Alena Kopáčková

Nejen žákovské představy o funkcích

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 47 (2002), No. 2, 149--161

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141124

Tychona se však Hájkův přístup příliš nedotkl a ve své odpovědi z 23. září 1582 zůstal neméně velkorysý. Klidně odpovídá: „... od Witticha jsem se dozvěděl, že hledáš nový život, ale teď vyrozumívám, že se Ti ve vlasti vede zase lépe a já Ti k tomu blahopřeji“[30]). Po této episodě, kterou dosavadní literatura o Hájkovi dosud neznala, se oba vědci ve vzájemné korespondenci na tři roky odmlčeli. Jejich přátelských vztahů ani následné korespondence se však toto přerušení nedotklo. Naopak v letech 1586 až 1591 byla její frekvence vůbec největší.

Pokusili jsme se analyzovat alespoň ve stručnosti prvních 5 listů ze vzájemné korespondence obou vědců. Jejich počet je však daleko větší, bylo už řečeno, že dosahuje celkem 35 dopisů. Důkladně je prostudovat a nalézt v nich další důležité a dosud neznámé skutečnosti pro Hájkovu biografii je jedním z úkolů, které čeští historici přírodních věd svému největšímu vědci 16. století — Tadeáši Hájkovi z Hájku — dosud dluží.

Nejen žákovské představy o funkcích

Alena Kopáčková, Liberec

Vždycky jsem žasl nad faktem, že učitelé přírodovědných předmětů — ještě více než ostatní učitelé — nechápou, že lidé nechápou. Nikdy neuvažovali nad faktem, že žák přichází do třídy s už hotovými empirickými poznatky. Pak už nejde o to získat vědeckou kulturu, ale přejít do jiné kultury, odstranit z cesty překážky nahromaděné každodenním životem.

(Gaston Bachelard, Utváření vědeckého myšlení, 1938)

Úvod

Pojem funkce je jedním z nejdůležitějších pojmů v matematice a od jistého školního stupně i jedním z nejfrekventovanějších pojmů školské matematiky. Při studiu fylogeneze tohoto pojmu vidíme, jak těžce a pomalu se pojem funkce do matematiky dostával; formulaci samotné definice a obecnějšímu pohledu na funkční závislost předcházela staletí vývoje kauzálního myšlení a důkladné práce s konkrétními reprezentanty funkcí.

[30]) Tamtéž, str. 68.

RNDr. Alena Kopáčková (1956), katedra matematiky a didaktiky matematiky, FP, Technická univerzita v Liberci, Hálkova 6, 461 17 Liberec, e-mail: alena.kopackova@vslib.cz

V českých školách se žáci s obecným pojmem funkce ve formě definice setkávají poprvé v 9. ročníku základní školy, případně v kvartě víceletého gymnázia. Výzkum prováděný autorkou tohoto článku na školách všech typů ukázal, že pro žáky a studenty je velmi obtížné konstruovat si obecný model pojmu funkce; někteří žáci a studenti ve svých představách setrvávají dokonce na zcela konkrétních reprezentantech separovaných modelů funkce a definice je pro ně formalita bez obsahu. Ve svém článku se budeme snažit na nejčastější z potíží, které žáci s obecným pojmem funkce mají, poukázat a hledat jejich možné příčiny. Velmi cenné poučení je možné nalézt v historii matematiky, proto se nejprve budeme věnovat stručně fylogenezi pojmu funkce.

Vývoj pojmu funkce v historii matematiky

První doklady o funkčním myšlení a matematickém vyjádření závislostí pocházejí z Babylónie ze 2. – 1. tisíciletí př. n. l. Dochovaly se tabulky funkcí, které Babylóňané využívali v astronomii, zemědělství, stavebnictví, obchodě i při výpočtu daní; šlo např. o funkce $n \mapsto 1/n$, $n \mapsto n^2$, $n \mapsto \sqrt{n}$, $n \mapsto n^3$, $n \mapsto \sqrt[3]{n}$, $n \mapsto n^2 + n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Řekové si v 6. – 5. stol. př. n. l. již uvědomovali rozdíl mezi diskrétní a spojitou veličinou, rozvíjeli infinitesimální úvahy, studovali konkrétní změny proměnné veličiny (pohyb), ale nikde nevystupovala idea obecné funkce či proměnné veličiny. Pythagorejci se pokoušeli vyjádřit vztah mezi délkou a tloušťkou struny a výškou zvuku. Geometři studovali křivky vzniklé spojitým pohybem bodu a formulovali kinematické zákony jejich vzniku. Menaechmos a Apollónios se ve 4. – 2. stol. př. n. l. snažili pomocí geometrické terminologie, tzv. symptomů, slovně popsat obecnější křivku jako libovolnou elipsu, parabolu, hyperbolu, Dioklés a Nikomédés objevili ve 2. stol. př. n. l. v souvislosti s řešením problému zdvojení krychle a trisekce úhlu křivky *kisoidu* a *konchoidu*, Ptolemaios ve 2. st. n. l. tabeloval *chordálu*.

