeráť výsledky, ku ktorým smerujeme a ako sa k nim dopracovať. Nadto cíti, že výsledky, ku ktorým smerujeme, by mohli mať „prak- tickú“ cenu. Skúsený učiteľ vie nenásilnou formou nanútiť študentovi cestu, po ktorej sa má jeho myslenie v konkrétnych prípadoch uberať. Tieto všeobecne známe princípy by mali byť nielen teoreticky prijaté, ale aj praktizované. A v zvýšenej miere na univerzi- tách, pri výchove mladých odborníkov. O koľko menej by bolo nešťastných mladých ľudí, ktorí šli s nadšením študovať matematiku, ale ktorých nadšenie rýchlo „spľaslo“.

Namietnete, na vysokých školách technických niet na to dosť času. Viem, ľudia, ktorí určujú učebné plány, nebývajú obyčajne odborníkmi v metodike. Musíme sa ale vyrovnáť s realitou. Okrem toho metodika vyučovania matematiky a fyziky (nie našou zásluhou) aj pokiaľ ide o vysokoškolskú látku, je podstatne lepšie rozpracovaná než napr. metodika technologických predmetov. Každý uzná, že tendencia vyučovať začiatky diferenciálneho a integrálneho počtu bez náležitého názorného pozadia nemôže mať úspech.

Matematika je často vystavovaná kritikám. Vecné pripomienky zo strany tých, ktorí matematiku denne vo svojej pedagogickej alebo vedeckej práci potrebujú, považujem za veľmi zdravé a treba ich rešpektovať. Na technike sa vyčíta matematikom, že neučia „inžiniersku“ alebo „aplikovanú“ matematiku, ale „univerzitnú“ matematiku. A najmä, že neučia aplikácie.

Nad tým som často rozmýšľal. Majú pravdepodobne na mysli skôr motivácie a malé úlohy, pri ktorých má vonkajší obal fyzikálny nádych. Veď čo by robili niektoré tzv. odborné katedry, keby sme my prebrali teóriu elektromagnetického poľa alebo teóriu regulácie alebo teóriu nosných stien. (Veď je to skoro „čistá“ matematika.) Drobné, niekoľkoriadkové aplikácie sú skutočne vhodným spestrením látky.

Som, samozrejme, proti prílišnej orientácii na rutinný aspekt matematiky. Musím však priznať, že tomu často nahrávame. Málo motivácie, mnoho viet a mnoho pravidiel pre operácie vedú nepriamo študenta k tomu, že trávi svoj čas učením sa, ako tieto

pravidlá používať v obmedzenom okruhu príkladov. Pritom väčšinou nepozná hranice aplikability. Prispieva k tomu aj to, že sme niekedy nútení — a ani to inak nejde — uvádzať aj tvrdenia bez teoretického zdôvodnenia. Celý tento postup je zaužívaný a ťažko ho vykoreniť.

Sebakriticky priznávam: Kážem vodu a pijem víno. Sám som rád, keď študent na skúške aspoň volačo vypočíta, aby som ho nemusel poslať domov. Po istom počte rokov sa človek stáva veľkorysým. V tejto súvislosti mi ale nejde o skúšky, ide mi o prednášky a cvičenia, ktoré (dúfajme!) zanechávajú v študentovi trvalejší dojem ako obojstranne nepríjemné „súboje“ na skúškach.

V

Je rozdiel medzi výukou matematiky a *výukou aplikácií* matematiky.*) Na vysokej škole sa aplikáciami matematiky v ostatných odboroch dosť často rozumie šikovné manipulovanie so vzorcami, odvodenými na prednáške. To je nedorozumenie, a také jednoduché to nie je. Tradičný obraz konzumenta matematiky ako človeka, ktorý pozrie do „spravočníka“ a nasadí rutinný výpočet, je veľmi staromódny. Ťažkosť je (okrem iného) v tom, že keď chce v „praxi“ aplikovať matematiku na problém, ktorý sa mu vyskytne, nenajde skoro nikdy potrebný postup doslova reprodukovateľný v učebnici alebo v príručke vzorcov. Vždy sa tam vyskytne nejaký, čo i len malý, háčik. Treba sa vedieť prispôbiť novej situácii. A to je možné len vtedy, keď študent (a nielen študent) vie „kedy“, „prečo“ a „ako“ matematika „funguje“. To je garancia proti chybám v matematike a proti nesprávnemu postupu v aplikáciách.

