Eva Milková
Moderní pohled na „jistý problém minimální“

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 45 (2000), No. 4, 265--273

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141045`

Moderní pohled na „jistý problém minimální“

Eva Milková, Hradec Králové

Abstrakt: V PMFA 99/3 se mohli čtenáři seznámit s příspěvkem, jehož první část se zabývala rozborem řešení problému minimální kostry, které uvedl Vojtěch Jarník v článku *O jistém problému minimálním* [Jar30]. Především proto, že u zrodu této klíčové úlohy kombinatorické optimalizace stáli dva významní čeští matematici, nabízí následující pojednání celkový pohled na tento známý a stále aktuální problém. Od původní formulace se přeneseme k její formulaci v současné terminologii teorie grafů, představíme základní algoritmy, které ji řeší, a uvedeme důvody, proč je tento dávno již vyřešený problém stále živý.

Ohlédnutí do historie

Ocitáme se na sklonku 20. století. Zhruba před sto lety se v naší zemi narodili dva později velmi významní matematici Vojtěch Jarník a Otakar Borůvka. U příležitosti oslav výročí jejich narození jsme měli v nedávné době možnost zavzpomínat na oba tyto velikány, jejich dílo a jejich vědecký přínos pro mnohé partie matematiky. Účelem dalších řádků není opakovat již napsané, pouze připomenout podstatné skutečnosti související s problémem nalezení minimální kostry grafu, kterému je tento článek věnován.

Na přelomu let 1925–1926, v době, kdy na jižní a západní Moravě měla probíhat elektrifikace, se Otakar Borůvka seznámil s pracovníkem Západomoravských elektráren Jindřichem Saxelem. Ten jej požádal o pomoc při vyřešení problému, na kterém právě pracoval. Šlo o to, kudy a jak vést trasu, která měla spojovat několik desítek obcí v oblasti Moravy, aby byla co nejkratší, a tím co nejúspornější. Otakar Borůvka nejen problém správně zformuloval, ale též vyřešil. O konstrukci se zmínil v článku *Příspěvek k řešení otázky ekonomické stavby elektrovodních sítí* [Bor26a] a matematické zpracování problému uvedl v článku *O jistém problému minimálním* [Bor26].

V době, kdy ještě neexistovala vhodná terminologie, byl popis a důkaz Borůvkovy konstrukce poměrně komplikovaný. Tuto skutečnost, a zároveň důležitost problému, si záhy uvědomil další český matematik Vojtěch Jarník. Napsal článek se stejným názvem *O jistém problému minimálním* s podtitulem *(Z dopisu panu O. Borůvkovi)* [Jar30]. V tomto článku Vojtěch Jarník navrhl jiný a jednodušší postup pro vytvoření požadované konstrukce.

RNDr. Eva Milková, Ph. D. (1954), Univerzita Hradec Králové, Fakulta informatiky a managementu, katedra informatiky a kvantitativních metod, Víta Nejedlého 573, 500 03 Hradec Králové, e-mail: `eva.milkova@uhk.cz`

Oba čeští matematici tak předběhli o čtvrtstoletí svou dobu. Zájem o uvedený problém, z dnešního pohledu o jeden z nejznámějších optimalizačních problémů, propukl s nebývalou silou až v 50. letech, v souvislosti s rozvojem počítačů. Borůvkova i Jarníkova metoda byla nezávisle znovuobjevena ještě několikrát.

Třetí řešení problému, odlišné od předchozích dvou, podal roku 1956 Joseph B. Kruskal ve své práci *On the shortest spanning tree of a graph and the traveling salesman problem* [Kru56]. Následující úryvek z dopisu J. B. Kruskala přibližuje situaci, která se váže ke zrodu tohoto řešení [Kru97]:

„Přibližně koncem roku 1954 se mi v Princetonu dostaly do rukou dva tenké listy papíru s textem napsaným v němčině. Předal mi je kdosi se sdělením, že tyto listy putovaly po katedře matematiky.

Dokument obsahoval výtah z článku O. Borůvky z roku 1926. Popisoval metodu konstrukce nejkratší kostry v grafu, pro jehož každou hranu byla známa její délka. Z metody plynul jasně důkaz, že kostra je právě jedna, jestliže žádné dvě hrany nemají stejnou délku. Zajímala mě a zdá se, že i ostatní, spíš metoda konstrukce než vlastní důkaz. Na jednu stranu byla metoda konstrukce velmi elegantní, na druhou ale zbytečně komplikovaná.