Idea funkce poprvé vystoupila až ve středověku. Indové v 5. stol. n. l. začali používat funkci sinus. Arabský matematik al-Bírúní (973–1048) vedl úvahy o obecné křivce, ve svých úvahách však zůstal osamocen. V Evropě se v 11. – 15. stol. využívalo odkazu řecké a arabské matematiky, překládala se arabská a řecká matematická díla do latiny, prohlubovala se početní technika, používaly se indicko-arabské číslice a symboly $+$, $-$; matematika zpracovávala změnu a pohyb. Scholastici Robert Grosseteste (asi 1168–1253), Thomas Bradwardinus (asi 1290–1349), Nicole Oresme (asi 1323–1382) a Richard Swineshead (14. stol.) na univerzitách v Oxfordu a Paříži zkoumali a popisovali přírodní děje a pohyby a uvažovali o kontinuu. Oresme rozvíjel *učení o intenzitě forem* a pojímal proměnnou veličinu jako intenzitu či stupeň. Funkční závislost popisoval slovně vyjádřeným pravidlem nebo graficky, pro závislost veličin užíval ve svých traktátech „Tractatus proportionum“, „Algorismus proportionum“ termín *proportio* (poměr, vztah) a říkal: *„…jakýkoliv vztah by se ukázal mezi jednou intenzitou a druhou, tentýž vztah se nachází i mezi první a druhou čárou“* ([9], str. 141). Mezi učenci se začínala postupně vytvářet představa o zákonech přírody jako o zákonech funkčního typu a vznikaly různé obecnější teorie změny veličiny jako funkce času.

V 16. století objevil John Napier (1550–1617) logaritmy, které se staly vhodným nástrojem pro rozsáhlé numerické výpočty v astronomii a navigaci. Jeho přístup k logaritmu znovu dokazuje, že koncepce fyzikálního pohybu byla stále základní bází pro úvahy o kvantitativních změnách spojité proměnné.

V 17. století zažívala matematika přechod od konstantních veličin a čísel k proměnné veličině a nechávala se inspirovat technickými problémy. Dnes lze říci, že koncepce (převážně přírodní) zákonitosti začínala přerůstat v pojem funkční závislosti. Profese „čistého" matematika v té době neexistovala, matematik byl zároveň fyzikem, hvězdářem, mechanikem, lékařem či filozofem. Nově vzniklá analytická geometrie (Pierre de Fermat 1601–1665, René Descartes 1596–1650) umožňovala popis závislosti mezi dvěma proměnnými prostřednictvím rovnice v x i y na základě souřadnicové metody (z našeho dnešního pohledu šlo o implicitní zadání funkce, kde ovšem často bylo možné jednu proměnnou vyjádřit pomocí druhé). Descartes začal užívat pojmy *(ne)závisle proměnná*. Newton a Leibniz pokládali základy diferenciálnímu a integrálnímu počtu, ale pojem funkce stále ještě nebyl definován. Newtonovy úvahy přitom vycházely z popisu pohybu hmotného bodu, Leibniz se inspiroval hledáním tečny ke křivce. Různé infinitesimální úvahy a výpočty se objevovaly v matematice již ve starověku a před Newtonem a Leibnizem na ně navazovali Johannes Kepler (1571–1630), již zmiňovaný Fermat, Blaise Pascal (1623–1662), Gilles Roberval (1602–1675) i jiní, ale Newton s Leibnizem své metody vypracovali do obecně použitelných algoritmů a byli také první, kteří rozpoznali souvislost mezi tečnou a kvadraturou.

Isaac Newton (1643–1727) ve svém rukopise „Method of Fluxions and Infinite Series" (1671, vydáno však až 1736 po jeho smrti) užívá pojmů *fluentes quantitates*, což jsou neurčité veličiny závislé na čase, které stále rostou nebo ubývají za současného vzniku křivek následkem místního pohybu, a *fluxio*, čímž označuje rychlost růstu nebo ubývání. Později však Newton pojmenování obou veličin zobecňuje a abstrahuje do určité míry od závislosti na čase: fluentu nazývá *quantitas correlata*, fluxi *quantitas relata*. Připouští vyjádření fluenty analyticky anebo ve formě součtu nekonečné řady, „jeho" funkcemi jsou vlastně polynomy.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) zakládá své pojetí diferenciálního počtu na myšlence charakteristického trojúhelníka se stranami $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}s$ (čímž zobecňuje dřívější Pascalovu ideu), na Descartově analytickém vyjádření geometrických křivek a na teorii nekonečných řad.

V roce 1673 Leibniz **poprvé** užívá termín **funkce** v rukopise „Methodus tangentium inversa, seu de functionibus", slovo funkce má však jiný význam než dnes; vychází z geometrie, pojem je těsně svázán s křivkou a její tečnou v daném bodě křivky a funkcemi Leibniz nazývá různé *„části přímek a čar"* vznikajících při konstrukci této tečny. Slova funkce je zde užíváno ve dvojím významu: jednak ve významu jisté vlastnosti či role a jednak jako pojmenování výsledku či objektu s touto vlastností. Zdá se, že Leibnizovo chápání tohoto nového matematického termínu dobře odpovídá latinskému významu slova: *fungor* znamená vykonávat, provádět, být činný, *functio* značí činnost, vykonávání. V následujících desetiletích se slovo funkce několikrát objevilo v korespondenci matematiků, zpravidla však stále v původním Leibnizově užším významu, vedle toho však v roce 1694 Johann Bernoulli (1667–1748) označuje písmenem n „libovolné množství jakkoliv vzniklé z neurčitých a konstant" (*„posito n esse quantitatem quomodocunque formatam ex indeterminatis ex constatibus"*), ale neužívá při tom slova funkce ([9], str. 146; [18], str. 57). Významné encyklopedické dílo „Mathematisches Lexicon", které vydal v roce 1716 v Lipsku prof. Wolff, slovo funkce nijak nezmiňuje, je zde pouze kapitola o konstantě a proměnné. (Pojmy *proměnná* a *konstantní veličina* zavedl Leibniz, vedle toho se však dále užívalo i pojmu *neurčitá veličina.*)

Poprvé zformuloval definici funkce v roce 1718 Johann Bernoulli v Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris: *„On apelle ici fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constants"*, tj. *„Funkcí proměnné veličiny se nazývá* ***veličina*** *sestavená libovolným způsobem z této proměnné veličiny a konstant".* ([3], str. 457; [18], str. 60; [9], str. 147; [17], str. 52.)