Keď sa pozrieme podrobnejšie ako sa formuje každá trocha serióznejšia aplikácia, zistíme, že sa tu prísne deduktívne matematické metódy striedajú a miešajú s induktívnymi a experimentálnymi metódami.

Vzniká teda otázka: Je pedagogika aplikácií iná ako pedagogika matematiky? Jadro výuky matematiky je vyjadrené týmito slovami: „Tu je problém, rieš ho.“ Alebo „Tu je veta, dokáž ju.“ Otázka pri akejkolvek aplikácii znie „Tu je situácia, rozmýšľaj o nej“.

Podľa môjho názoru nie je ten rozdiel diametrálny. I v matematike musíme dať študentovi (i sebe!) možnosť pokúšať sa ísť zlými cestami a vrátiť sa. Krátko: Možnosť rozmýšľať. Najstí na prvý raz najlepšiu cestu sa podarí málokedy, a to už musí ísť o človeka s vysokou matematickou kultúrou. Podstatné je porozumieť: „kedy“, „prečo“ a „ako“ ten alebo iný matematický postup vedie k cieľu.

Bohužiaľ, realita je často iná, nielen v matematike, ale aj v tzv. odborných predmetoch. Tu je veľmi často tendencia začať tým, že sa napíšu matematické formulácie, z nich sa vychádza a tie sa obsérne (často zbytočne obsérne) riešia. Študent (alebo čitateľ) nemá možnosť participovať na tvorbe modelu, ktorý je sám o sebe abstrakciou fyzikálnej reality. Dávno známe argumenty, že na to nie je čas, neobstoja. Pri takom postupe

*) Túto časť rozviedol autor v príspevku, ktorý predniesol na Konferencii o vyučovaní matematiky v období vedeckotechnickej revolúcie, Brno 28.—30. septembra 1976. (Poznámka redakcie)

študent nemôže byť spokojný. Tu je jeden z dôvodov, prečo študent (a nielen študent!) nevie, ktoré poznatky z matematiky má použiť, a to ani v tom prípade, ak tieto poznatky naozaj má.

Nedostatok času mi nedovoľuje tieto otázky širšie rozviesť.

VI

Než skončím, nemôžem si odpustiť niekoľko poznámok o *presnosti* a o *jazyku*, ktorý sa používa pri vyučovaní matematiky. Nevymyslel som to všetko sám.

Je iste zarážajúce čítať (ako to bývalo v starších učebniciach), že „funkcia je výraz obsahujúce premenné“. Alebo, že „dve kuželosečky sa vo všeobecnosti pretínajú v 4 bodoch“. Moderná matematika hodila takúto terminológiu cez palubu. Netreba sa nad tým rozčulovať. Euler a Cauchy robili horšie veci. Treba na to hľadieť historicky a každého posudzovať v dobe, v ktorej pracoval.

Vidí sa mi však, že sa objavujú tendencie k istému druhu *pedantnosti* a je možné, že sa nimi aj niekedy čosi zakrýva. Matematika je plná slovných obrátov, ktoré by sme pokojne mohli nazvať „slangom“. Ale bolo by šialenstvo mnohé z nich vyhodíť. Nemôžeme klásť trvale kvantifikátory pred každú rovnicu (i keď by to bolo logicky treba). Nemá zmysel miesto (každému pochopiteľného) slovného obratu „riešenie rovnice“ hovoriť o „množine hodnôt, pre ktoré istý predikát má hodnotu 1“. Nemôžeme trvale hovoriť o dvoch druhoch znamienka „minus“ (jedno pre záporné číslo, jedno pre odčítanie). Je namáhavé rozlišovať medzi funkciou a hodnotou funkcie v bode x . (Aj keď dokonale rozumiem rozdielu medzi tými pojmami, je namáhavé raz hovoriť $\sin x$ a inokedy len \sin .)