Vždy jsem se snažil zjednodušit příliš komplikovanou myšlenku. A tak jsem to zkusil i v tomto případě. Podařilo se mi to a já začal zvažovat, zda mám svou zjednodušenou verzi publikovat. Trochu jsem se rozpakoval, má metoda se mi zdála býti příliš jednoduchá. Naštěstí mě někdo v tomto směru povzbudil a já ji v roce 1956 zveřejnil. Mnoho let uplynulo, než se má jiná publikace stala tak známou jako tato jednoduchá metoda konstrukce minimální kostry!“

Také Kruskalův algoritmus byl několikrát nezávisle znovuobjeven. Přehled prací zabývajících se problémem minimální kostry grafu do roku 1985 je velmi pěkně zpracován R. L. Grahamem a P. Hellem v článku *On the History of the Minimum Spanning Tree Problem* [GraHel85]. Přestože problém minimální kostry grafu byl vyřešen, zůstal a zůstává stále v centru pozornosti mnoha odborníků. Jejich snahou bylo a je nalézt co nejrychlejší, nejdůmyslnější algoritmus na řešení problému minimální kostry nejen obyčejného grafu, ale i různých speciálních grafů, či hledání minimální kostry splňující další podmínky.

Problém minimální kostry (PMK)

Ve svém příspěvku O jistém problému minimálním formuloval Otakar Borůvka úlohu takto:

Budiž dána matice M čísel $r_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n;\ n \geqq 2)$, až na podmínku $r_{\alpha\alpha} = 0$, $r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$, kladných a vzájemně různých.

Jest vybrati z ní skupinu čísel vzájemně a od nuly různých takovou, aby

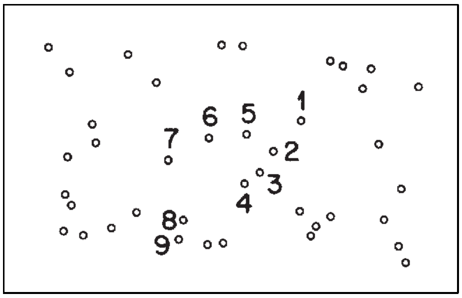
1° *bylo možno, jsou-li p_1, p_2 libovolná od sebe různá přirozená čísla $\leqq n$, vybrati z ní skupinu částečnou tvaru*

$$r_{p_1c_2},\ r_{c_2c_3},\ r_{c_3c_4},\ \ldots,\ r_{c_{q-2}c_{q-1}},\ r_{c_{q-1}p_2}$$

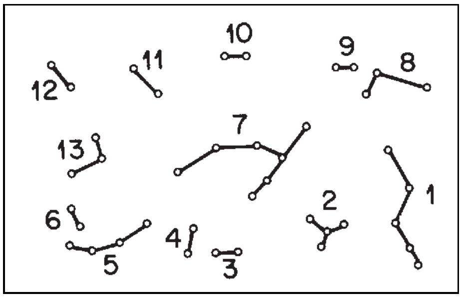
2° *součet jejích členů byl menší než součet členů kterékoliv jiné skupiny čísel vzájemně a od nuly různých, hovící podmínce* 1°.

Otakar Borůvka řešil a dokazoval uvedený problém na 16 stránkách svého příspěvku. Není divu. V té době byla teorie grafů „batole“ a v „negrafové“ terminologii nebylo vůbec jednoduché provést zápis a důkaz postupu řešení problému pomocí precizního definování skupin čísel splňujících uvedené podmínky 1° a 2°.

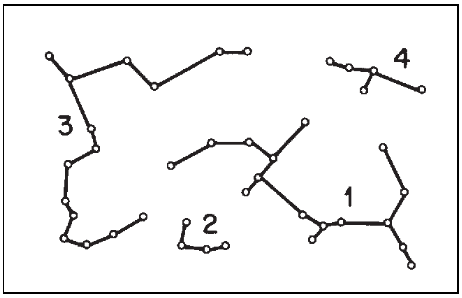
Jasnou představu svého řešení však Borůvka ukázal v práci [Bor26a] publikované v elektrotechnickém časopise na příkladě, který je speciálním případem uvedené úlohy. Šlo o propojení 40 bodů v rovině, jejichž vzájemné vzdálenosti byly vesměs různé. Úkolem bylo propojit tyto body sítí tak, aby každé dva byly spojeny buď přímo, nebo prostřednictvím jiných a aby celková délka sítě byla co nejmenší. Celý postup názorně ilustroval pomocí čtyř obrázků:



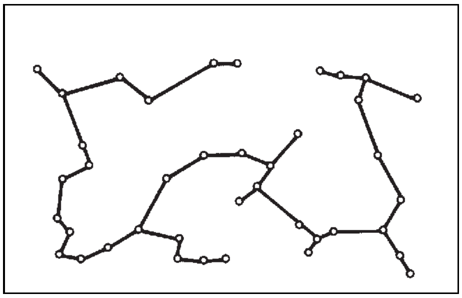
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3


Obr. 4

Každý z daných bodů (obr. 1) spojil Otakar Borůvka s bodem nejbližším, čímž získal řadu polygonálních tahů 1, 2, ..., 13 (obr. 2). Každý ze získaných tahů spojil nejkratším způsobem s tahem nejbližším, čímž získal řadu polygonálních tahů 1, 2, 3, 4 (obr. 3). Každý z těchto čtyř tahů spojil nejkratším způsobem s tahem nejbližším, čímž získal jediný polygonální tah (obr. 4), jenž řešil daný úkol.

„Jistý problém minimální“ nazýváme v současné terminologii „Problémem minimální kostry“. Jde o problém, který lze zformulovat takto:

Nechť je dán souvislý graf $G = (V, E)$ s ohodnocením hran w: $E \to R$. Mezi všemi kostrami grafu G nalezněte kostru (V, E') s minimální hodnotou $w(E')$.

Vzhledem k tomu, že v úplném grafu K_n (ten odpovídá původní představě problému) existuje n^{n-2} různých koster, probrání všech možností pro velká n nepřichází v úvahu a je dobré si uvědomit důležitost získaných výsledků.

Obecné řešení PMK

Dříve než postupně představíme základní algoritmy řešící PMK, popíšeme nejprve metodu, která řeší tento problém obecně. Obecně v tom smyslu, že tato metoda v sobě zahrnuje všechny dosud známé algoritmy. Při popisu používáme proces barvení hran.

Obecný algoritmus nalezení minimální kostry grafu

Zadání: Nechť je dán souvislý graf $G = (V, E)$ s n vrcholy a m hranami. Pro každou hranu e grafu G nechť je dáno reálné číslo $w(e)$. Úkolem je najít minimální kostru grafu G.

Řešení: Na počátku nechť je každá hrana neobarvená.

Pravidlo řezu: Zvolíme libovolný řez $R_X(G)$, který neobsahuje modrou hranu.
(Řez $R_X(G)$ v grafu $G = (V, E)$ je množina hran grafu G, jejichž jeden koncový vrchol patří do množiny X, kde $X \subseteq V$, $\emptyset \neq X \neq V$, a druhý do množiny $V - X$.)
Mezi neobarvenými hranami řezu $R_X(G)$ vybereme libovolnou tu, která má minimální ohodnocení, a obarvíme ji modře.

Pravidlo kružnice: Zvolíme libovolnou kružnici, která neobsahuje žádnou červenou hranu. Mezi neobarvenými hranami kružnice vybereme libovolnou tu, která má maximální ohodnocení, a obarvíme ji červeně.

V každém kroku algoritmu, dokud v grafu G existuje neobarvená hrana, použijeme jedno z předchozích dvou pravidel.
Modré hrany tvoří minimální kostru grafu G.

Důkaz správnosti obecného algoritmu (dále jen algoritmu) vychází ze zřejmé skutečnosti, že v každém kroku provádění algoritmu modré hrany tvoří les (modrý les) a že v každém kroku lze použít jedno ze dvou uvedených pravidel, tedy algoritmus končí po m krocích obarvením všech hran grafu G.

Zbývá ukázat, že po skončení algoritmu hrany obarvené modře tvoří minimální kostru grafu G, přičemž hrany obarvené červeně v této minimální kostře neleží:

Nechť $H = (V, E')$ je libovolná minimální kostra grafu G. Předpokládejme, že jsme v kroku k, $k \geqq 1$, provádění algoritmu, kdy všechny dosud modře obarvené hrany patří do množiny E' a žádná dosud červeně obarvená hrana do množiny E' nepatří.

a) Použijeme-li v kroku k pravidlo řezu, tj. zvolíme řez $R_X(G)$ a obarvíme zvolenou hranu e modře, nastanou dvě možnosti. Buď hrana e také leží v H, nebo neleží. V druhém případě označme P cestu v kostře H spojující koncové vrcholy hrany e. Zřejmě na cestě P existuje alespoň jedna hrana e^* taková, že e^* je také hranou řezu $R_X(G)$, je neobarvená a $w(e^*) \geqq w(e)$. Odtud dostáváme, že kostra získaná z kostry H vyjmutím hrany e^* a přidáním hrany e je také minimální kostra grafu G, tudíž i po provedení kroku k jsou opět všechny dosud modře obarvené hrany hranami minimální kostry grafu G konstruované algoritmem.