Tato definice znamenala první pokus regulérně nový pojem zavést. Jaké funkce však měli matematici 18. století vlastně na mysli? Funkce byla vnímána většinou geometricky jako křivka (zpravidla taková, kterou lze načrtnout volným pohybem ruky, aniž by se zvedla ruka z papíru, což bylo tehdejší kritérium spojitosti) anebo geometricko-kinematicky jako dráha pohybujícího se bodu. Uveďme nyní ve stručném přehledu, jak vnímali pojem funkce někteří další významní matematici, jak se jejich pohled postupně rozšiřoval a definice funkce se stále zobecňovala tak, aby *obsah definice* kopíroval její tehdy známý *rozsah.*

Leonhard Euler (1707–1783) definoval funkci proměnné veličiny r. 1748 nejprve jako ***„analytický výraz*** *sestavený jakýmkoliv způsobem z této proměnné a čísel nebo konstantních veličin"* ([4], str. 22; [18], str. 61; [10], str. 250; [13], str. 36; [16], str. 8), přičemž za nezávisle proměnnou připouštěl i komplexní čísla. Za veličinu sestavenou (*compositum*) z druhých veličin považoval takovou, kterou lze z těchto veličin obdržet pomocí čtyř elementárních operací, dále odmocněním, popř. *„jakoukoliv jinou myslitelnou operací".* Rozsáhlé diskuse o obsahu pojmu funkce vedené mezi matematiky v 18. století a malá obecnost předchozí (výše uvedené) definice vedly r. 1755 Eulera k formulaci obecnější definice funkce, v níž je zdůrazněn **fenomén závislosti** veličin a nikoliv způsob vyjádření: *„Jestliže některé veličiny závisejí na druhých takovým způsobem, že při změně těchto samy podléhají změně, pak první nazýváme funkcemi druhých. Tento název má mimořádně širokou povahu; zahrnuje všechny způsoby, jakými lze jednu veličinu vyjádřit pomocí jiných".* ([18], str. 70; [10], str. 254; [16], str. 8.)

Je zajímavé připomenout, že pro Eulera byla např. funkce $x \mapsto 1/x$ všude spojitou funkcí (je totiž dána jediným předpisem), zatímco funkci $x \mapsto |x|$, jejíž analytické vyjádření vnímal pomocí dvou předpisů $x \mapsto x$ (je-li $x > 0$) a $x \mapsto -x$ (je-li $x \leqq 0$), považoval Euler za nespojitou. Pro srovnání uveďme, že dnešní pohled na spojitost je jiný; spojitost je lokální vlastností dané funkce a není vůbec rozhodující, zda je možno na celém definičním oboru funkci popsat jediným analytickým výrazem či zda tento výraz vůbec existuje. Funkce byla v 18. století chápána a priori jako měnící se veličina a např. konstantu Euler mezi funkce nezařazoval.

Další vývoj pojmu funkce zaznamenáme již velmi stručně.[1]) Hlavním důvodem toho, že při popisu dalšího vývoje budeme již stručnější, je to, že jsme měli v úmyslu svůj historický exkurz vztáhnout ke školské matematice (zejména k matematice základní školy) a k žákovu vnímání funkce a obecnější pohledy na funkci (např. strukturalistický) tyto záměry již většinou přesahují. Dokladem existence fylogenetické a ontogenetické paralely ve vývoji pojmu funkce je především období zrodu a prvních diskusí o pojmu funkce (ukončené dnes klasickým pojetím funkce u Dirichleta a Lobačevského); překážky, které pociťovali tehdejší matematici na cestě k obecnějšímu chápání pojmu, se podobají potížím dnešního žáka. Poznamenejme však, že i naše školská matematika zaznamenala kratší období strukturalistického přístupu k pojmu funkce, a to v „množinové éře“ 60. a 70. let právě uplynulého století. Ze zamýšlené souvislosti se školskou matematikou také plyne, že se dále soustřeďujeme na reálnou funkci (jedné) reálné proměnné, ač to explicitně není zdůrazňováno, a používáme pouze jednoslovné označení *funkce*.

Do dalších diskusí o obsahu pojmu funkce přispěli v 19. století významně např. G. F. Bernhard Riemann (1826–1866), Peter Gustav L. Dirichlet (1805–1859) — mimo jiné i tím, že obohatili matematiku o některé „patologické“ funkce, Sylvestre F. Lacroix (1765–1843), Joseph Fourier (1768–1830) a Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793–1856) — ten r. 1834 poprvé zdůraznil fenomén jednoznačnosti závisle proměnné. Lobačevského a Dirichletovo pojetí funkce jakožto **jednoznačného přiřazení** jsou v dnešní matematice považována za klasická.

Vznikající teorie množin na přelomu 19. a 20. století umožňovala pohlížet na funkce jako na **zobrazení** jedné množiny do druhé. Richard Dedekind (1831–1916) sice definuje r. 1887 pojem *zobrazení systému*, ale nedává jej vůbec do souvislosti s tradičním pojetím funkce; tuto souvislost více zdůrazňuje Georg Cantor (1845–1918) či Constantin Carathéodory (1873–1950).