Pojem množiny. Nie je otázka, či ho používať. Otázka je, kedy používať. Len keď sa to naozaj vyplatí. Pýtam sa vás, zvýši sa naozaj jasnosť pojmu funkcia, keď ju definujem ako množinu usporiadaných dvojíc? Mne sa vidí, že sa tu nahradzuje jasnosť pedantériou. Majú z toho študenti nejaký osoh, keď sa zavedie všeobecný pojem relácie, ale v takej všeobecnosti sa ďalej nepoužíva? Vrchol provokácie len príde. Nie som prívržencom toho, aby sa na strednej škole alebo v prvom ročníku vysokej školy učila formálna logika. (Samozrejme v treťom ročníku pri logických obvodoch áno.) Som teda vedome nemoderný.

Odkiaľ pramení moja „nemodernosť“? Mám takéto skúsenosti (z techniky aj univerzity). Je veľa študentov, ktorí sú ohúrení nepriamym dôkazom. Nevedia urobiť negáciu nejakého tvrdenia. Nevedia často, načo sa používajú kontra-prípady. Nevedia rozlíšiť význam slov aspoň, najviac, práve, atď. To sa dá naučiť za niekoľko málo týždňov, a to ich musíme učiť najprv.

Mohol by som rozviesť, ako sa nezriedka všelijakými zložitými zápismi popisujú situácie, na vysvetlenie ktorých stačí jednoduchý schematický obrázok. To síce budí dojem učnosti, ale pedagogicky to odrádza.

Štýl, ktorým sa píše vedecké pojednania, štýl učebníc a štýl prednášok nesmú byť rovnaké.

Podstatou matematiky je invencia. K tej nevedie cesta cez nijaký druh verbalizmu, ani cez zložené zápisy.

Záverom

Mal som veľa kritických pripomienok. Dívam sa však do budúcnosti optimisticky. Čo ma k tomu oprávňuje? Všeobecný rast matematickej kultúry u nás je veľmi výrazný. To vedia posúdiť predovšetkým tí, ktorí poznajú historické súvislosti. Patrím, spolu s niekoľkými tu prítomnými priateľmi, k poslednej predvojnovovej generácii, ktorá v plnom vedomí viac-menej dospelého človeka mala možnosť poznať československú matematiku v rokoch 1936–38, v rokoch tesne po oslobodení a mám možnosť tento vývin sledovať i dnes. Je veľmi priaznivý. A to ma oprávňuje k optimizmu.

Metody získávání velmi nízkých teplot

Stanislav Šafrata, Řež u Prahy

1. Úvod

Oblast v blízkosti absolutní nuly teploty, považovaná do zrodu kvantové fyziky za oblast absolutního klidu, lákala do nedávna jen malou část „nepraktických“ fyziků a práce v oblasti u absolutní nuly teploty byla jen exotickým zájmem několika jedinců a malých kolektivů. Dnes se však fyzika velmi nízkých teplot široce rozvíjí a dosáhla významných výsledků. Objevila např. dva nové stavy hmoty – supravodivost (stav s nulovým elektrickým odporem a nulovým magnetickým polem) a supratekutost (stav s nulovou viskozitou), dvě nová pravidla kvantování (pro magnetický tok v supravodičích a pro mechanickou cirkulaci kolem vírů v supratekutém heliu), nové vlnové děje v látkách (nulý a druhý až čtvrtý zvuk), nové fyzikální zákonitosti v tzv. kvantových krystalech (po snížení rušivého tepelného pohybu) a další jevy, které se staly základem nových možností výzkumu látek (např. Josephsonovy jevy). Význam nízkých teplot v očích laické i technické veřejnosti stoupl zejména v souvislosti s existujícími a perspektivními aplikacemi supravodivosti ve fyzice, v přesné a velmi citlivé měřicí technice, ve výpočetní technice, v elektrotechnice, energetice, rychlé veřejné dopravě a zdravotnictví.

Prvním krokem při výzkumu za nízkých teplot i při různých nízkoteplotních aplikacích je chlazení zkoumaného nebo využívaného předmětu. Úkolem tohoto článku je seznámit čtenáře s některými nejdůležitějšími metodami získávání nízkých teplot. Nebudeme se