b) Použijeme-li v kroku k pravidlo kružnice, tj. zvolíme kružnici C, která neobsahuje červenou hranu, a mezi neobarvenými hranami kružnice C vybereme hranu $e = \{v, w\}$ s maximálním ohodnocením k obarvení červeně, nastanou dvě možnosti. Buď hrana e neleží v H, nebo leží. V druhém případě označme T' a T'' dva stromy, které získáme z kostry H vyjmutím hrany e. Na kružnici C musí jistě ležet alespoň jedna hrana $e^* \neq e$ taková, že má jeden koncový vrchol ve stromu T' a druhý ve stromu T'', je neobarvená a $w(e^*) \leqq w(e)$. Odtud dostáváme, že kostra získaná z kostry H vyjmutím hrany e a přidáním hrany e^* je také minimální kostra grafu G, tudíž i po provedení kroku k není opět žádná červená hrana hranou minimální kostry konstruované algoritmem.

Poznámka: Detailní důkaz správnosti tohoto a dalších algoritmů spolu s tvrzeními, týkajícími se vlastností minimální kostry grafu, je uveden v práci [Mil97].

Tři klasická řešení PMK

Nyní přistoupíme k popisu jednotlivých nejznámějších řešení. Uvažujeme zadání stejné jako v případě obecného algoritmu. Pouze u Borůvkova algoritmu navíc předpokládáme, že žádné dvě hrany nemají stejné ohodnocení (což lze předpokládat bez újmy na obecnosti).

Borůvkův algoritmus nalezení minimální kostry grafu

Na počátku nechť je každá hrana grafu G neobarvená a nechť každý vrchol grafu G představuje modrý strom (uvažujeme modrý les složený z n modrých stromů).

V každém kroku algoritmu, dokud modré hrany netvoří strom, provádíme:

pro každý modrý strom najdeme mezi všemi hranami, které se jej dotýkají (tj. mezi hranami, jejichž jeden vrchol leží v uvažovaném stromu a druhý nikoli), hranu s nejmenším ohodnocením. Tyto hrany obarvíme modře (získáme nový modrý les).

Algoritmus končí získáním modrého stromu — minimální kostry grafu G.

Jarníkův algoritmus nalezení minimální kostry grafu

Na počátku nechť je každá hrana grafu G neobarvená. Zvolíme libovolný vrchol a považujeme jej za modrý strom.

V každém z $n-1$ kroků obarvíme modře hranu s minimálním ohodnocením, jejíž jeden vrchol leží v modrém stromu a druhý v něm neleží (existuje-li jich více, zvolíme k obarvení libovolnou z nich).

Algoritmus končí získáním modrého stromu — minimální kostry grafu G.

Kruskalův algoritmus nalezení minimální kostry grafu

Na počátku nechť je každá hrana grafu G neobarvená. Hrany uspořádáme neklesajícím způsobem podle jejich ohodnocení. Každý vrchol grafu G považujeme za modrý strom.

V každém z m kroků rozhodneme o právě jedné hraně (v pořadí daném jejich uspořádáním), zda ji obarvíme modře či nikoli. Modře hranu obarvíme právě tehdy, když netvoří s modře obarvenými hranami kružnici (tj. když koncové vrcholy hrany neleží v témž modrém stromu).

Algoritmus ukončíme, jakmile je $n-1$ hran obarveno modře. Tyto modré hrany tvoří minimální kostru grafu G.

Základní rozdíl mezi uvedenými řešeními lze charakterizovat následovně:

Kruskalův algoritmus v každém kroku, v kterém dojde k obarvení hrany modře, spojuje právě dva nejbližší modré stromy v jeden modrý strom.

Jarníkův algoritmus v každém kroku rozšiřuje jediný modrý strom, obsahující počáteční vrchol, o nejbližší vrchol.

V Borůvkově algoritmu dochází v každém kroku ke spojení všech navzájem si nejbližších modrých stromů.