Mnohým matematikům vadilo, že tradiční definice funkce obsahují vágní, nedefinované termíny, jako např. zákon, pravidlo, vztah, přiřazení, korespondence, operace, ale nově i množina a zobrazení a požadovali redukovat počet nedefinovaných termínů. Takto postupoval např. Giuseppe Peano (1858–1932), kterému stačil jediný nedefinovaný pojem *množina* a který funkci chápal jako **speciální binární relaci**, čili jako množinu uspořádaných dvojic. Výrazně strukturalistický přístup k funkci měla skupina francouzských matematiků vystupující pod pseudonymem Nicolas Bourbaki. Na obtížnost definování tak obecného pojmu, jímž funkce je, upozorňovali ve 20. století zejména někteří logici (F. L. Gottlob Frege 1848–1925, Alonzo Church 1903–1995) a doporučovali funkci zavádět jako **primitivní pojem** za pomoci opisů, příkladů a historických exkurzů. Ve snahách logiků zavádět funkci jako primitivní nedefinovaný pojem je možno hledat cenné poučení pro didaktiku matematiky, i když jejich názor byl motivován spíše pocity neúspěchu při pokusech nalézt „čistou“ matematickou definici pojmu, která by byla součástí konzistentního systému.

---

[1]) Tomuto tématu se podrobněji věnujeme v rozsáhlejší práci, která byla nedávno publikována v edici JČMF Dějiny matematiky ([12]), a existuje mnoho další literatury, která mapuje vývoj pojmu funkce od přelomu 18. a 19. století; na některé z titulů odkazujeme na konci článku.

Čím vším funkce ve svém historickém vývoji byla, jakým způsobem se v matematice projevovala a jaké termíny se při jejím vymezování objevovaly? Pohled do historie pojmu ukázal, že funkce byla veličinou, vzorcem, analytickým výrazem, posloupností hodnot, ale také závislostí, intenzitou, vztahem, (binární) relací čili množinou (dvojic), byla vnímána jako křivka nebo dráha pohybujícího se tělesa či bodu a pohlíželo se na ni jako na primitivní, nedefinovaný pojem. Místo přímé definice funkce byla někdy popsána tzv. **funkční situace**, za níž je funkce dána. Byla-li řeč o funkci, mohly být na mysli tabulka diskrétních hodnot, slovní popis, graf, vzorec (jeden či několik), popř. rovnice ve dvou proměnných. Ve vztahu k funkci se prolínala často geometrická i kinematická terminologie. Jako funkce byly často studovány (zejména zpočátku) děje závislé na čase, z čehož vyplývala spojitost, nezápornost argumentu, velmi často i hladkost. Představa spojitého plynutí v čase (nazvěme tento jev podle Newtona *fluentnost*) byla zpočátku velmi silná, vedle toho neměnnost byla vnímána jako něco patologického a konstanta za funkci považována nebyla. Jev závislosti a proměnlivosti byl v souvislosti s funkcí dominující, požadavek jednoznačnosti funkční hodnoty se v definicích začal objevovat až později.

Krátkým historickým přehledem a zdůrazněním některých fenoménů spojených s fylogenezí pojmu funkce jsme chtěli upozornit na velkou pestrost názorů na tento pojem a ukázat tak na možné myšlenkové zdroje využitelné ve školské matematice. Historie nám může poskytnout poučení, že pravděpodobně není možné kvalitně vybudovat u žáků pojem funkce na základě jediného pohledu za použití formálně vyslovené definice. Poučení z historického exkurzu může také pomoci lépe rozumět chybám a překážkám, které žáci v souvislosti s pojmem funkce mají.

Funkce ve školské matematice

Školská matematika byla vůči vývoji matematiky jako vědy v oblasti matematické analýzy velmi dlouho imunní. V podstatě až do začátku 20. století na vznik této matematické disciplíny vůbec nereagovala a ani pojem funkce nebyl ve středoškolské matematice obsažen. Důležitým impulsem pro zavádění funkcí do středních škol v našich zemích byly reformní snahy Felixe Kleina (1849–1925) a shromáždění německých přírodovědců v Meranu r. 1905. Na shromáždění byl kladen důraz na prostorovou představivost a logické „**funkční myšlení**“ a byl tam zformulován reformní návrh na úpravu středoškolského vzdělávání, který požadoval mimo jiné i zavedení základů matematické analýzy do škol.

U nás se k této otázce vyjádřil Karel Zahradníček r. 1906 ve své přednášce „K otázce infinitesimálního počtu na rakouské střední škole“: *„Je velmi žádoucí, aby ve středoškolské matematice byl obsažen pojem funkce a prvky diferenciálního a integrálního počtu; je to nutné při moderním pojetí didaktiky matematiky, má-li odpovídat současnému vědeckému pojetí, a je to nutné i pro použití matematiky ve fyzice, která svým charakterem spadá do oblasti infinitesimální analýzy, jejíž metody zde mohou být jednoduše užity.“* ([15], str. 9.)

Po reformě školních osnov v roce 1909 se konečně pojem funkce a základy diferenciálního a integrálního počtu v rakouské střední škole objevily. Významnou úlohu zde sehrála Jednota českých matematiků a fysiků, pod jejíž patronací vycházely učebnice, v nichž se odrážely modernější názory na výuku a ve kterých se dbalo na preciznost a systemizaci učiva. Důležitou zásadou bylo cyklické uspořádání látky. Prvními učebnicemi, které si kladly za cíl rozvíjet u žáků funkční myšlení, byly např. učebnice Bohumila Bydžovského a Jana Vojtěcha. V sekundě gymnázií se vyučovaly úlohy, na nichž se sledovala závislost změn velikostí ploch rovinných útvarů na změnách jejich určujících prvků, pojem lineární funkce se objevil v kvartě, kvadratická funkce v sextě; probíraly se však pouze konkrétní modely funkcí, obecná definice funkce na střední škole vyslovena nebyla. Obecný pojem funkce se do školské matematiky dostal až po další změně osnov v roce 1920 (funkce byla definována pomocí předpisu). Ale i po této změně byly obecné vlastnosti funkcí včetně základů diferenciálního a integrálního počtu studovány na konkrétních funkcích a např. pojem *inverzní funkce* byl do školské matematiky zaveden až r. 1945. V letech 1949–1953 se vyučování matematiky dále i po obsahové stránce modernizovalo. Zasloužil se o to kolektiv matematiků pod vedením akademika Eduarda Čecha. Do výuky se dostávaly množiny a poprvé se objevil termín *definiční obor funkce*. V letech 1953–1960 vyvrcholily pojetím výuky na jedenáctileté střední škole snahy vykládat středoškolskou matematiku vědecky přesně, ale přitom za využití motivací z praxe a vlastních zkušeností žáků. Funkce se probíraly v devátém ročníku této výběrové střední školy, byly zařazeny do algebry a pojem byl zaveden jako předpis. Po vzniku ZDŠ (základní devítiletá škola) se funkce staly součástí povinného učiva i na nižším stupni školy. Od té doby se žáci základní školy poprvé s pojmem funkce setkávali v osmém, dnes devátém ročníku, ale v 70. letech bylo i období, kdy byl pojem funkce na velmi obecné úrovni zaváděn již v ročníku sedmém. Na učivo o funkcích měla prosazováním množinového přístupu významný vliv „modernizace matematiky“ (zejména v 70. letech).

Podívejme se, jaký pohled je na (reálnou) funkci (zpravidla jedné reálné proměnné) v naší škole dnes. Poznamenejme ještě, že některé konkrétní modely funkcí (přímá a nepřímá úměrnost) jsou zpravidla do učebnic zařazovány dříve, než se pojem funkce definuje, a dokonce již ve výuce matematiky na prvním stupni základní školy jsou obsaženy významné propedeutické prvky ve vztahu k pojmu funkce (tabulky, grafy).

V 9. ročníku ZŠ, kvartě gymnázií, na některých středních školách (zpravidla ve druhém ročníku) a vzácněji i na některých fakultách vysokých škol je funkce definována jako ***předpis*** (***pravidlo***, ***přiřazení***), který každému prvku z jisté množiny (nikoliv nutně číselné) přiřadí právě jedno reálné číslo.

Na vyšším gymnáziu i dalších středních školách i na většině vysokých škol se na funkci pohlíží jako na ***množinu uspořádaných dvojic*** reálných čísel s následující vlastností: ke každému prvnímu prvku dvojice (argumentu, nezávisle proměnné) existuje právě jeden druhý prvek (funkční hodnota, závisle proměnná).

Zpravidla na gymnáziích i vysokých školách, kde je matematice věnována větší pozornost, se předchozí pojetí funkce zasazuje do širšího kontextu a zavádí se hierarchie pojmů *kartézský součin – binární relace – zobrazení* a funkce je pak definována jako

zobrazení do číselné množiny neboli jako speciální ***binární relace***. V tom případě se užívají také pojmy *vzor* a *obraz* pro označení nezávisle a závisle proměnné.

Výzkum a jeho výsledky

Několik let se věnujeme výzkumu toho, jak čeští žáci a studenti pojem funkce vnímají, co pro ně funkce znamená, co si pod tímto slovem vlastně představují. Zajímají nás především žáci, kteří byli již na některém ze školních stupňů s obecnou definicí funkce seznámeni. Soustřeďujeme se na to, zda po probrání definice jsou žáci schopni na funkci pohlížet jako na univerzum (zda si vytvářejí tzv. univerzální model reprezentace pojmu), anebo zda je pro ně funkce pouze souborem několika konkrétních příkladů, s nimiž se ve škole setkali (tj. zda zůstávají ve svých reprezentacích ve stadiu tzv. separovaných modelů). V průběhu let se do výzkumu zapojilo téměř šest set žáků a studentů základních škol a gymnázií severočeského regionu (zejména v Liberci a Teplicích) i některých fakult Technické univerzity v Liberci. Výzkum byl zaměřen zejména na patnáctileté žáky, starší věkové skupiny do něj byly zapojeny původně pro srovnání; ukázalo se však, že mnoho jevů spojených s pojmem funkce má obecnější platnost a není vázáno na určitou věkovou skupinu respondentů. Hlavní část výzkumu, z něhož čerpáme v tomto článku, probíhala v letech 1999–2001, drobnější výzkumné sondy proběhly i dříve. Metodou výzkumu jsou převážně písemné testy, diskuse a interview s žáky a následná analýza získaného materiálu. Testy zkoumaly porozumění různým aspektům pojmu funkce; zjišťovaly, jak žáci rozumějí školské definici, jaký význam jí přikládají, jaké vlastnosti funkcím žáci obvykle připisují, jak funkci vnímají graficky, zda jsou schopni funkční závislost rozpoznat ze slovního zadání (případně i v kontextu nematematickém) a jak reagují na méně standardní úlohy o funkcích. Otázky, které jsme si kladli na začátku výzkumu, byly:

- **Vytvářejí si žáci univerzální model reprezentace pojmu funkce?**
- **Jaké fenomény můžeme v souvislosti s vytvářením reprezentace pojmu funkce u žáků pozorovat?**
- **Jaké překážky brání žákům ve vytváření reprezentace pojmu? Je možná reedukace?**

Po prvních sondách se náš pohled na věc trochu rozšířil a výše uvedené otázky byly doplněny o následující:

- **Čím mohou být překážky, které žáci při vytváření univerzálního modelu pojmu funkce mají, způsobeny? Je jejich odstraňování vždy smysluplné?**
- **Je současný způsob zavádění funkce na našich základních školách vhodný a je v souladu s poznatky kognitivní psychologie? Je v silách průměrného žáka, aby si univerzální model pojmu funkce vytvořil?**

Shrneme nyní nejzávažnější **výsledky** našeho dosavadního **výzkumu**. Uváděné závěry byly vyvozeny na základě kvantitativního zpracování testů, a není-li poznamenáno jinak, týkají se jakékoliv věkové skupiny žáků a studentů.