Poznámka: Jarníkův algoritmus a algoritmus Kruskalův jsou speciální případy následujícího algoritmu, který byl také zformulován J. B. Kruskalem v roce 1956 [Kru56]:

Zadání: Nechť je dán souvislý graf $G = (V, E)$ s n vrcholy a m hranami. Nechť V' je libovolná podmnožina vrcholů množiny V. Pro každou hranu e grafu G nechť je dáno reálné číslo $w(e)$.

Úkolem je najít minimální kostru grafu G.

Řešení: Na počátku nechť je každá hrana grafu G neobarvená.

V každém kroku, dokud není modře obarveno $n-1$ hran, provedeme:
mezi neobarvenými hranami grafu G, které jsou incidentní s vrcholem z množiny V' nebo s vrcholem modré hrany, vybereme hranu s minimálním ohodnocením, která netvoří kružnici s modře obarvenými hranami, a obarvíme ji modře.

Algoritmus končí získáním modrého stromu — minimální kostry grafu G.

Zřejmě v případě $V' = V$ algoritmus odpovídá Kruskalovu algoritmu a v případě $V' = \{v\}$ získáváme algoritmus Jarníkův.

Popsaná řešení jsou vzhledem k obecnému algoritmu založena na používání pravidla řezu. Uveďme alespoň jeden algoritmus, který naopak využívá pravidla kružnice:

Kruskalův duální algoritmus nalezení minimální kostry grafu

Na počátku nechť je každá hrana grafu G neobarvená. Hrany uspořádáme nerostoucím způsobem podle jejich ohodnocení. Každý vrchol grafu G považujeme za modrý strom.

V každém z m kroků rozhodneme o právě jedné hraně (v pořadí daném jejich uspořádáním), zda ji obarvíme červeně či nikoli. Červeně hranu obarvíme právě tehdy, když tato hrana leží na nějaké kružnici neobsahující červenou hranu.

Algoritmus ukončíme, jakmile je $m - n + 1$ hran obarveno červeně (zbývajících $n - 1$ hran tvoří minimální kostru grafu G).

Správnost všech popsaných algoritmů plyne ze správnosti algoritmu obecného. U Borůvkova řešení je vhodné si uvědomit, že zárukou toho, že v žádném kroku nedojde k vytvoření kružnice, je počáteční požadavek navzájem různého ohodnocení hran daného grafu.

Současné tendence

Již řadu let se odborníci snaží o sestavení takového algoritmu, který by nalezl minimální kostru grafu s n vrcholy a m hranami v lineárním čase.

Nejnovější výsledky získané v této oblasti ukazují, že právě Borůvkův algoritmus se v poslední době stal koncepčním základem nejrychlejšího známého algoritmu řešícího problém minimální kostry grafu. Borůvkův algoritmus lze upravit na náhodný algoritmus tak, že tento náhodný algoritmus potřebuje skoro vždy lineární počet kroků [KleTar94], [KKT95].

Zapišme Borůvkův algoritmus ještě jednou, tentokrát rekurzívně:

Zadání: Nechť je dán souvislý graf G s n vrcholy a m hranami. Pro každou hranu e grafu G nechť je dáno reálné číslo $w(e)$ takové, že pro každé dvě hrany e, e' grafu G, $e \neq e'$, platí $w(e) \neq w(e')$.

Úkolem je najít minimální kostru grafu G.

Řešení: Na počátku nechť je každá hrana grafu G neobarvená. Položíme $G' = G$.

Krok rekurze (**Borůvkův krok**):

- Pro každý vrchol v grafu G' označíme mezi všemi hranami incidentními s vrcholem v hranu s nejmenším ohodnocením a obarvíme ji modře. Získáme modrý les T' grafu G' obsahující všechny vrcholy grafu G'.

- Provedeme „zúžení grafu G'“: Každý modrý strom modrého lesa nahradíme jediným vrcholem, přičemž z grafu G' odebereme každou neobarvenou hranu mající koncové vrcholy v témž modrém stromu a také odebereme všechny paralelní neobarvené hrany (tj. hrany incidentní se stejnými dvěma modrými stromy) kromě hrany s nejmenším ohodnocením.

Rekurzi provádíme tak dlouho, dokud nezískáme souvislý modrý les T' zúženého grafu G' (modrý strom, minimální kostru grafu G').

Všechny hrany obarvené modře tvoří minimální kostru grafu G.

Ve zmíněném náhodném algoritmu hraje vedle popsaného Borůvkova kroku klíčovou roli algoritmus, který řeší tzv. „verifikační problém minimální kostry grafu“ v lineárním čase [DRT92], [Kin93]. Jeho úlohou je rozhodnout (ověřit), zda daná kostra daného hranově ohodnoceného grafu je minimální.