- **Definice** funkce je žáky pociťována převážně jako **formalita**, která jejich představy o funkci příliš neovlivňuje.
- Pro žáky i studenty je funkce více **souborem konkrétních příkladů** než obecnou kategorií. Ukázalo se dokonce, že za funkce jsou častěji považovány speciální případy těchto konkrétních případů — např. u grafu lineární funkce je preferována přímka s kladnou směrnicí procházející počátkem souřadného systému, u grafu kvadratické funkce je to parabola s vrcholem v počátku a s kladným koeficientem u kvadrátu x^2, zatímco ostatní případy grafů těchto funkcí jsou občas označovány za grafy „ne-funkcí".
- Důležitou roli při rozhodování žáka (např. je-li daný graf grafem funkce či ne) hraje „**známost**" modelu (ze školy, učebnice) a **podobnost** se známým modelem.
- Fenomény, které žáci nejčastěji s funkcí spojují, jsou **spojitost**, určitá **pravidelnost** a **symetrie** grafu (daná např. periodičností funkce), **hladkost**.
- Jako nejčastější vlastnosti, které byly u žáků spojovány s pocitem „nefunkce", se ukázaly **nespojitost**, **diskrétnost** (reálná posloupnost nebyla za funkci považována dokonce i některými vysokoškolskými studenty, zejména nebyl za graf funkce označován jeden izolovaný bod v kartézském souřadném systému) a **konstantnost**. Také **posunutí** známého grafu funkce vzhledem k základní poloze, „**nekompletnost**" známého grafu či „**slepenost**" grafu z více známých grafů měly velmi často za následek zařazení grafu mezi grafy „nefunkcí".
- Test, v němž měli respondenti za úkol identifikovat funkce mezi relacemi popsanými slovy (bez užití analytického vyjádření či grafu), ukázal na některá **jazyková neporozumění** (význam slova *počet*, vazba *přiřazovat čemu co*), na občasnou **neschopnost identifikovat definiční obor** a na **zaměňování nezávisle a závisle proměnné**. Někteří žáci měli tendenci nazírat na funkci výhradně jako na viditelnou aktivitu, zejména spojenou s časem. Některé žáky vedlo k rozhodnutí, že slovně popsaná relace je funkcí, to, že pro ni zkonstruovali vzorec; pokud vzorec nenašli, stala se jeho absence argumentem pro opačný závěr (relace není funkcí). (Tento test se netýkal vysokoškolských studentů.)
- Velké rozdíly ve výsledcích úloh, kde byly relace popsány pouze slovy anebo naopak znázorněny pouze graficky, svědčily o nerovnováze mezi auditivními a vizuálními schopnostmi některých žáků (ZŠ, SŠ).

Možné příčiny zkreslených představ žáků o funkcích

Získaný výzkumný materiál je možné analyzovat z různých úhlů. Bylo velmi zajímavé sledovat individuální žákovské práce i argumentace žáků při následných diskusích. V tomto příspěvku jsme však dali přednost globálnímu shrnujícímu pohledu, neboť máme v úmyslu se zamyslet nad možnými příčinami některých „chybných představ" žáků. Netvrdíme, že jde o jediná možná vysvětlení některých jevů, na něž jsme při svém výzkumu narazili, a uvědomujeme si zcela jasně, že podobné analýzy jsou vždy poněkud spekulativní. Náš pohled je pouze jedním z pohledů na věc a nabízíme jej prostřednictvím tohoto článku k diskusi.

Povaha pojmu. Pojem funkce je velmi obecný, jeho uchopení a vytvoření univerzálního modelu v mysli žáka vyžaduje, aby žák byl předtím schopen vnímat jako univerzum těch několik málo typů funkcí, s nimiž se na základní škole setkává (přímá úměrnost, funkce lineární, kvadratická, nepřímá úměrnost, příp. funkce goniometrické). Výzkum ukázal, že tomu tak není a že na tyto konkrétní typy funkcí žáci často nepohlížejí jako na třídu (např. všech lineárních či kvadratických funkcí), ale jako na jednotlivé příklady. Méně frekventované reprezentanty těchto funkcí přitom za funkce nepovažují. Zdá se tedy, že místo vytváření obecné představy o pojmu funkce se mnozí žáci nacházejí ve stadiu „konkrétně konkrétních“ modelů. Zejména u úloh s grafy bylo zřetelné, že hlavním faktorem při žákově rozhodování, zda daný graf je grafem funkce, je to, zda tento graf je v „seznamu“ žákovi známých modelů (anebo zda se mu alespoň „podobá“). Jestliže se předložený graf v tomto seznamu nenachází, je často zařazen mezi „nefunkce“.

Složitou otázkou je způsob definování funkce. V současné době převažující první definice funkce pomocí předpisu odpovídá možnostem patnáctiletého žáka lépe než definice pomocí množiny uspořádaných dvojic, ale na druhé straně jej může i omezovat a bránit mu ve vytvoření dostatečně obecné představy o funkční závislosti, neboť předpis je často ztotožňován s analytickou formulí, vzorcem. Nezdůrazní-li se při výuce, že např. i analytický předpis někdy nemusíme mít k dispozici (ať již proto, že je zatím žákovi neznámý či nesrozumitelný nebo že neexistuje), anebo naopak, že předpisů může být na jednom definičním oboru více, může si žák odnášet představu, že bez vzorce není funkce. Odpovědi některých žáků získané výzkumem tento závěr podporují. Samo slovo *předpis* není přesně vymezeno a může být přijímáno poměrně vágně. (Mnohé dnešní učebnice však nabízejí jako předpisy i tabulky či grafy, a to ještě před formulací obecné definice.) Obecnější definice funkce pomocí množiny uspořádaných dvojic neklade sice implicitně důraz na existenci analytické formule, ale je statičtější a s dalšími pojmy analýzy, které zpravidla následují (jako je např. monotonie, limita, derivace apod.) není organicky spjata.

Historické paralely. Některé překážky a potíže, které žáci a studenti při vytváření univerzálního modelu pojmu funkce mají, vykazují zajímavé souvislosti s fylogenezí pojmu. Pojetí funkce u některých žáků je velmi podobné některým raným pojetím tohoto pojmu v historii matematiky. Jak bylo naznačeno v části věnované historii, vyvíjel se v matematice pojem funkce doslova od „přirozenosti k nepřirozenosti“ a není nic podivného, napodobují-li někteří žáci ve svých představách tuto cestu, resp. pozorujeme-li u nich stejné překážky při vytváření univerzálního modelu pojmu jako u starých matematiků.

Zařazení tématu v kurikulu. Doba zařazení učiva o funkcích se v našich osnovách často měnila, nyní se s definicí funkce žák poprvé setkává zpravidla v 9. ročníku základní školy či v kvartě víceletého gymnázia. Učivo o funkcích většinou začíná po kratším motivačním úvodu (ale také po konkrétních příkladech z předchozích ročníků, které však jsou uváděny bez užití slova funkce) definicí a teprve potom se zavádí pojem lineární funkce. Myslíme si, že není vhodné začínat výklad na základním stupni školy definicí — krátký přehled fylogeneze pojmu funkce nám ukázal, že ani v historii matematiky tomu tak nebylo, pojem funkce stejně jako mnoho jiných fundamentálních pojmů se v matematice definicí nezrodil (a dokonce se s funkcemi v matematice velmi intenzivně pracovalo a bylo dosaženo mnoha skvělých výsledků dříve, než byla první definice funkce vyslovena). Něco jiného je např. matematická monografie či literatura pro profesionály v daném oboru. Může dokonce vzniknout otázka, zda vůbec na základní škole obecnou definici formulovat, víme-li, že nebude prostor na množství různorodých a dostatečně obecných příkladů (z hlediska kognitivní psychologie je tak redukována fáze separovaných modelů).

Ve výsledcích výzkumu jsme uvedli, že někteří studenti střední i vysoké školy explicitně uváděli, že posloupnost není funkcí (toto se neobjevilo vůbec u žáků základní školy, kteří pojem posloupnost z matematiky většinou neznají). I zde může být důvodem zařazení obou témat v kurikulu střední, příp. vysoké školy. Obě témata se probírají odděleně, s pojmem funkce jsou studenti seznámeni dříve než s pojmem posloupnost (i když např. limita posloupnosti se vykládá zpravidla před limitou funkce) a pro funkci, která je posloupností, se navíc téměř výhradně užívá jiný termín i symbolika. Mnozí žáci i studenti si nedokáží spojovat do souvislostí poznatky získané v různých tématech i v předmětech v různém čase a předkládané učivo vnímají v oddělených disjunktních dávkách.

Formalismus výuky. Autoři mnohých řad učebnic se jistě snaží respektovat přirozenou cestu od separovaných modelů funkcí k modelu univerzálnímu a pokoušejí se co nejlépe transformovat matematiku-vědu do školské matematiky a mít přitom na paměti fylogenezi pojmu, problémem však bývá didaktická interpretace učiva. Množství příkladů funkcí uvedených v učebnicích pro předchozí ročníky (případně i v jiných předmětech) ještě dříve, než se vysloví definice funkce, nebývá zpravidla s definicí dodatečně propojeno a velmi často se tak stává, že žák začne funkce explicitně vnímat teprve od okamžiku, kdy se začne ve škole probírat kapitola s názvem Funkce. Samotný výklad učiva o funkcích začíná na základní škole zpravidla jedním či dvěma příklady závislostí z „reálného života", jako je např. graf závislosti teploty na čase pořízený termografem či některé závislosti demografické či ekonomické, v další výuce se však tyto přirozené zdroje příliš nevyužívají a žáci (ZŠ) pracují převážně s funkcí lineární, příp. kvadratickou, které jsou dány jedním vzorcem na celém definičním oboru. Jednoznačnost přiřazení závisle proměnné není dostatečně zdůrazňována, pozornost je více věnována předpisu, analytické formuli či technickým krokům při rýsování grafu funkce. Samotná definice funkce je málo konfrontována s konkrétními příklady funkcí (zejména i s příklady praktickými), téměř se ve škole neukazují příklady, kde předpis chybí, případně kde jich je na jednom definičním oboru více. Málo pozornosti se věnuje konstrukci protipříkladů. Definuje-li se jakýkoliv objekt pomocí jistých vlastností, nemělo by se zapomínat na hledání takových objektů, které některé z těchto vlastností nemají. Není divu, že žák přijímá definici jako formálnost, považuje ji za něco, co s dalšími příklady funkcí nesouvisí.