V algoritmu je využito jak pravidla řezu, řešeného pomocí „Borůvkova kroku“, tak pravidla kružnice obsaženého v řešení verifikačního problému.

Zdánlivě nejsložitější postup se tak ukázal z hlediska moderní teorie informatiky jako nejvhodnější.

Problém nalézt lineární deterministický algoritmus na řešení problému minimální kostry grafu zůstává však stále otevřený.

Závěr

Uvedeným příspěvkem jsem chtěla připomenout problém, jehož autory byli čeští odborníci, problém, jehož různé metody řešení poskytly a poskytují inspirace při řešení mnoha jiných úloh a který je základem dalších četných optimalizačních algoritmů. Problém, který i nadále nabízí zamyšlení, jak jej zdokonalit ve smyslu nalézt co nejrychlejší algoritmus.

Poděkování. Děkuji touto cestou panu profesorovi Jaroslavu Nešetřilovi (MFF UK Praha) za veškeré informace, rady a doporučení týkající se problému minimální kostry, které mi poskytl v rámci mého postgraduálního doktorandského studia a na jejichž základě mohl být tento příspěvek napsán.

Literatura

[Bor26] Borůvka, O.: *O jistém problému minimálním.* Práce Mor. Přírodověd. Spol. v Brně *3* (1926), 37–58.

[Bor26a] Borůvka, O.: *Příspěvek k řešení otázky ekonomické stavby elektrovodních sítí.* Elektrotechnický obzor *15* (1926), 153–154.

[Bor96] Borůvka, O.: *Otakar Borůvka.* GRANOS PLUS, Brno 1996.

[DRT92] Dixon, B., Rauch, M., Tarjan, R. E.: *Verification and sensitivity analysis of minimum spanning trees in linear time.* SIAM J. of Computing *21*, 6 (1992), 1184–1192.

[GraHel85] Graham, R. L., Hell, P.: *On the History of the Minimum Spanning Tree Problem.* Annals of the History of Computing *7*, 1 (1985), 43–57.

[Jar30] Jarník, V.: *O jistém problému minimálním.* Práce Mor. Přírodověd. Spol. v Brně *6* (1930), 57–63.

[KKT95] Karger, D., Klein, P. N., Tarjan, R. E.: *A randomized linear-time algorithm to find minimum spanning trees.* Journal of the ACM *42* (1995), 321–338.

[Kin93] King, V.: *A simpler minimum spanning tree verification algorithm.* Manuscript, 1993.

[KleTar94] Klein, P. N., Tarjan, R. E.: *A randomized linear-time algorithm for finding minimum spanning trees.* Proc. 26th Annual ACM Symp. On Theory of Computing, 1994, p. 9–15.

[Kru56] Kruskal, J. B.: *On the shortest spanning tree of a graph and the travelling salesman problem.* Proc. Amer. Math. Soc. *7* (1956), 48–50.

[Kru97] Kruskal, J. B.: *A reminiscence about shortest spanning subtrees.* Archivum Mathematicum Brno *33* (1997), 13–14.

[MatNeš95] Matoušek, J., Nešetřil, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky.* KAM Series No. 95-299.

[Mil97] Milková, E.: *Optimalizace, prohledávání a třídění stromů.* Disertační práce, MFF UK, Praha 1997.

[Neš97] Nešetřil, J.: *A few remarks on the history of MST-Problem.* Archivum Mathematicum Brno *33* (1997), 15–22.

[Tar83] Tarjan, R. E.: *Data structures and network algorithms.* Ch. 6, CBMS Regional Conf., SIAM, Philadelphia, 1983.

Od funkcí periodických ke skoroperiodickým

Alexandr Fischer, Praha

1. Úvod

V mnoha technických, ale i čistě teoretických oborech mají důležité postavení periodické funkce reprezentující periodické pohyby nebo periodické procesy. Tyto periodické pochody, zejména astronomické úkazy slunce a měsíce, se staly vlastní lidskému vědění již od pradávna. Snad by se mohlo říci, že pojem periodická funkce v intuitivní podobě je starší než sám pojem funkce.

Množinu všech celých kladných (přirozených) čísel označíme $\mathbb{N}$, množinu všech celých čísel $\mathbb{Z}$, množinu všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$, množinu všech reálných čísel $\mathbb{R}$ a množinu všech komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Doc. RNDr. Alexandr Fischer, CSc. (1933), Strojní fakulta ČVUT v Praze, Ústav technické matematiky, Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2.