Závěr

Analýza materiálu získaného výzkumem ukázala na zajímavé jevy, které v souvislosti s funkcemi můžeme u žáků i studentů pozorovat. Po počátečním překvapení z některých výsledků jsme se naučili dívat na žákovo tápání a „chybování“ jinýma očima než předtím. Čím déle jsme se tomuto tématu věnovali, tím více jsme poznávali, že některé „chybné“ reakce žáků jsou vlastně zcela přirozené (proto také užíváme uvozovek) a že mohly vzniknout i jako následek pojetí funkce v české škole nebo jako opakování fylogeneze pojmu. Spíše nás potom udivilo, když si např. žák teprve patnáctiletý „stihl“ o funkci dobrou představu vybudovat. Budeme velmi rádi, jestliže jsme i svými testy a otázkami některé žáky a studenty podnítili k hlubšímu přemýšlení o tom, co to ta funkce vlastně je. V žádném případě však význam svého výzkumu nijak nepřeceňujeme, neboť víme, že i když všechno na něčem závisí, nejsou na světě vše jen funkce. Víme, že pouhé konstatování spíše neutěšené skutečnosti a spekulování o jejích příčinách na situaci nic nemění. Některé cesty vedoucí k reedukaci jsme naznačili v předchozích odstavcích. Jako nejdůležitější vidíme boj proti formalismu, a to jak na straně učitelů, tak na straně žáků. Výzkum celkem zřetelně ukázal, že žáci a studenti si zpravidla své představy o funkci nebudují na základě definice, proto se zde mohou nabízet i otázky o vhodnosti, době zařazení i způsobu definování pojmu (zejména na základní škole). Věříme však, že dostane-li se žákům ve škole prostřednictvím jejich aktivní práce i spoluobjevování pestřejší palety příkladů různých závislostí popisujících reálné situace a využívajících přitom grafických, analytických, slovních i různých „obrázkových“ vyjádření (a nezapomene-li se přitom na funkce s vlastnostmi, které náš výzkum odhalil jako podezřelé), budou-li se připomínat zdroje z jiných předmětů i z ostatních témat uvnitř matematiky, mohou vzniknout podmínky pro to, aby si postupně většina z nich vytvořila dostatečně obecnou představu o pojmu funkce, která nebude pouze formálním a izolovaným poznatkem.

L i t e r a t u r a

[1] Bertrand, Y.: *Soudobé teorie vzdělávání.* Portál, Praha 1998.
[2] Bourbaki, N.: *Elements of the History of Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1994.
[3] Cantor, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Dritter Band. B. G. Teubner, Leipzig 1901.
[4] Church, A.: *Introduction to Mathematical Logic.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.
[5] Dedekind, R.: *Was sind und was sollen die Zahlen?* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1969.
[6] Edwards, C. H. Jr.: *The Historical Development of the Calculus.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1979.
[7] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2.* SPN, Bratislava 1990.
[8] Jarník, V.: *Bolzano a základy matematické analýzy.* JČSMF, Praha 1981.
[9] Juškevič, A. P.: *Istorija matematiki 2.* Nauka, Moskva 1970.
[10] Juškevič, A. P.: *Istorija matematiki 3.* Nauka, Moskva 1972.
[11] Kopáčková, A.: *Pojem funkce u českých žáků.* In: Sborník příspěvků ze 7. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, str. 123–129. JČMF, Plzeň 2000.

[12] Kopáčková, A.: *Fylogeneze pojmu funkce.* In: Dějiny matematiky, sv. 16. Matematika v proměnách věků, str. 46–80. Prometheus, Praha 2001.
[13] Medveděv, F. A.: *Očerki istorii teorii funkcij dějstvitěľnogo peremennogo.* Nauka, Moskva 1975.
[14] Peano, G.: *Arbeiten zur Analysis und zur mathematischen Logik.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1990.
[15] Potůček, J.: *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900 až 1945,* 2. díl. Pedagogická fakulta ZČU, Plzeň 1993.
[16] Schwabik, Š.: *Několik postřehů k vývoji matematické analýzy v 19. století.* In: Matematika v 19. století. (Sborník přednášek z letních škol Historie matematiky.) Prometheus, Praha 1996.
[17] Schwabik, Š., Šarmanová, P.: *Malý průvodce historií integrálu.* Prometheus, Praha 1996.
[18] Youschkevitch, A. P.: *The Concept of Function up to the Middle of the 19^{th} Century.* In: Arch Hist Exact Sci *16* (1976), str. 37–85.

Osmý ročník mezinárodní vysokoškolské matematické soutěže

aneb

Nechcete si zasoutěžit?

Jaroslav Lukeš, Praha

Ve dnech 19.–25. července 2001 se v Praze konal již 8. ročník Mezinárodní matematické soutěže vysokoškoláků IMC 2001. Uspořádala ho katedra matematické analýzy na Matematicko–fyzikální fakultě Univerzity Karlovy, jejíž rektor prof. Ivan Wilhelm nad ním převzal záštitu. Hlavním organizátorem pak byla University College London, předsedou prof. John Jayne z této univerzity.

Podívejme se nejprve do historie pořádání těchto mezinárodních matematických soutěží vysokoškolských studentů. Jejich počátky jsou svázány s oslavou Mezinárodního dne studentstva 4. dubna a mezi první pořadatele patřili organizátoři z Jugoslávie. První ročník se konal v roce 1967, ale teprve počínaje 9. ročníkem, kdy se soutěž

Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc. (1940), Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín, e-mail: lukes@karlin.mff.cuni.cz
Podporováno grantem GAUK 165/99 a výzkumným záměrem MSM 1132 00007.
Autorem fotografií je RNDr. Jiří Kottas, CSc.